Phép biến đổi tuyến tính (Ánh xạ tuyến tính) từ một không gian véc tơ vào không gian véc tơ là ánh xạ bảo toàn phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ

Nhà toán học Peano (Italia) là người đầu tiên đưa ra khái niệm ánh xạ tuyến tính (1888)

Tương ứng giữa phép biến đổi tuyến tính và ma trận của nó là một đẳng cấu bảo toàn phép cộng, phép nhân một số với ma trận và phép nhân hai ma trận.

Hạng của phép biến đổi tuyến tính bằng hạng của ma trận của nó

Chính vì lý do này nên một bài toán về ma trận, hệ phương trình tuyến tính có thể giải quyết bằng phương pháp ánh xạ tuyến tính và ngược lại.

4.1 ÁNH XẠ

4.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y = f(x)$ của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:

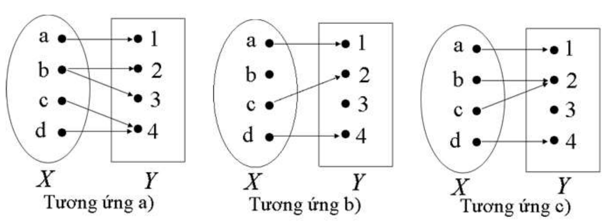
1. Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $y = f(x) \in Y$
2. Với mỗi $x \in X$ ảnh $y = f(x)$ là duy nhất

Ta ký hiệu $\begin{array}{l} f : X \longrightarrow Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ hay $\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích.

Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào $\mathbb{R}$

Ví dụ 4.1



Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện thứ 2

Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện 1

Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ X vào Y

Hai ánh xạ $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$

Xét ánh xạ $f : X \to Y$

- Cho $A \subset X$, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của A qua ánh xạ f

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f

- Cho $B \subset Y$, ta gọi tập sau là nghịch ảnh của B qua ánh xạ f

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\}$$

4.1.2. Phân loại các ánh xạ

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt

$$\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hoặc một cách tương đương

$$\forall x_1, x_2 \in X; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$

Ánh xạ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là *song ánh*

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$

Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$f(x) = y,\ y \in Y$$

trong đó ta xem x là ẩn và y là tham biến

- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.
- Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.
- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

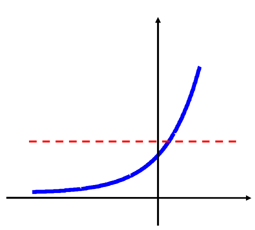
Ví dụ 4.22 Các hàm số đơn điệu chặt:

- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Hàm số $f(x) = 2^x$ có đạo hàm $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy f là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

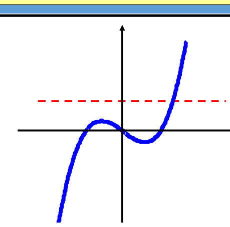
Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình $f(x) = y,\ y \in Y$ có không quá 1 nghiệm.



Hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị

Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (1.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm

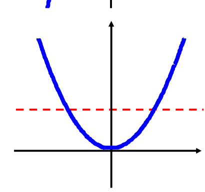
Vậy g là toàn ánh nhưng không đơn ánh



Hàm số $h(x) = x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị ≥ 0.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình có 2 nghiệm khi $y > 0$ và vô nghiệm khi $y < 0$.

Vậy h là không toàn ánh và không đơn ánh.



4.1.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh

$\exists! x \in X \longrightarrow \forall y \in Y$

Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$

Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f và được ký hiệu f^{-1}

$f^{-1}: Y \to X$ $\quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

f^{-1} cũng là một song ánh

Ví dụ 4.24 Hàm mũ $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit $\quad y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Ví dụ 4.25 Xét hàm $\sin : [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$

$x \mapsto \sin x$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh

Hàm ngược được ký hiệu $\arcsin : [-1;1] \to [-\pi/2;\pi/2]$

$y \mapsto \arcsin y$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x,\ \forall x \in [-\pi/2;\pi/2], y \in [-1;1]$$

