1.1 MA TRẬN

Lý thuyết ***ma trận*** thực sự ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay

Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương và về các phép thế tuyến tính

Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801

Tên gọi ma trận (Matrix) được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850

Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858)

Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương

1

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

1.1 KHÁI NIỆM MA TRẬN

1.1.1 Định nghĩa, ví dụ

Một bảng số có m hàng n cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là một **ma trận cỡ $m \times n$**

a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j

Ma trận A được gọi là ma trận nguyên (thực, phức) nếu các phần tử a_{ij} là các số nguyên (số thực, số phức)

Nếu không chỉ rõ cụ thể thì ta xem A là ma trận thực

2

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Ma trận A cỡ $m \times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hoặc} \quad A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Khi $m=n$ ta nói A là ma trận ***vuông cấp n***

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m \times n}$

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$

Ví dụ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là một ma trận cỡ 2×3

3

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Hai ma trận bằng nhau khi cùng cỡ và có các phần tử tương ứng đều bằng nhau

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m=m' \\ n=n' \\ a_{ij}=b_{ij},\ \forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n} \end{cases}$$

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=x+4 \\ 3y=x+y+6 \\ 3z=z+w-1 \\ 3w=2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ 2y=x+6 \\ 2z=w-1 \\ w=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \\ w=3 \end{cases}$$

4

1.1.2 CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

a. Phép cộng ma trận

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$$

Ví dụ

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 9 & 4 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ 6 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

b. Phép nhân một số với ma trận

$$k\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$$

Ví dụ

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/2 & -1 & 0\\ 3 & -8 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & -1/2 & 0\\ 3/2 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

Ví dụ Tìm x, y, z và w thỏa mãn

$$3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$$

Thực hiện phép cộng ma trận và nhân một số với ma trận ta được

$$\begin{bmatrix}3x & 3y\\ 3z & 3w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+4 & x+y+6\\ z+w-1 & 2w+3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=x+4\\ 3y=x+y+6\\ 3z=z+w-1\\ 3w=2w+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=4\\ 2y=x+6\\ 2z=w-1\\ w=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\\ z=1\\ w=3\end{cases}$$

Tính chất

Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ $m\times n$

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$

2) Ma trận có các phần tử đều bằng 0 gọi là ma trận không và ký hiệu $\mathbf{0}$ thỏa mãn

$$A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$$

3) $A+(-A)=\mathbf{0}$, trong đó $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$

4) $A+B=B+A$

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực k, h với mọi ma trận cỡ $m\times n$

5) $k(A+B)=kA+kB$

6) $(k+h)A=kA+hA$

7) $k(hA)=(kh)A$

8) $1A=A$

Với 8 tính chất này tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là một không gian véc tơ

c. Phép nhân ma trận

Tích hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ và $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$

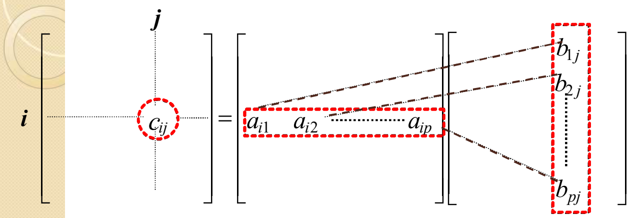
là ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu và định nghĩa bởi $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad \text{với mọi} \quad i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$$

Tồn tại ma trận tích AB khi số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B

Phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của ma trận tích AB bằng tổng của tích các phần tử hàng thứ i của ma trận A với các phần tử tương ứng cột thứ j của ma trận B

9



Vậy phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử hàng thứ i của A với các phần tử tương ứng cột thứ j của B

10

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+3z & y+3w \\ -x & -y \\ 2x+4z & 2y+4w \end{bmatrix}$$

11

Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B định nghĩa được khi số cột của A bằng số hàng của B

Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A

Khi A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời AB và BA. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB = BA$

Nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán

12

Chẳng hạn, xét

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 11 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính chất

Giả sử A, B, C là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được, khi đó ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$ *tính kết hợp*

2) $A(B+C) = AB + AC$ *tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng*

3) $(B+C)A = BA + CA$ *tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng*

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

5) Với mọi số tự nhiên dương n ta xét ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó với mọi ma trận A cỡ $m \times n$ ta có

$$I_m A = A = A I_n$$

Ma trận I_n được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp n

Chẳng hạn

Xét ma trận A cỡ 2×3 $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Khác với phép nhân các số: tích hai số khác $\mathbf{0}$ là một số khác $\mathbf{0}$.
Ta có thể tìm được hai ma trận khác $\mathbf{0}$ có tích là ma trận $\mathbf{0}$

