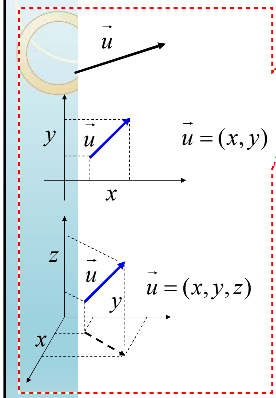



**Không gian véc tơ**

Khái niệm không gian véc tơ có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ ....

Cuối thế kỷ 17 Descartes đã đề xuất phương pháp tọa độ để giải quyết các bài toán hình học. Với phương pháp này mỗi véc tơ trong mặt phẳng được đồng nhất với một cặp số là hoành độ và tung độ còn véc tơ trong không gian được đồng nhất với bộ ba số

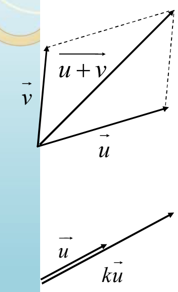
Khái niệm không gian véc tơ 4 chiều được Einstein (Anh-xtanh) sử dụng trong thuyết tương đối







## 3.1 KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ




$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$\vec{u} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{u} = \vec{u}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(k+h)\vec{u} = k\vec{u} + h\vec{u}$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(kh)\vec{u} = k(h\vec{u})$$

$$1\vec{u} = \vec{u}$$







### 3.1.1. Định nghĩa và các ví dụ

Giả sử $V$ là tập khác $\varnothing$, $\mathbb{R}$ là tập số thực.

$V$ được gọi là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ nếu có hai phép toán:

- Phép toán trong

$$\forall u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$$

- Phép toán ngoài

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V \Rightarrow \alpha u \in V$$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



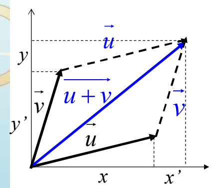




- $V_1$ $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $V_2$ Có $\mathbf{0} \in V$ sao cho $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$
- $V_3$ Với mỗi $u \in V$ có $-u \in V$ sao cho $u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}$
- $V_4$ $u + v = v + u$
- $V_5$ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $V_6$ $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- $V_7$ $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- $V_8$ $1.u = u$

$V$ được gọi là không gian véc tơ thực.

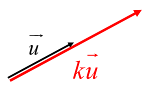
Các phần tử của $V$ được gọi là các véc tơ



$$\vec{u} = (x, y, z)$$

$$\vec{v} = (x', y', z')$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$$



$$k\vec{u} = (kx, ky, kz)$$

Vậy $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$$k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$



5



**Ví dụ 3.1** Giả sử $\mathbb{R}$ là tập số thực,

xét $\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n} \right\}$

Ta định nghĩa: $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$

$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0, ..., 0)}_{n \text{ phần tử}}$$

phần tử đối của $x = (x_1, \dots, x_n)$ là $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$



6



$\forall x = (x_1, ..., x_n); y = (y_1, ..., y_n); z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- **V1** $x + (y + z) = (x_1, ..., x_n) + \big((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)\big)$
  $= \big(x_1 + (y_1 + z_1), ..., x_n + (y_n + z_n)\big) = \big((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n\big)$
  $= \big((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\big) + (z_1, ..., z_n) = (x + y) + z$
- **V2** $x + \mathbf{0} = (x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0) = (x_1, ..., x_n) = x$
- **V3** $(x_1, ..., x_n) + (-x_1, ..., -x_n) = (0, ..., 0) = \mathbf{0}$
- **V4** $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = y + x$
- **V5** $(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)(x_1, ..., x_n) = \big((\alpha + \beta)x_1, ..., (\alpha + \beta)x_n\big) = \alpha x + \beta x$
- **V6** $\alpha(x + y) = \alpha(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, ..., \alpha x_n + \alpha y_n) = \alpha x + \alpha y$
- **V7** $(\alpha\beta)x = (\alpha\beta)(x_1, ..., x_n) = \big((\alpha\beta)x_1, ..., (\alpha\beta)x_n\big) = \alpha\big(\beta x_1, ..., \beta x_n\big) = \alpha(\beta x)$
- **V8** $1x = 1(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n) = x$



7



**Ví dụ 3.2**

Ký hiệu $\mathbb{R}^X$ là tập các hàm số xác định trên tập con $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$

Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \ (\alpha f)(t) = \alpha f(t), \ \forall t \in X$$

Với hai phép toán này $\mathbb{R}^X$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là $\mathbf{0}(t) = 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R}$

**Ví dụ 3.3**

Gọi $\mathbf{P}_n$ là tập các đa thức bậc $\leq n$, $n$ là số nguyên dương cho trước:

$$\mathbf{P}_n = \left\{ p \middle| p = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n ; a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 3.2 thì $\mathbf{P}_n$ là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\mathbf{0}$



8

**Ví dụ 3.4**

Gọi $\mathbf{P}$ là tập các đa thức

$$\mathbf{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}_n = \left\{ p \middle| p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng hai đa thức và phép nhân với một số với đa thức theo nghĩa thông thường ở Ví dụ 3.3 thì $\mathbf{P}$ là không gian véc tơ và $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.