Tương tự

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x,\ \forall x \in [0;\pi], y \in [-1;1]$$
$$x = \arctan y \Leftrightarrow y = \tan x,\ \forall x \in (-\pi/2;\pi/2), y \in (-\infty;\infty)$$
$$x = \operatorname{arccot} y \Leftrightarrow y = \cot x,\ \forall x \in (0;\pi), y \in (-\infty;\infty)$$

4.1.4. Hợp của hai ánh xạ

Với hai ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$

thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z

được gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$

Vậy $g \circ f: X \to Z$ có công thức xác định ảnh $g \circ f(x) = g(f(x))$

Ví dụ 4.26

Xét hai hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x,\ g(x) = 2x^2 + 4.$

Ta có thể thiết lập hai hàm hợp từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4),\ g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $g \circ f \neq f \circ g$

nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

4.2 PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

4.2.1 Định nghĩa, ví dụ và tính chất

a. Định nghĩa 4.2: Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian véc tơ W thoả mãn với mọi $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}$$

được gọi là phép biến đổi tuyến tính hay ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính) từ V vào W.

Khi $V = W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

b. Ví dụ:

1) *Ánh xạ không* $\mathbf{0}: V \to W$, $u \mapsto \mathbf{0}(u) = 0$

2) *Ánh xạ đồng nhất* $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $u \mapsto \mathrm{Id}_V(u) = u$

3) *Phép vị tự tỷ số* $k \in \mathbb{R}$ $f: V \to V$, $u \mapsto f(u) = ku$

Ánh xạ 1), 2), 3) là phép biến đổi tuyến tính; 2), 3) là tự đồng cấu;

4) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ Ta có thể kiểm tra được đẳng thức

$$A\left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix}\right)=\alpha A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\beta A\begin{bmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{bmatrix}$$

Do đó ánh xạ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto T(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_m)$$

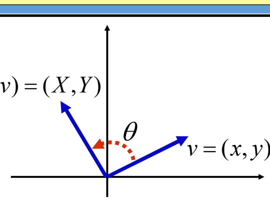
Xác định bởi $\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ là một phép bđ tuyến tính

Ngược lại ta có thể chứng minh được mọi phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

5) Phép quay góc θ

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (X,Y)$$



$$X + iY = e^{i\theta}(x+iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy)$$

$$X + iY = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Vậy phép quay góc θ là một ánh xạ tuyến tính

c. Tính chất

Định lý 4.2 *Nếu $f: V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính thì*

(i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ii) *với mọi* $v \in V$: $f(-v) = -f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i)$, $\forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, $\forall v_1,\dots,v_n \in V$.

Định lý 4.3

Ánh xạ $f: V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Định lý 4.4 *Mỗi phép biến đổi tuyến tính V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh một cơ sở của V.*

Nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ cho trước của V

khi đó với mỗi hệ véc tơ $u_1, \dots, u_n \in W$

Tồn tại duy nhất phép biến đổi tuyến tính $f : V \to W$ sao cho

$$f(e_i) = u_i,\ i = 1,\dots,n$$

Hệ quả 4.4 $f, g : V \to W$ là hai phép biến đổi tuyến tính

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V

Khi đó $f = g \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i);\ \forall i = 1,\dots,n$

d. Các phép toán trên các phép biến đổi tuyến tính

d.1 $\mathrm{Hom}(V,W)$

Tập các phép biến đổi tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là

$$\mathrm{Hom}(V,W) \text{ hay } \mathrm{L}(V,W)$$

Với mọi $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, với mọi $k \in \mathbb{R}$

Ta định nghĩa phép cộng hai phép bđ tuyến tính bởi công thức

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

Và phép nhân một số với phép bđ tuyến tính bởi công thức

$$(kf)(v) = kf(v)$$

Với hai phép toán này thì $\mathrm{Hom}(V,W)$ có cấu trúc không gian véc tơ

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$$

Ví dụ 4.2:

Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z) = (3x-5y+2z, 4x+y-6z)$$

$$g(x,y,z) = (2x+6y-7z, x-5z)$$

$$\Rightarrow 3f(x,y,z) = (9x-15y+6z, 12x+3y-18z)$$

$$2g(x,y,z) = (4x+12y-14z, 2x-10z)$$

$$\Rightarrow (3f-2g)(x,y,z) = (5x-27y+20z, 10x+3y-8z)$$

d.2 End$V$

Tập các tự đồng cấu của V, ký hiệu End$V$

Với phép cộng hai phép bđ tuyến tính và nhân một số với phép bđ tuyến tính thì End$V$ *là một không gian véc tơ.*

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2$$

Mặt khác hợp của hai phép biến đổi tuyến tính cũng là một phép biến đổi tuyến tính.

