Khi khảo sát các mô hình tuyến tính thường dẫn đến giải các ***hệ phương trình tuyến tính***

Đối với mô hình phi tuyến người ta giải quyết bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế

Hệ phương trình tuyến tính đã được biết đến rất sớm

Ở Trung Quốc người ta tìm thấy một cuốn sách có khoảng từ năm 500 trước công nguyên, trong đó có những chỉ dẫn về việc dùng một bàn tính để giải các hệ phương trình tuyến tính qua các ví dụ cụ thể

Phương pháp giải này chính là thuật toán khử Gauss

Ở châu Âu thuật toán này đã được mô tả trong công trình của Buteo (Pháp) năm 1550, trước Gauss hơn hai thế kỷ

1

Một phương pháp khác để giải hệ phương trình tuyến tính là sử dụng định thức của Cramer.

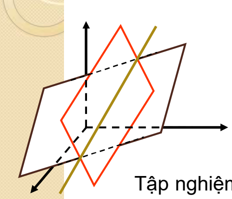
Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết.

Tuy nhiên trong thực tế thường cần khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời với số ẩn tương ứng. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nổi hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp

Mùa hè năm 1949, Giáo sư Wassily Leontief trường Đại học HarVard đã gửi đến Trung tâm tính toán của trường Đại học Mark II đề nghị giải hệ phương trình tuyến tính gồm 500 phương trình với 500 ẩn biểu diễn các chỉ tiêu kinh tế của Mỹ. Mark II là một trong những trung tâm máy tính điện tử lớn nhất thời bấy giờ cũng không giải quyết được. Leontief buộc phải đưa bài toán về hệ 45 phương trình với 45 ẩn. Với kết quả này Leontief nhận được giải Nobel kinh tế năm 1973

2

2.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH



Trong không gian xét hệ trục tọa độ $Oxyz$

Tập hợp các điểm có tọa độ (x,y,z) thỏa mãn phương trình

$$Ax + By + Cz = D$$

là một mặt phẳng

Tập nghiệm của hệ

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

là giao của hai mặt phẳng

Tập nghiệm của hệ

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

là giao của ba mặt phẳng

3

2.1.1 Các dạng của hệ phương trình tuyến tính

a. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn ,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; $i = 1,\ldots, m$; $j = 1,\ldots, n$.

4

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là *thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho khi thay vào hệ phương trình ta có các đẳng thức

Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ

Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau

b. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Xét đẳng thức

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A được gọi là ma trận hệ số, B ma trận vế sau và X ma trận ẩn

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận $AX = B$

c. Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$

và véc tơ vế sau $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

thì hệ phương trình được viết dưới dạng véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = b$$

Ví dụ Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Hệ phương trình viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{Hoặc} \quad x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Xét các véc tơ:

$v_1 = (2,4,8)$, $v_2 = (2,3,5)$, $v_3 = (-1,-1,-3)$, $v_4 = (1,2,4)$; $b = (4,6,12)$.

Hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12)$$

HAI CÂU HỎI CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN VỀ HỆ PT TUYẾN TÍNH

1. Khi nào hệ tồn tại nghiệm?
2. Phương pháp giải hệ như thế nào?

2.1.2 Định lý tồn tại nghiệm

Định lý 2.1: (Kronecker-Capelli)

Hệ phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\tilde{A})$

trong đó $\tilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ví dụ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận bổ sung cột cuối

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Hạng $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ do đó hệ phương trình có nghiệm

2.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.2.1. Phương pháp Cramer và pp ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 2.2: Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A không suy biến được gọi là hệ Cramer.

Định lý 2.2: *Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm*

Hệ Cramer n ẩn $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , i = 1,\dots,n$

có nghiệm $x_i = D_i / D \ ; i = 1,\dots,n$

Trong đó $D = \det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots,v_n\}$

$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{i-1},b,v_{i+1},\dots,v_n\}$

D_i *là định thức gồm các cột trong ma trận hệ số của hệ phương trình nhưng cột thứ i được thay bởi cột vế sau.*

Ví dụ: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44$$

Do đó hệ có nghiệm $x = \dfrac{66}{22} = 3,\ y = \dfrac{-22}{22} = -1,\ z = \dfrac{44}{22} = 2$

Ví dụ: Giải và biện luận theo tham số λ hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$

- Khi $\lambda \neq -3,\ \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất
  $$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}$$
- Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$ Hệ phương trình có vô số nghiệm
  $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý
- Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4,\ r(\tilde{A}) = 4$ hệ vô nghiệm

Phương pháp ma trận nghịch đảo

Định lý 2.3

Hệ Cramer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ;i = 1,\dots,n$

với các ma trận tương ứng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm dạng ma trận $X = A^{-1}B$