## 3.1.2 Tính chất cơ bản của không gian vec tơ

1) Véc tơ **0** là duy nhất
   véc tơ đối $-u$ của $u$ với mọi $u \in V$ là duy nhất

2) Có luật giản ước: $u + v = u + w \Rightarrow v = w$.

3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.

4) Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.







Từ định nghĩa của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các phép toán sau

1) Ta có thể định nghĩa phép trừ hai véc tơ

$$u - v := u + (-v)$$

$$w = u - v \Leftrightarrow u = w + v$$

2) Do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = (u_1 + \ldots + u_{n-1}) + u_n$$

Tương tự

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n$$

biểu thức này được gọi là ***một tổ hợp tuyến tính*** của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$







## 3.1.3 Không gian véc tơ con

### a. Định nghĩa và ví dụ

Giả sử tập con $W \neq \varnothing$ của $V$ thỏa mãn tính chất:

$$\forall u, v \in W : u + v \in W \quad (3.1)$$

$$\forall u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha u \in W \quad (3.2)$$

Khi đó có thể xác định 2 phép toán từ không gian $V$ thu hẹp vào $W$

$$\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W; \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Rightarrow \alpha u \in W.$$

Hai phép toán này thỏa mãn các điều kiện $V_1$, $V_4$, $V_5$, $V_6$, $V_7$, $V_8$ của không gian véc tơ. Ngoài ra vì $W \neq \varnothing$ do đó tồn tại ít nhất véc tơ $u \in W$, suy ra $\mathbf{0} = 0u \in W$ và $\forall u \in W : -u = (-1)u \in W$.

CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

- $V_1$ $(u+v)+w=u+(v+w)$
- $V_4$ $u+v=v+u$
- $V_5$ $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
- $V_6$ $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
- $V_7$ $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$
- $V_8$ $\forall u\in W: 1u=u$

Hai phép toán này thỏa mãn các điều kiện $V_1$, $V_4$, $V_5$, $V_6$, $V_7$, $V_8$ của không gian véc tơ.

Ngoài ra vì $W\neq\varnothing$ do đó tồn tại ít nhất véc tơ $u\in W$, vậy $\mathbf{0}=0u\in W$

- $V_2$ $\forall u\in W: u+\mathbf{0}=u$
- $V_3$ Với mọi $u\in W$; $-u=(-1)u\in W$: $u+(-u)=\mathbf{0}$

Vậy $W$ thỏa mãn các tiên đề $V_1 - V_8$ của không gian véc tơ và do đó $W$ là một không gian vec tơ.





CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

**Định nghĩa 3.2**

Tập con $W\neq\varnothing$ của KGVT $V$ thỏa mãn thỏa mãn hai điều kiện dưới đây được gọi là không gian véc tơ con của $V$ (hay nói tắt: không gian con của $V$):

$$\forall u,v\in W: u+v\in W \quad (3.1)$$

$$\forall u\in W, \forall\alpha\in\mathbb{R}: \alpha u\in W \quad (3.2)$$

**Định lý 3.1:**

*Giả sử W là tập con sao cho $W\neq\varnothing$ của $V$, khi đó $W$ là không gian véc tơ con của $V$ khi và chỉ khi:*

$$\forall u,v\in W, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha u+\beta v\in W$$

Tập $\{\mathbf{0}\}$ chỉ gồm véc tơ không là không gian véc tơ con nhỏ nhất của $V$ và $V$ là không gian véc tơ con lớn nhất của $V$.





CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

**Ví dụ 3.6**

$$W_1=\{u=(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$$
$$W_2=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x-3y+4z=0\}$$

là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

$$W_3=\{u=(x,y,1)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$$
$$W_4=\{u=(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 1\}\subset\mathbb{R}^2$$

không là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.





CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

**b. Không gian con sinh bởi một họ véc tơ**

**Định lý 3.2:**

Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của $V$ thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của $V$.