Cho $f \in \operatorname{End} V$, ta ký hiệu

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ lần}} \qquad f^0 = \mathrm{Id}_V \qquad f^1 = f$$

Ví dụ 4.3:

Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y) = (3x-5y, 4x+y)$$

$$f^2(x,y) = \big(3(3x-5y)-5(4x+y), 4(3x-5y)+(4x+y)\big) = (-11x-20y, 16x-19y)$$

NHÂN VÀ ẢNH CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH (trong bài tập)

Giả sử $f: V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính

Nhân của f $\quad \operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\} \subset V$

$\forall v \in V: \ v \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0}$

Ảnh của f $\quad \operatorname{Im} f = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$

$\forall u \in W: \ u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists v \in V: \ u = f(v)$

Hạng của f $\quad r(f) = \dim \operatorname{Im} f$

Định lý Với mọi phép biến đổi tuyến tính $f: V \to W$ ta có

$$\dim V = r(f) + \dim \operatorname{Ker} f$$

Ví dụ

Xét ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh:

$$f(x,y,z,t) = (2x-y+3z+5t, 3x-2y+3z+4t, x+3z+6t)$$

Tìm một cơ sở của Imf, Ker$f$. Từ đó suy ra hạng $r(f)$

Giải: $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4: (a,b,c) = f(x,y,z,t)$

Nói cách khác $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = a \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = b \\ x & & +3z & +6t & = c \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & a \\ 3 & -2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 0 & 3 & 6 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & b-a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a+c \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi r(A) = r(A~), do đó $b-2a+c=0$

$$u=(a,b,c)\in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u=(a,2a-c,c)=a(1,2,0)+c(0,-1,1)$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\{(1,2,0),(0,-1,1)\}$ Hạng $r(f)=2$

$v=(x,y,z,t)\in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi (x,y,z,t) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & =0 \\ 3x & -2y & +3z & +4t & =0 \\ x & & +3z & +6t & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3z-6t \\ y=-3z-7t \end{cases}$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{(-3,-3,1,0),(-6,-7,0,1)\}$

$$v=(-3z-6t,-3z-7t,z,t)=z(-3,-3,1,0)+t(-6,-7,0,1)$$

Nhận xét Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính

$\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ là một cơ sở của V

Có thể chứng minh được $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $\operatorname{Im} f$

do đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ là cơ sở của $\operatorname{Im} f$

Ví dụ trên có hạng $r(f)=2$ Vì vậy ngoài cơ sở $\{(1,2,0),(0,-1,1)\}$

hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

đều là cơ sở của $\operatorname{Im} f$

S là một hệ sinh của V thì $f(S)$ là một hệ sinh của $\operatorname{Im} f$

Đặc biệt nếu $\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $\operatorname{Im} f$

Do đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ là cơ sở của $\operatorname{Im} f$

Định lý 4.20

Giả sử $f: V \to W$ là phép biến đổi tuyến tính và $\dim V = \dim W$.

Khi đó f đơn ánh khi và chỉ khi f toàn ánh, do đó song ánh.

Ví dụ 4.4 Phép bđ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y)=(2x-y,x+y)$$

là một đơn ánh vì

$$f(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (2x-y,x+y)=(0,0) \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

do đó f là một song ánh.