Ví dụ Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 + 8x_3 = c \end{cases}$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ Có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Vậy hệ có nghiệm

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a + 16b + 9c \\ 13a - 5b - 3c \\ 5a - 2b - c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

2.2.2. Phương pháp khử Gauss

Khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ

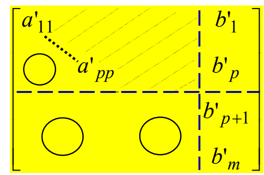
- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \ldots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i & \text{Phương trình thứ } i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j & \text{Phương trình thứ } j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

thì sẽ được hệ mới tương đương

17

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp để đưa hệ phương trình về hệ tương đương với ma trận bổ sung của hệ mới có dạng



trong đó $a'_{11} \ldots a'_{pp} \neq 0$

18

- Nếu một trong các $b'_{p+1}, \ldots, b'_m$ khác 0 thì có phương trình vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm
- Nếu $b'_{p+1} = \ldots = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{pp}x'_p + \ldots + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases}$$

Ta được các nghiệm $x'_1, \ldots, x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$

19

Có thể nhận thấy rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số của các phương trình

Vì vậy khi thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung của hệ để đưa về ma trận có dạng cần tìm, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình

Ví dụ Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}$

20

Ví dụ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ví dụ Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

♦ $m = 0$: hệ vô nghiệm; ♦ $m \neq 0$: hệ có vô số nghiệm

$$x_4 = \frac{1}{m},\ x_2 = \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3,\ x_1 = \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3;\ x_3 \text{ tùy ý}$$

2.3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ít nhất nghiệm tầm thường

$$x_1 = \ldots = x_n = 0$$

Nhận xét

Vế sau của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ

Ví dụ Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad x_3, x_4 \text{ tùy ý}$$

2.3.1 Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường

Định lý 2.4 *Xét hệ phương trình*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n$.

Hệ quả 2.5

Hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$. Hơn nữa, nếu hệ có số ẩn bằng số phương trình thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường nếu và chỉ nếu $\det A \neq 0$.

Định lý 2.6

Giả sử $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ *là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (*)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó $(x_1, ..., x_n)$ *là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (**)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (**)$$

khi và chỉ khi

$(x_1 + \overline{x}_1, ..., x_n + \overline{x}_n)$ *là nghiệm của hệ phương trình (*).*

2.4 Một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính

2.4.1 Ứng dụng vào mô hình cân bằng thị trường

a. Thị trường một loại hàng hoá

Q_d Lượng cầu của hàng hoá

Q_s Lượng cung của hàng hoá

P Giá cả của hàng hoá

Lượng cầu dư thừa $E = Q_d - Q_s$

Điều kiện cân bằng:

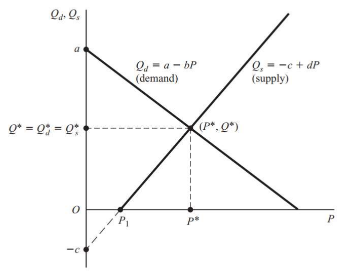
$$E = Q_d - Q_s = 0$$

Trong mô hình cân bằng tĩnh, bài toán tiêu chuẩn là tìm tập giá trị của các biến nội sinh thỏa mãn điều kiện cân bằng của mô hình. Bởi vì một khi chúng ta đã xác định được những giá trị đó, thì trên thực tế chúng ta đã xác định được trạng thái cân bằng. Khi phân tích thị trường hàng hóa, các nhà kinh tế sử dụng hàm cung và hàm cầu thể hiện sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá hàng hóa (với tất cả các thông số kỹ thuật khác không thay đổi). Ta có công thức tương đương của các hàm cung và cầu có dạng sau:

$$Q_s = -c + dP; Q_d = a - bP \quad (a,b,c,d > 0)$$

Mô hình cân bằng thị trường có dạng:

$$E = Q_d - Q_s = 0$$



Giải hệ phương trình này, ta nhận được giá và sản lượng tại vị trí cân bằng, từ đó nhận được giá, hàm cung và hàm cầu cân bằng:

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d}; \overline{Q} = a - \frac{b(a+c)}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

b. Thị trường nhiều loại hàng hoá

Q_{di} Lượng cầu của hàng hoá thứ *i*

Q_{si} Lượng cung của hàng hoá thứ *i*

P_i Giá cả của hàng hoá thứ *i*

Lượng cầu dư thừa của hàng hoá thứ *i*:

$$E_i = Q_{di} - Q_{si}$$

Điều kiện cân bằng:

$$E_i = Q_{di} - Q_{si} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

Hàm cung và hàm cầu của hàng hoá thứ *i* có dạng

$$Q_{di} = Q_{di}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = a_{i0} + a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{in}P_n;$$
$$Q_{si} = Q_{si}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = b_{i0} + b_{i1}P_1 + b_{i2}P_2 + \ldots + b_{in}P_n;$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Từ điều kiện cân bằng, ta có

$$\begin{cases} Q_{si} = Q_{di}, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta nhận được bộ giá và sản lượng tại vị trí cân bằng

$$\overline{P} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n); \quad \overline{Q} = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n)$$