Từ Định lý 2.3 suy ra rằng với mọi tập con $S$ bất kỳ của $V$ luôn tồn tại không gian con $W$ bé nhất của $V$ chứa $S$.

$W$ là giao của tất cả các không gian con của $V$ chứa $S$

**Định nghĩa 3.3**

Không gian $W$ bé nhất chứa $S$ được gọi là *không gian sinh bởi hệ* $S$, ký hiệu $W=\operatorname{span} S$, và $S$ *được gọi là hệ sinh* của $W$

Khi $S$ hữu hạn thì $W$ được gọi là không gian véc tơ *hữu hạn sinh*

**Định lý 3.3**

$W = \text{span}\, S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của $S$.

1) Trường hợp $S$ hữu hạn: $S = \{v_1, ..., v_n\}$

$$W = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Vậy $u \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$

2) Trường hợp $S$ vô hạn tập $W$ có dạng

$$W = \left\{\alpha_1 v_{i_1} + ... + \alpha_n v_{i_n} \,\middle|\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}; v_{i_1}, ..., v_{i_n} \in S; n = 1, 2, ...\right\}$$

$$u \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}; v_{i_1}, ..., v_{i_n} \in S : u = \alpha_1 v_{i_1} + ... + \alpha_n v_{i_n}$$







**Ví dụ 3.10**

Tìm hệ sinh của không gian vec tơ con

$$W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$u \in W_1 \Leftrightarrow u = (x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$

$\Leftrightarrow u = xe_1 + ye_2$

Vậy $W_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}$







**Ví dụ 3.10**

Không gian véc tơ con $W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$ có tính chất $u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = 3/2y - 2z$

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2}y - 2z, y, z\right) = \frac{y}{2}(3,2,0) + z(-2,0,1)$$

Xét $v_1 = (3,2,0),\ v_2 = (-2,0,1) \in W_2$, ta được $W_2 = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

Ta cũng có

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2}y - 2z, y, z\right) = y\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) - z(2, 0, -1)$$

Do đó $W_2 = \text{span}\{v'_1, v'_2\};\ v'_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right), v'_2 = (2, 0, -1)$

Như vậy một không gian véc tơ có thể được sinh bởi nhiều hệ sinh khác nhau







## 3.2 CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VEC TƠ

### 3.2.1 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Khái niệm phụ thuộc tuyến tính khái quát hóa từ khái niệm 2 véc tơ cùng phương và 3 véc tơ đồng phẳng

**Định nghĩa 3.7:** Cho hệ $n$ véc tơ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ của $V$ (các véc tơ này có thể trùng nhau)

Hệ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ***phụ thuộc tuyến tính*** khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng $0$ sao cho

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$$

Hệ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là ***hệ độc lập tuyến tính***

Vậy hệ $S$ độc lập tuyến tính nếu

$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ thì $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

**Ví dụ 3.11** $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$

Hệ $\{e_1,e_2,e_3\}$ là độc lập, vì nếu $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=\mathbf{0}$

thì $\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

**Ví dụ 3.12**

- Hệ chứa véc tơ $\mathbf{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính
- Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1=\alpha u_2$ hoặc $u_2=\alpha u_1$
- Xét các véc tơ $u_1=(4,-2,8)$, $u_2=(-6,3,-12)$, $u_3=(3,-2,5)$

  Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ phụ thuộc tuyến tính ($u_2=-3/2u_1$)

  và hệ $\{u_1,u_3\}$ độc lập tuyến tính







**Định lý 3.4**

1) Nếu $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính và $u=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ thì cách viết này là duy nhất.

2) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính

3) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại

4) Giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $u$ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$, khi đó ta có thể biểu diễn duy nhất $u=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$







## 3.2.2. Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

### a. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

**Định nghĩa 3.8:** Cho hệ $S$ các véc tơ của không gian véc tơ $V$. Hệ con $S'$ của hệ $S$ được gọi là *hệ con độc lập tuyến tính tối đại* của $S$ nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) $S'$ là hệ độc lập tuyến tính

2) Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của $S$ vào $S'$ thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính *(tối đại)*

Nói riêng hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $V$ nếu hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập và nếu thêm bất kỳ véc tơ khác của $V$ ta có hệ mới là phụ thuộc.







**Định lý 3.5**

1) Nếu $\boldsymbol{S}'$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\boldsymbol{S}$ thì mọi véc tơ của $\boldsymbol{S}$ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của $\boldsymbol{S}'$ và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất

2) Giả sử $\{v_1,\dots,v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn $\boldsymbol{S}$. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\boldsymbol{S}$ chứa $\{v_1,\dots,v_n\}$.