4.2.2 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở

a. Ma trận biểu diễn của phép biến đổi tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W

Ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$

được gọi là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$

Ký hiệu $A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

Xác định như sau $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ $\quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j = 1,\dots,n$

Trường hợp tự đồng cấu f của không gian véc tơ V

Ma trận của f trong cùng một cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ của V được ký hiệu

$$A = [f]_{\mathscr{B}}$$

Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở chính tắc được gọi là ***ma trận chính tắc***

Ví dụ 4.5 Xét phép bđ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (2x + y - 4z, 3x + 5z)$$

$$f(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$
$$f(0,0,1) = (-4,5) = -4(1,0) + 5(0,1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nhận xét

Bằng cách tính toán như ví dụ trên ta có thể kiểm tra được rằng

Phép bđ tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ với công thức xác định ảnh

$$f(x_1,\dots,x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

Có ma trận chính tắc

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ

Ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 2z, 3x + y + 5z, x - y + z)$$

ma trận chính tắc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ W

Định lý 4.21 Tương ứng $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathscr{M}_{m\times n}$

$$f \mapsto A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} + [g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: [\lambda f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \lambda [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

$$r(f) = r([f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})$$

Cho hai ánh xạ tuyến tính f, g : $V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V''$

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, $\mathscr{B}'' = \{e''_1, \dots, e''_l\}$ lần lượt là các cơ sở của không gian véc tơ V, V', V''

Giả sử $A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$B = [g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ $B = [b_{ki}]_{l\times m}$

Vậy $[g \circ f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = BA = [g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

Khi $V = V' = V''$ và ta chọn **cố định một cơ sở** của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 4.22 Tương ứng $\mathrm{End}(V) \to \mathscr{M}_n$

$f \mapsto A = [f]_{\mathscr{B}}$

là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}} = [f]_{\mathscr{B}} + [g]_{\mathscr{B}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : [\lambda f]_{\mathscr{B}} = \lambda [f]_{\mathscr{B}}$$

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}} [f]_{\mathscr{B}}$$

$$r(f) = r(A)$$

Hệ quả 4.23

Cho $f \in End(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A = [f]_{\mathscr{B}}$

f là song ánh khi và chỉ khi A khả nghịch

Ma trận của f^{-1} trong cơ sở $\mathscr{B}$ có dạng $[f^{-1}]_{\mathscr{B}} = A^{-1}$

Ví dụ 4.20 Xét phép bđ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x+2y+2z, 3x+y+5z, x-y+z)$$

Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ có $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

Do đó f là một song ánh và ánh xạ ngược xác định như sau

$$f^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{2}(6x-4y+8z, 2x-y+z, -4x+3y-5z)$$

b. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f : V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính

$T = [t_{ij}]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1}$ | là ma trận chuyển cơ sở | $\mathscr{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ sang $\mathscr{B}'_1 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ của V

$P = [p_{ki}]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}$ | $\mathscr{B}_2 = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ $\mathscr{B}'_2 = \{\omega'_1, \dots, \omega'_m\}$ của W

$A = [f]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ | là ma trận của f trong cơ sở | $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$

$A' = [f]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}$ | $\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2$

$$[p_{ki}]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2} [f]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2} = [f]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} [t_{ij}]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1}$$

Hoặc $PA' = AT$ $\quad A' = P^{-1}AT$

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V

Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì $A' = T^{-1}AT$

Hai ma trận A, B được gọi là **đồng dạng** nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$

Hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng

Nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa định thức của một tự đồng cấu f là

$$\det f = \det[f]_{\mathscr{B}}$$

Ví dụ 4.22 Hai phép bđ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x-2y, x, -3x+4y) \qquad g(x,y,z) = (x-2y-5z, 3x+4y)$$

Ma trận chính tắc của f và g: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận chính tắc của $g \circ f$: $BA = \begin{bmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

Định thức $\det(g \circ f) = \begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 70$

c. Biểu thức tọa độ của phép biến đổi tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một phép bđ tuyến tính

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W

$(x_1, \dots, x_n) = (v)_{\mathscr{B}}$ là tọa độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$

$(y_1, \dots, y_m) = (f(v))_{\mathscr{B}'}$ là tọa độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$

$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k \qquad f(v) = \sum_{k=1}^{m} y_k\omega_k$$

Biểu thức tọa độ của phép bđ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k \qquad f(v) = \sum_{k=1}^{m} y_k\omega_k$$

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \right) \omega_k$$

$$\Rightarrow y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$[f(v)]_{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [v]_{\mathscr{B}}$$

d. Phép bđ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Đẳng thức $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

có thể viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$

Điều này cho phép giải quyết các bài toán về phép bđ tuyến tính thông qua hệ phương trình tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một phép bđ tuyến tính

$\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W

- Tìm $\operatorname{Im} f$: $b \in W,\ b = b_1\omega_1 + \cdots + b_m\omega_m$

$b \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ có nghiệm

- Tìm $\operatorname{Ker} f$: $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$

$v \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Nhận xét:

Từ hai định lý 4.21, 4.22, hệ quả và các ví dụ trên ta thấy rằng một bài toán về ánh xạ tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận, bài toán hệ phương trình tuyến tính và ngược lại.

Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính f với $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là đơn ánh hoặc toàn ánh, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng có duy nhất nghiệm.

4.2.3 CHÉO HOÁ MA TRẬN

Trong phần này ta giải quyết bài toán:

Với tự đồng cấu tuyến tính f của không gian V, hãy tìm một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Bài toán trên cũng tương đương với bài toán: Cho ma trận A tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo

a. Véc tơ riêng, giá trị riêng

λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1, \dots, x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad (A-\lambda I)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \qquad (*)$$

Khi đó $v=(x_1, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của ma trận A.

Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ là các nghiệm khác không của phương trình thuần nhất (*). Không gian nghiệm của (*) được gọi là *không gian riêng ứng với giá trị riêng* λ

λ được gọi là một ***giá trị riêng của tự đồng cấu*** f nếu tồn tại véc tơ $v\in V$, $v\neq\mathbf{0}$ sao cho $f(v)=\lambda v$

v là ***véc tơ riêng ứng với giá trị riêng*** λ

Ví dụ 4.17

a) Xét ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_V: V\to V$. Với mọi $v\in V$, $\mathrm{Id}_V(v)=v$

Vậy 1 là một giá trị riêng của Id_V

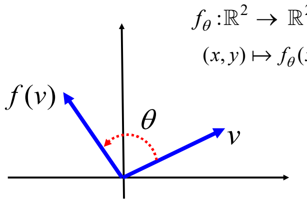
b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y)=(3x-y,-2x+4y)$

Dễ dàng thấy $f(x,x)=2(x,x)$

Vậy 2 là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v=(x,x); x\neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng

c) Phép quay góc θ

$$f_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\mapsto f_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$$



- Khi $\theta=0$, f_0 là ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$: chỉ có giá trị riêng là 1.
- Khi $\theta=\pi$, f_θ: chỉ có giá trị riêng là -1.
- Khi $\theta\neq 0, \pi$, f_θ không có giá trị riêng.

Cho tự đồng cấu f của V. Với mỗi $\lambda\in\mathbb{R}$, ký hiệu

$$V_\lambda=\left\{v\in V \,\middle|\, f(v)=\lambda v\right\}=\left\{v\in V \,\middle|\, Av=\lambda v\right\}$$

Định lý 4.14

1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda\neq\{\mathbf{0}\}$

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v\neq\mathbf{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ

Nhận xét 4.4

Cho $f \in \text{End}(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A = [f]_{\mathscr{B}}$

Khi đó $v \in V$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f khi và chỉ khi $(v)_{\mathscr{B}}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của A

Nghĩa là

$$v \in V; (v)_{\mathscr{B}} = (x_1, \ldots, x_n), v \neq \mathbf{0} : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Đa thức đặc trưng

❖ A là một ma trận vuông cấp n. Định thức

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

là một đa thức bậc n của λ được gọi là ***đa thức đặc trưng của A***

❖ Cho $f \in \text{End}(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A = [f]_{\mathscr{B}}$

Khi đó định thức

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

không phụ thuộc vào cơ sở của V, cũng được gọi là ***đa thức đặc trưng của f***

Định lý 4.26

λ_0 là giá trị riêng của A (tương ứng của f) khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A (tương ứng của f)

$$\mathscr{P}(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 I) = 0$$

Ví dụ 4.25

Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu của không gian $\mathbb{R}^2$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y) = (3x - y, -2x + 4y)$

Ta có ma trận chính tắc $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

✠ Véc tơ riêng $v=(x,y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm của hệ

$$(A-\lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -2 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x-y=0 \Rightarrow y=x$