Ví dụ Xét hàm cung và hàm cầu của thị trường 2 loại hàng hoá như sau

$$Q_{s1} = -22 + 5P_1; Q_{d1} = 18 - P_1 + 2P_2,$$
$$Q_{s2} = -25 + 2P_2; Q_{d2} = 20 + 2P_1 - P_2.$$

Từ điều kiện cân bằng, ta có

$$\begin{cases} Q_{s1} = Q_{d1} \\ Q_{s2} = Q_{d2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -22 + 5P_1 = 18 - P_1 + 2P_2 \\ -25 + 2P_2 = 20 + 2P_1 - P_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6P_1 - 2P_2 = 40 \\ 2P_1 - 3P_2 = -45 \end{cases}$$

Giải hệ (theo pp Cramer hoặc ma trận nghịch đảo), ta thu được bộ giá cân bằng là:

$$\left(\overline{P}_1 = 15, \overline{P}_2 = 25\right)$$

Lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{d1} = \overline{Q}_{s1} = -22 + 5\overline{P}_1 = 53,$$
$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{d2} = \overline{Q}_{s2} = -25 + 2\overline{P}_2 = 25.$$

2.4.2 Mô hình Input-Output của Leontief

Leontief: "Mỗi ngành trong số n ngành trong một nền kinh tế nên sản xuất ở mức sản lượng nào, sao cho vừa đủ để đáp ứng tổng nhu cầu về sản phẩm đó?"

Giả thiết: 1. Mỗi ngành sản xuất một loại sản phẩm hàng hoá thuần nhất hoặc sản xuất một bộ hàng hoá theo một tỷ lệ nhất định. Trong trường hợp thứ hai, ta coi mỗi tổ hợp hàng hoá theo tỉ lệ cố định đó là một mặt hàng.

2. Các sản phẩm đầu vào của sản xuất trong phạm vi một ngành được sử dụng theo một tỉ lệ cố định.

Từ những phân tích trên, tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sẽ bao gồm:

1. Cầu trung gian từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất;
2. Cầu cuối cùng từ phía những người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, Nhà nước, các tổ chức xuất khẩu,...

Tổng cầu về sản phẩm hàng hóa của ngành $i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ xác định bởi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + b_i,$$

x_i là tổng cầu đối với hàng hoá của ngành *i*

x_{ik} là giá trị hàng hoá của ngành i mà ngành k cần sử dụng cho việc sản xuất (giá trị cầu trung gian)

b_i là giá trị hàng hoá của ngành i cần cho tiêu dùng và xuất khẩu (cầu cuối cùng).

CHƯƠNG 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Gọi a_{ik} là tỉ phần chi phí đầu vào của ngành k đối với sản phẩm của ngành i, khi đó ta có công thức:

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \quad (i,k = 1,2,\dots,n)$$

Chẳng hạn, $a_{ik} = 0,25$ nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị của mình thì ngành k đã phải chi trả 0,25 đồng để mua sản phẩm của ngành i nhằm phục vụ cho quá trình sản xuất.

Xét: $a_{ik}, 0 \le a_{ik} \le 1,$

là cố định đối với mỗi ngành sản xuất hay còn gọi là hệ số chi phí đầu vào của ma trận.

Ma trận $A = [a_{ik}]_{n\times n}$

được gọi là ma trận hệ số chi phí đầu vào

Ma trận $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận tổng cầu

Ma trận $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận tổng cung

Chú ý $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ Thay $x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k$

Ta có

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i$$
$$(i = 1,2,\dots,n)$$

33

CHƯƠNG 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Viết lại hệ dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

hay $X = AX + B$

suy ra $(I - A)X = B$

(I-A) ma trận Leontief

Phương trình này cho phép ta xác định tổng cầu đối với sản phẩm của tất cả các ngành sản xuất. Nếu (I-A) không suy biến thì ta có tổng cầu là

$$X = (I - A)^{-1} B$$

Trong đó ta có xấp xỉ

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$$

Ma trận $C = (I - A)^{-1}$ được gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ. Với ý nghĩa của các hệ số c_{ij} là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

Ví dụ: xem GT hoặc sách tham khảo.

34