Chẳng hạn

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&\dots&0\\2&4&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&-6&0&\dots&0\\-1&3&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$A,B\neq\mathbf{0}$ nhưng $AB=\mathbf{0}$

17

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

d. Ma trận chuyển vị

Cho ma trận A cỡ $m\times n$, nếu ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n\times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A, ký hiệu A^T

$$A^T=\left[c_{ij}\right]_{n\times m},\ c_{ij}=a_{ji}\ ;\quad i=\overline{1,n}\ \ j=\overline{1,m}$$

Ví dụ

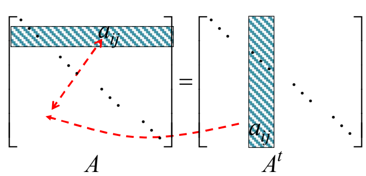
$$A=\begin{bmatrix}-4&1\\2&0\\5&9\end{bmatrix}\ \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}-4&2&5\\1&0&9\end{bmatrix}$$

18

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Tính chất

1) $\left(A^T\right)^T=A$
2) $(A+B)^T=A^T+B^T$
3) $(kA)^T=kA^T$
4) $(AB)^T=B^TA^T$



Nếu $A=A^T$ thì A được gọi là ***ma trận đối xứng*** (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất)

$A=-A^T$ thì A được gọi là ***phản đối xứng*** (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0)

19

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

1.2 ĐỊNH THỨC

❖ Định thức của ma trận vuông cấp 2 bằng tích đường chéo thứ nhất trừ tích đường chéo thứ hai

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

❖ Định thức của ma trận vuông cấp n tổng quát được xét trong chương này

❖ Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và hầu như mọi người đều cho rằng khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại

❖ Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó

❖ Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính

20

1.2.1 ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

ta tính các định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc' \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$$

Như vậy định thức của ma trận vuông cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

Mỗi song ánh $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là một phép thế bậc n

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1, 2, \dots, n$ sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị. Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$

Tập các phép thế bậc n ký hiệu S_n. Tập S_n có đúng $n!$ phần tử

Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

Dấu của phép thế

Mỗi cặp $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ được gọi là một nghịch thế của phép thế σ

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k$$

Phép thế nhận dấu + nếu số các nghịch thế chẵn và nhận dấu − nếu số các nghịch thế lẻ

Ví dụ 4.1 Hoán vị $[1\ 3\ 2]$ ứng với phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

có một nghịch thế. Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^1 = -1$

Định thức của ma trận vuông cấp n bất kỳ được mở rộng như sau

Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$ và xác định bởi biểu thức

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Như vậy định thức của ma trận vuông là tổng của $n!$ số hạng, mỗi số hạng là tích gồm n phần tử trên n hàng ở trên n cột khác nhau của ma trận và nhân với dấu của hoán vị tương ứng

Ví dụ Tập S_3 có 6 phần tử là

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}\quad \sigma_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\quad \sigma_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}\sigma_1=\operatorname{sgn}\sigma_5=\operatorname{sgn}\sigma_6=1 \qquad \operatorname{sgn}\sigma_2=\operatorname{sgn}\sigma_3=\operatorname{sgn}\sigma_4=-1$$

Vậy

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

Ví dụ 3.14

$$\begin{vmatrix}2&5&x\\3&y&4\\z&1&6\end{vmatrix}=2.y.6+5.4.z+x.3.1-x.y.z-5.3.6-2.4.1$$

$$=12y+20z+3x-xyz-90-8$$

$$=3x+12y+20z-xyz-98$$

Ví dụ

Tính định thức

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\&&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\&0&&\ddots&\vdots\\&&&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

Xét phép thế $\sigma_0=\begin{bmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{bmatrix}$

có $\operatorname{sgn}\sigma_0=(-1)^0=1$

Với mọi $\sigma\in S_n$

nếu $\sigma\neq\sigma_0$ thì tồn tại k sao cho

$\sigma(k)\neq k$

do đó tồn tại k' sao cho $\sigma(k')<k'$

$$\Rightarrow a_{k'\sigma(k')}=0 \quad\Rightarrow a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}=0$$

Vậy

$$D_n=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}=\operatorname{sgn}\sigma_0\cdot a_{11}\ldots a_{nn}=a_{11}\ldots a_{nn}$$

Tương tự

$$D'_n=\begin{vmatrix}a_{11}&&&&\\a_{21}&a_{22}&&0&\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\ldots a_{nn}$$