Vậy $v=(x,x)=x(1,1),\ x\neq 0$

✠ Véc tơ riêng $v=(x,y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là nghiệm của hệ

$$(A-\lambda_2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$

Vậy $v=(x,-2x)=x(1,-2),\ x\neq 0$

c. Tự đồng cấu chéo hoá được

- Tự đồng cấu f của không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo

Như vậy f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f

- Ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo

Định lý 4.28

Giả sử $v_1, \dots, v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ độc lập tuyến tính

Hệ quả 4.29

Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V (hoặc ma trận A vuông cấp n) có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được

Hệ quả 4.30 *Giả sử $\mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$*

Khi đó f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được khi và chỉ khi

$$\dim V_{\lambda_i} = m_i;\ \forall\, i=1,\dots,k$$

d. Thuật toán chéo hoá

Bước 1: Viết đa thức đặc trưng dạng

$$\mathscr{P}(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_k-\lambda)^{m_k}Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda)$ là đa thức không có nghiệm thực

- Nếu $m_1+\dots+m_k<n$ (khi bậc của $Q(\lambda)\geq 2$): không chéo hóa được
- Nếu $m_1+\dots+m_k=n$ thì tiếp tục bước 2

CHƯƠNG 4: PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một cơ sở của không gian riêng $V_{\lambda i}$

Các véc tơ riêng $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ có $(x_1,\ldots,x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

$$[A-\lambda_i I]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dim V_{\lambda_i} = d_i = n - r(A-\lambda_i I)$$

- Nếu $d_i < m_i$ với i nào đó, $1 \le i \le k$ thì f không hoá chéo được
- Nếu $d_i = m_i$, $\forall i : 1 \le i \le k$. Tiếp tục bước 3

Bước 3: Với mỗi giá trị riêng λ_i ; $i = 1, \ldots, k$ ta đã chọn được m_i véc tơ riêng độc lập tuyến tính

Gộp tất cả các véc tơ này ta được hệ gồm $m_1 + \ldots + m_k = n$ véc tơ riêng độc lập, đó là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm

Ma trận T có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$

Ví dụ 4.27

Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5-\lambda & -3 \\ -8 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda+5 & -3 \\ 8 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left((\lambda^2-25)+24\right) = (\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda)$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

- Giá trị riêng $\lambda = -1$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -4x \end{cases}$ $v = (x,3x,-4x) = x(1,3,-4)$ chọn $e'_1 = (1,3,-4)$

- Giá trị riêng $\lambda = 1$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2x \end{cases}$ $v = (x, x, -2x) = x(1,1,-2)$ chọn $e'_2 = (1,1,-2)$

- Giá trị riêng $\lambda = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = \dfrac{-4}{3}x \end{cases}$$

$$v = \left(x, -x, \frac{-4}{3}x\right) = \frac{x}{3}(3,-3,-4)$$ chọn $e'_3 = (3,-3,-4)$

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

$e'_1 = (1,3,-4)$ $e'_2 = (1,1,-2)$ $e'_3 = (3,-3,-4)$

Ma trận chuyển cơ sở $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

Ma trận chéo $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ví dụ 4.28 Xét tự đồng cấu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, z)$$

Ma trận chính tắc $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Giá trị riêng $\lambda = 5$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$v = (-y, y, 0) = y(-1,1,0)$ chọn $e'_1 = (-1,1,0)$

Giá trị riêng $\lambda = 1$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với phương trình $x - y = 0;$ z tuỳ ý

$$v = (x, x, z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)$$

chọn $e'_2 = (1,1,0)$ $e'_3 = (0,0,1)$. $\dim V_{\lambda_i} = m_i;\ i = 1,2$

nên chéo hóa được. Chọn cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A' = [f]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ 4.29

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1-\lambda & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1$ (kép) và $\lambda_2 = 3$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1$ (kép) và $\lambda_2 = 3$

Giá trị riêng $\lambda = -1$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

hệ có nghiệm $\begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow v = (z, 2z, z) = z(1,2,1)$

Không gian riêng $V_{\lambda_1} = \{z(1,2,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $\dim V_{\lambda_1} = 1 < 2$