**Ví dụ** Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại hệ véc tơ

$$u_1 = (3,1,4),\ u_2 = (2,-3,5),\ u_3 = (5,-2,9),\ u_4 = (1,4,-1)$$

- Hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ độc lập vì không tỉ lệ
- Có thể kiểm tra được: $u_3 = u_1 + u_2;\ \ u_4 = u_1 - u_2$

$$u_3 = xu_1 + yu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-3y=-2 \\ 4x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad u_4 = xu_1 + yu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-3y=4 \\ 4x+5y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$

Tương tự có thể kiểm tra được $\{u_1,u_3\}$, $\{u_1,u_4\}$, $\{u_2,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ cũng là các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$



25

CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

## b. Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

**Định lý 3.7:**

Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn $\boldsymbol{S}$ đều có số phần tử bằng nhau

**Định nghĩa**

Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\boldsymbol{S}$ được gọi là ***hạng*** (rank) của $\boldsymbol{S}$, ký hiệu $r(\boldsymbol{S})$.

Qui ước hệ chỉ có véc tơ $\{\mathbf{0}\}$ có hạng là $0$



26

CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

**Ví dụ 3.13** Hệ véc tơ

$$u_1 = (3,1,4),\ u_2 = (2,-3,5),\ u_3 = (5,-2,9),\ u_4 = (1,4,-1)$$

Các hệ con độc lập tuyến tính tối đại

$$\{u_1,u_2\} \quad \{u_1,u_3\} \quad \{u_1,u_4\}$$
$$\{u_2,u_4\} \quad \{u_2,u_3\}$$
$$\{u_3,u_4\}$$

Các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có 2 phần tử

Vậy có hạng bằng 2



27

CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

**Nhận xét:**

Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ dạng bậc thang mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó**.**

Cách 2: Áp dụng tính chất 3.5 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \mathbf{0}$,
2. Giả sử $v_{i_j} \neq \mathbf{0}$, loại các véc tơ $v_i$ tỉ lệ với $v_{i_j}$,
3. Giả sử $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ độc lập, khi đó $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k},v_j\}$ độc lập khi và chỉ khi $v_j$ không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$.
4. Tiếp tục quá trình này cuối cùng tìm được hệ con độc lập tuyến tính tối đại



28

### 3.2.3 Cơ sở, số chiều của không gian véc tơ

**Định nghĩa 3.10:** Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của $V$ được gọi là ***một cơ sở*** của $V$

**Định lý 3.8**

*Giả sử $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một hệ các véc tơ của $V$. Các mệnh đề sau là tương đương*

(i) Hệ $\{e_1,\ldots,e_n\}$ là một cơ sở của $V$

(ii) Hệ $\{e_1,\ldots,e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của $V$

(iii) Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất

$$u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$$

**Định nghĩa 3.11:** $(x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là ***toạ độ của véc tơ*** $u$ trong cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$

Ký hiệu $(u)_{\mathscr{B}} = (x_1,\ldots,x_n)$ $\mathscr{B} = \{e_1,\ldots,e_n\}$







**Ví dụ 3.14** Hai hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}, \mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2\}$

với $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ và $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (4,3)$

là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$

$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$$

$$u = (x,y) = x'e'_1 + y'e'_2 = x'(1,1) + y'(4,3) = (x'+4y', x'+3y')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'+4y' = x \\ x'+3y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4y-3x \\ y' = x-y \end{cases}$$

Vậy $(u)_{\mathscr{B}} = (x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'} = (4y-3x, x-y)$

Chẳng hạn $u = (3,1);\ (u)_{\mathscr{B}'} = (-5,2)$

$\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ được gọi là cơ sở chính tắc của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$







**Định lý 3.9**

*Giả sử $V$ là không gian hữu hạn sinh và $\{v_1, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của $V$. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ là một cơ sở của $V$*

**Hệ quả 3.10:** *Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.*

**Định lý 3.11:** *Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.*

**Định nghĩa 3.11:** Số véc tơ của một cơ sở của $V$ được gọi là số chiều của $V$.

Ký hiệu $\dim V$ Quy ước $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$







**Ví dụ 3.15** Trong không gian $\mathbb{R}^n$ hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1,\ldots,e_n\}$

$$e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,1)$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc

Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$

**Ví dụ 3.16**

Hệ $\mathscr{B} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$

được gọi là cơ sở chính tắc

Vậy $\dim \mathbf{P}_n = n+1$

**Chú ý:**

Không gian $\mathbf{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ *không hữu hạn sinh*