Ví dụ 3.16

$$\begin{vmatrix}2&a&b&c\\0&-7&d&e\\0&0&-1&f\\0&0&0&3\end{vmatrix}=2\cdot(-7)\cdot(-1)\cdot 3=42$$

1.2.2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ A'=\left[a'_{ij}\right]_{n\times n},\ a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & \text{nếu } i\neq k,m \\ a_{kj} & \text{nếu } i=m \\ a_{mj} & \text{nếu } i=k \end{cases}$$

Đổi chỗ hai hàng m và k cho nhau

thì $\det A' = -\det A$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng

Ma trận $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ và $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$

Nghĩa là $\begin{cases} c_{ij}=a_{ij}=b_{ij} & \text{nếu } i\neq k \\ c_{kj}=\alpha\, a_{kj}+\beta\, b_{kj}\ ; & \text{với mọi } j=1,\dots,n. \end{cases}$

thì $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 & \alpha c_1+\beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một ma trận có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a''+\alpha a+\beta a' & b''+\alpha b+\beta b' & c''+\alpha c+\beta c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó

$$\det A^t = \det A$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh các định lý về định thức đúng với hàng. Chẳng hạn, từ 4) suy ra nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

7) Định thức của mọi hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính của không gian véc tơ n chiều đều bằng 0

8) Với mọi ma trận vuông cùng cấp A, B luôn có

$$\det AB = \det A \det B$$

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

1.2.3 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

a. Khai triển theo hàng, theo cột

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

Ký hiệu M_{ij} là định thức của ma trận cấp $n-1$ có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \text{Cột } j \end{array} \ \text{Hàng } i$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

được gọi là phần bù đại số của a_{ij}

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Công thức khai triển định thức của A theo cột thứ j

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}(-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Công thức khai triển định thức của A theo hàng thứ i

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

b. Đưa về dạng tam giác

Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi. Từ đó, thực hiện cộng tổ hợp tuyến tính các hàng hay cột để đưa ma trận về dạng tam giác trên hoặc tam giác dưới và tính định thức.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{-4h_1+h_2\to h_2 \\ -7h_1+h_3\to h_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \overset{-2h_2+h_3\to h_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Chú ý:

Công thức khai triển theo cột thứ j và công thức khai triển theo hàng thứ i (trong đó việc chọn hàng thứ i và cột thứ j là tùy ý) cho phép tính định thức cấp n theo tổng các số hạng dạng $a_{ij}A_{ij}$. Nếu ở hàng thứ i hoặc cột j có số hạng $a_{ij} = 0$ thì $a_{ij}A_{ij} = 0$. Vì vậy để tính định thức ta thức hiện các bước sau:

- Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng 0 hoặc dễ triệt tiêu
- Thực hiện các phép biến đổi để triệt tiêu các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn, cuối cùng trên hàng hoặc cột này chỉ có một phần tử khác 0
- Khai triển theo hàng hoặc cột đã triệt tiêu

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Ví dụ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1 + c_3 \to c_3 \\ -2c_1 + c_4 \to c_4}}{=} \begin{vmatrix} & 2 & 2 & 2 \\ & & & \\ & -1 & -4 & -6 \\ & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo hàng thứ 2 ta được

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \qquad D = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục triệt tiêu hàng thứ nhất của định thức trên ta có

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (-2)(-3)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = 6(-9+5) = -24$$

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

c. Quy tắc Sarrus tính định thức cấp 3

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

d. Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột)

Từ ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ ta để ý k hàng: $i_1, \dots, i_k$ và k cột: $j_1, \dots, j_k$

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k

Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$

Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1, \dots, i_k$ và k cột $j_1, \dots, j_k$ thì ta có ma trận con cấp $n-k$. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$

$$A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\,\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$

Ví dụ 3.27

Chọn hàng 1, 3

Chọn cột 2, 5

$$A=\begin{bmatrix} & & & & \\ a_{21} & & a_{23} & a_{24} & \\ & & & & \\ a_{41} & & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & & a_{53} & a_{54} & \end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Hàng 1}\\ \\ \text{Hàng 3}\\ \\ \\ \end{array}$$

Cột 2 Cột 5

$$M_{13}^{25}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35}\end{vmatrix}$$

$$A_{13}^{25}=(-1)^{1+3+2+5}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}$$

Định lý 3.4 (Khai triển Laplace)

1) Khai triển k hàng $i_1, \dots, i_k$

$$\det A=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1, \dots, i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó

2) Khai triển k cột $j_1, \dots, j_k$

$$\det A=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$$

Ví dụ 3.28

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Khai triển k hàng đầu $i_1=1, \dots, i_k=k$

Từ điều kiện $1\le j_1<\ldots<j_k\le n \Rightarrow k\le j_k\le n$

- Nếu $j_k>k$ thì $M_{1,\ldots,k}^{j_1,\ldots,j_k}=0$ vì định thức này có ít nhất một cột bằng 0.
- Nếu $j_k=k$ thì $M_{1,\ldots,k}^{j_1,\ldots,j_k}=M_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}$

và $A_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k}=(-1)^{1+\cdots+k+1+\cdots+k}\begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

Vậy $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

Ví dụ 2.29

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 2 & 2 \\ g & h & -1 & -4 & -6 \\ i & j & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}=24(ad-bc)$$

1.3 MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.3.1 Định nghĩa. Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là ***ma trận nghịch đảo*** của A, ký hiệu A^{-1}

Điều kiện cần và đủ để ma trận A tồn tại ma trận nghịch đảo là

$$\det A \neq 0$$

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A có dạng $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}B^t$

$B=\left[A_{ij}\right]_{n\times n}$ được gọi là ma trận **phụ hợp** của A

A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

1.3.2 Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

a. Phương pháp ma trận phụ hợp

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}B^t$$

Ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 với định thức $|A| = ad - bc \neq 0$ có ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ví dụ

$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Ví dụ

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=40 \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-13 \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=-16 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=5 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-9 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}2&5&1\\7&3&2\\4&1&3\end{bmatrix} \text{ có } \det A=-56\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7&2\\4&3\end{vmatrix}=-13, A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}7&3\\4&1\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&1\\1&3\end{vmatrix}=-14, A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&5\\4&1\end{vmatrix}=18$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}=7, A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\7&2\end{vmatrix}=3, A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&5\\7&3\end{vmatrix}=-29$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-56}\begin{bmatrix}7&-13&-5\\-14&2&18\\7&3&-29\end{bmatrix}^t=-\frac{1}{56}\begin{bmatrix}7&-14&7\\-13&2&3\\-5&18&-29\end{bmatrix}$$

b. Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Để tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $A \,|\, I$
2) Thực hiện các **phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng** của $A \,|\, I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị
3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}

$$A|I \to \ldots\ldots\ldots \to I\,|A^{-1}$$

1) Đổi chỗ cho nhau hai hàng của ma trận.

2) Nhân vào một hàng của ma trận một số khác 0.

3) Cộng vào một hàng của ma trận một tổ hợp tuyến tính các hàng khác của ma trận.

Ví dụ

Tìm A^{-1} với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right. \begin{array}{c}h_1\to h_1\\-2h_1+h_2\to h_2\\-h_1+h_3\to h_3\end{array} \begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}$$

$$\begin{array}{c}h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\2h_2+h_3\to h_3\end{array}\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array} \begin{array}{c}h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\-h_3\to h_3\end{array}\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}$$

$$\begin{array}{c}-3h_3+h_1\to h_1\\3h_3+h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{array}\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array} \begin{array}{c}-2h_2+h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{array}\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}$$

1.4 HẠNG CỦA MA TRẬN

1.4.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Định nghĩa: Ta gọi hạng của ma trận *A*, ký hiệu ***r(A)***, là cấp cao nhất của các định thức con khác không của ma trận A.

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \text{ có hạng } r(A)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-2&3\\-2&9&-4&7\\-4&3&1&-1\end{bmatrix} \text{ có hạng } r(A)=2$$

1.4.2. Tính chất của hạng của ma trận

a) Hạng của ma trận không vượt quá số hàng và số cột của nó.

b) Hạng của ma trận bằng hạng của ma trận chuyển vị của nó.

$$r(A) = r(A^t) \le \min(m, n)$$

c) Khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau, gọi là các phép biến đổi sơ cấp, thì hạng của ma trận không thay đổi:

1) Đổi chỗ cho nhau hai hàng của ma trận.

2) Nhân vào một hàng của ma trận một số khác 0.

3) Cộng vào một hàng của ma trận một tổ hợp tuyến tính các hàng khác của ma trận.

d) Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác 0 của nó.