Vì vậy ma trận không chéo hoá được

4.3. Giới thiệu về ứng dụng

4.3.1. ỨNG DỤNG VÀO MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG DÂN SỐ

- **a. Mô hình Leslie (1945):** Mô tả sự tăng trưởng dân số của nữ, được giả định là có tuổi thọ tối đa, trong đó dân số không bị di cư, phát triển trong một môi trường không giới hạn.
- Bước đầu tiên trong quy trình này là nhóm dân số thành các nhóm tuổi có thời gian bằng nhau. Ví dụ: nếu tuổi thọ tối đa của một thành viên là M năm, thì n khoảng thời gian bên dưới biểu thị các lớp tuổi.

- $\left[0, \frac{M}{n}\right)$: lớp tuổi thứ nhất.
- $\left[\frac{M}{n}, \frac{2M}{n}\right)$: lớp tuổi thứ hai.
- ……….
- $\left[\frac{(n-1)M}{n}, M\right]$: lớp tuổi thứ n.

Ma trận phân phối tuổi là ma trận

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Với x_i là số lượng phụ nữ ở lớp tuổi thứ i

- **Định nghĩa**: Ma trận L có dạng sau đây được gọi là ma trận Leslie:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó các b_i là các tham số tuổi, s_i là tham số sống, cụ thể:

- b_i là số lượng phụ nữ trung bình được sinh ra bởi một phụ nữ trong lớp thứ i. Do đó $b_i > 0$.
- s_i là xác suất để một thành viên của lớp tuổi thứ i sẽ sống sót để trở thành thành viên của lớp $i+1$ tuổi là s_i trong một chu kỳ $\frac{M}{n}$ năm. Do đó $0 \le s_i \le 1$.
- Phần tử ở hàng i cột j của ma trận Leslie cho biết có bao nhiêu cá nhân sẽ ở trong độ tuổi i ở bước thời gian tiếp theo đối với mỗi cá nhân trong giai đoạn j. Tại mỗi bước thời gian, vectơ tổng được nhân với ma trận Leslie để tạo ra vectơ tổng thể cho bước thời gian tiếp theo.

Tính chất của ma trận Leslie:

Định lý: ***Mỗi ma trận Leslie có một giá trị riêng dương duy nhất và một vec tơ riêng tương ứng có các thành phần đều dương.***

Từ các quan sát rằng x_0 tại thời điểm $t+1$ chỉ đơn giản là tổng của tất cả các phụ nữ được sinh ra từ bước thời gian trước đó và các phụ nữ còn sống đến thời điểm $t+1$ là các sinh vật có xác suất sống sót tại thời điểm t với xác suất s_k. Ta được $x_{k+1} = s_k x_k$. Ta có đẳng thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_t$$

hay $\quad X_{t+1} = LX_t$

suy ra $\quad X_{t+1} = L^t X_0$

Vậy nếu muốn biết véc tơ của sự phong phú về độ tuổi trong bất kỳ năm nào, ta chỉ cần nhân với ma trận Leslie một số lần thích hợp.

Ví dụ (Mô hình tăng trưởng dân số)

Một quần thể thỏ có các đặc điểm dưới đây.

a) Một nửa số thỏ sống sót qua năm đầu tiên. Trong số đó, một nửa sống sót qua năm thứ hai. Tuổi thọ tối đa là 3 năm.

b) Trong năm đầu tiên, những con thỏ không sinh con. Số lượng trung bình của con cái là 6 trong năm thứ hai và 8 trong năm thứ ba.

Đàn thỏ (dân số) lúc này gồm 24 con thỏ ở lứa tuổi thứ nhất, 24 con ở lứa tuổi thứ hai, và 20 thuộc lứa tuổi thứ ba. Hỏi trong 1 năm có bao nhiêu con thỏ ở mỗi lớp tuổi?

Giải: Vec tơ phân phối tuổi hiện tại là $X = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix}$.

Ý nghĩa:

- $x_1 = 24$ là số lượng thỏ có tuổi $0 \le tuoi < 1$.
- $x_2 = 24$ là số lượng thỏ có tuổi $1 \le tuoi < 2$.
- $x_3 = 20$ là số lượng thỏ có tuổi $2 \le tuoi < 3$.