Thật vậy, hệ $\{1, t, t^2, ....\}$ có vô hạn véc tơ và độc lập tuyến tính nên không thể là hữu hạn sinh

**Định lý 3.12**

Giả sử $\dim V = n$ và $S = \{v_1, ..., v_m\}$ là hệ $m$ véc tơ của $V$. Khi đó:

(i) Nếu hệ $S$ độc lập tuyến tính thì $m \le n$

(ii) Nếu hệ $S$ là hệ sinh của thì $m \ge n$

(iii) Nếu $m = n$ thì hệ $S$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $S$ là hệ sinh







**Định lý 3.13**

*Giả sử $\boldsymbol{S}$ là hệ hữu hạn các véc tơ của $V$, $\boldsymbol{S}_0$ là một hệ con của $\boldsymbol{S}$. Đặt $\boldsymbol{W} = span\boldsymbol{S}$. Khi đó:*

*1) Hệ $\boldsymbol{S}_0$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\boldsymbol{S}$ khi và chỉ khi $\boldsymbol{S}_0$ là một cơ sở của $W$, do đó $r(\boldsymbol{S}) = \dim \boldsymbol{W}$.*

*2) Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ $\boldsymbol{S}$:*

- *Nhân một số khác $0$ với một véc tơ của hệ $\boldsymbol{S}$*
- *Cộng vào một véc tơ của hệ $\boldsymbol{S}$ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của $\boldsymbol{S}$; thì hệ $\boldsymbol{S}$ biến thành hệ $\boldsymbol{S}'$*

*Đặt $W' = span\boldsymbol{S}'$ thì $W = W'$, do đó $r(\boldsymbol{S}) = r(\boldsymbol{S}') = \dim W$.*







## 3.2.4 Hệ thuần nhất, không gian nghiệm

**Định lý 3.17:** *Xét hệ phương trình*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .............................................. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*Tập hợp nghiệm W của hệ thuần nhất* là *không gian véc tơ con của* $\mathbb{R}^n$ *với số chiều là dimW = n - $r(A)$.*

**Định nghĩa:** Cơ sở của không gian nghiệm của hệ thuần nhất được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ.







**Ví dụ**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad x_3, x_4 \text{ tùy ý}$$

Vì $r(A) = 2 < 4$ nên tập hợp nghiệm của hệ phương trình là không gian véc tơ con $2$ chiều của $\mathbb{R}^4$.

## 3.3 MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

### 3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

Giả sử $V$ là không gian $n$ chiều với một cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của $V$ có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \;, j = 1, \dots, m$$

Khi đó ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$

có các cột là tọa độ của các véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ngược lại, với ma trận $A$ cỡ $n \times m$ cho trước thì ta có hệ $m$ véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của $A$.







Nếu $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

ta ký hiệu $(u)_{\mathscr{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad [u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

**Ví dụ 3.20**

Xét hệ véc tơ $v_1 = (4,1,3,-2),\ v_2 = (1,2,-3,2),\ v_3 = (x,y,z,t)$

Có ma trận trong cơ sở chính tắc $\begin{bmatrix} 4 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \\ -2 & 2 & t \end{bmatrix}$







### 3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ là hai cơ sở của $V$

Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$*

Nghĩa là nếu $e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \;, j = 1, \dots, n$ thì $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$.

Ta có *công thức đổi tọa độ*

$$\left[x_i\right]_{n\times 1} = \left[t_{ij}\right]_{n\times n} \left[x'_j\right]_{n\times 1} \qquad [u]_{\mathscr{B}} = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [u]_{\mathscr{B}'}$$







Nếu $A, A'$ lần lượt là ma trận của $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$ thì

$$A = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} A'$$

**Ví dụ 3.21**

Hai hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}, \mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2\}$

với $e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ và $e'_1 = (1,1),\ e'_2 = (4,3)$

là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

$$u = (x,y) = xe_1 + ye_2 = (4y - 3x)e'_1 + (x - y)e'_2$$

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'} = (4y - 3x, x - y)$$

$\mathscr{B}=\{e_1=(1,0),\, e_2=(0,1)\}$ $\quad \mathscr{B}'=\{e'_1=(1,1),\, e'_2=(4,3)\}$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ là $T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

do đó $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4y-3x\\ x-y\end{bmatrix}$ $\quad (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y)$

$$(u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y)\Rightarrow (e_1)_{\mathscr{B}'}=(-3,1);\,(e_2)_{\mathscr{B}'}=(4,-1)$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$ là $T'=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

do đó $\begin{bmatrix}4y-3x\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$





**BÀI KIỂM TRA TOÁN CAO CẤP 2**