Ma trận Leslie là $L = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$.

Sau một năm, vec tơ phân phối tuổi sẽ là:

$$X_2 = LX_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 304 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Kết luận: Sau 1 năm, có 304 con thỏ ở lứa tuổi thứ nhất, 12 con thỏ ở lứa tuổi thứ hai và 12 con thỏ ở lứa tuổi thứ ba.

73

b. Tăng trưởng ổn định

Ví dụ: Tìm vec tơ phân phối tuổi ổn định trong ví dụ trên.

Để giải bài toán này, ta cần tìm giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận Leslie, tức là tìm λ và X sao cho $LX = \lambda X$. Ta giải phương trình đặc trưng:

$$\det(L - \lambda I) = (\lambda + 1)^2 (2 - \lambda) = 0.$$

Hai nghiệm là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Chọn giá trị dương là 2. Giải hệ $(L - 2I)X = 0$ ta được $X = \begin{bmatrix} 16t \\ 4t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Từ đây kéo theo tỷ lệ ổn định của quần thể là 16:4:1.

74

4.3.2. ỨNG DỤNG VÀO MÔ HÌNH HỒI QUY TUYẾN TÍNH ĐƠN GIẢN

a. Bài toán hồi quy tuyến tính

Mô hình hồi quy tuyến tính xuất hiện nhiều trong thống kê dữ liệu, kinh tế lượng, học máy… nhằm để khảo sát về sự thay đổi của một đại lượng theo một đại lượng khác thể hiện bởi một phương trình toán học. Francis Galton (1886), đã khẳng định rằng có một xu hướng về chiều cao của những đứa trẻ do cha mẹ cao không bình thường hoặc thấp không bình thường sinh ra. Xu hướng đó chi phối bởi phương trình toán học.

Bài toán hồi quy tuyến tính được phát biểu như sau: Giả sử ta có một bộ dữ liệu $\{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, N$ cho trước, tìm một hàm tuyến tính xấp xỉ "tốt nhất" của bộ dữ liệu trên.

Ví dụ: Xác định một đường thẳng phù hợp nhất với các điểm $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(5,6)$ trong hai đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = 1,2x$.

75

b. Phương pháp bình phương tối thiểu (Gauss)

Định nghĩa: Cho bộ dữ liệu 2 chiều (tức bộ điểm) $\{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, N$ trong mặt phẳng. Đường thẳng xác định bởi hàm tuyến tính $f(x) = a_1 x + a_0$, sao cho tổng bình phương các sai số $\sum_{i=1}^{N} [y_i - f(x_i)]^2$, được gọi là đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu.

Để tìm đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu, ta xét hệ sau:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + [y_1 - f(x_1)] \\ y_2 = f(x_2) + [y_2 - f(x_2)] \\ \vdots \\ y_N = f(x_N) + [y_N - f(x_N)] \end{cases}$$

$$e_i = [y_i - f(x_i)]$$

chính là các sai số xấp xỉ. Ta viết lại hệ trên dưới dạng:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_0 + [y_1 - f(x_1)] \\ y_2 = a_1 x_2 + a_0 + [y_2 - f(x_2)] \\ \vdots \\ y_N = a_1 x_N + a_0 + [y_N - f(x_N)] \end{cases}$$

76

Đặt

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ N phương trình tuyến tính trên trở thành dạng ma trận như sau

$$Y=XA+E$$

Định lý: *Với mô hình hồi quy như trên, xác định bởi hệ phương trình dạng ma trận Y=XA+E thì đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu có các hệ số được xác định bởi công thức*

$$A=(X^TX)^{-1}X^TY$$

trong đó tổng bình phương các sai số là E^TE. x_i *phân biệt.*

Ví dụ: Xác định đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu của các điểm (1,1), (2,2), (3,4), (4,4), (4,6).

Ta có các ma trận là:

$$Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A=(X^TX)^{-1}X^TY=\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ 63 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,2 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

Vậy đường hồi quy bình phương tối thiểu của bộ điểm trên là

$$y=1,2x-0,2$$