Ma trận bậc thang: Là những ma trận có hai tính chất sau:

1. Các hàng khác không (có phần tử khác 0) luôn ở trên các hàng không (tất cả các phần tử đều bằng 0).

2. Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Ma trận nào dưới đây là ma trận bậc thang? Giải thích?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp khử Gauss

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột hoặc các hàng để đưa ma trận về dạng hình bậc thang, từ đó suy ra hạng của ma trận.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_1 + h_3 \to h_3]{-2h_1 + h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{7}h_2 + h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20$$

Vậy $r(A) = 2$

Ví dụ

$$B=\begin{bmatrix}2&1&0&4\\-4&-2&1&-7\\3&1&-1&4\\1&-4&3&-4\end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix}2&1\\-4&-2\end{vmatrix}=0$ nhưng $\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}=1$

Bao định thức này bởi định thức cấp 3 $\begin{vmatrix}2&1&0\\-4&-2&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=1$

Định thức cấp 4 duy nhất $|B|=0$

Vậy $r(B)=3$

1.5. ỨNG DỤNG VỀ TÍNH LUỸ THỪA CỦA MA TRẬN MARKOV

Bài toán tính luỹ thừa của một ma trận vuông là như sau: Cho ma trận *A* vuông cấp *n*. Tính luỹ thừa A^k, trong đó *k* là một số nguyên dương.

Trong kinh tế và trong kỹ thuật có một số loại ứng dụng liên quan đến một tập hữu hạn các trạng thái của một hệ thống hoặc một quần thể.

Chẳng hạn, cư dân của một thành phố có thể sống ở trung tâm thành phố hoặc ở vùng ngoại thành; nước giải khát mà người tiêu dùng có thể sử dụng là Coca-Cola, Pepsi hoặc nhãn hiệu khác; người tiêu dùng có thể lựa chọn một trong 3 nhà mạng di động lớn ở Việt Nam là Mobifone, Vinaphone và Viettel...

Ta muốn nghiên cứu sự tương tác giữa các thành viên trong hệ thống này qua sự phân bố của các trạng thái. Ký hiệu tập trạng thái là $E=\{1,2,...,n\}$

Xác suất để một thành viên của quần thể chuyển từ trạng thái thứ j sang trạng thái thứ i được biểu thị bằng một số p_{ij}, trong đó $0\le p_{ij}\le 1$

Định nghĩa: Ma trận $P=\left[p_{ij}\right]$ với p_{ij} xác định như trên được gọi là ma trận chuyển trạng thái (còn gọi là ma trận xác suất chuyển).

Định nghĩa: Ma trận chuyển trạng thái

$$P=\left[p_{ij}\right]$$

với p_{ij} thoả mãn các điều kiện

$$0\le p_{ij};\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=1$$

được gọi là ma trận Markov.

Định nghĩa: Chuỗi Markov là một dãy các ma trận $\{X_n\}_n$ (ma trận trạng thái) thoả mãn điều kiện

$$X_{k+1}=PX_k$$

Bài toán về chuỗi Markov: Cho trước ma trận trạng thái ban đầu X_0 và ma trận Markov P. Tính X_k

Định lý: *Ma trận trạng thái thứ k của chuỗi Markov là* $X_k=P^kX_0$

Ví dụ: Quần thể cư dân của một thành phố sau khi được điều tra dân số và sự di dân sau một năm thì có số liệu như sau:
Có 90% cư dân đang ở nội thành vẫn tiếp tục ở nội thành. Có 10% cư dân đang ở nội thành thì chuyển ra ngoại thành.
Có 80% cư dân đang ở ngoại thành thì tiếp tục ở ngoại thành. Có 20% cư dân đang ở ngoại thành thì chuyển vào nội thành.
Tỷ lệ phân bố dân cư ban đầu là 50% nội thành và 50% ngoại thành.
Hỏi sau 2 năm và 3 năm thì tỷ lệ phân bố dân cư là bao nhiêu?

Hướng dẫn: Mỗi cư dân được chọn ở nội thành hoặc ngoại thành sau một thời gian. Vậy ta mô hình hoá hai trạng thái trên như sau:
Ở nội thành, đặt là 1.
Ở ngoại thành, đặt là 2.
Khi đó, ta có tập các trạng thái là *E = {1,2}*.
Theo giả thiết về sự di dân, ta có ma trận chuyển trạng thái là

$$P=\begin{bmatrix}0,9&0,2\\0,1&0,8\end{bmatrix}$$

và ma trận trạng thái ban đầu là

$$X_0=\begin{bmatrix}0,5\\0,5\end{bmatrix}$$

Tỷ lệ phân bố dân cư sau 2 năm là

$$X_2=P^2X_0=\begin{bmatrix}0,9&0,2\\0,1&0,8\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0,5\\0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,585\\0,415\end{bmatrix}$$

Tỷ lệ phân bố dân cư sau 3 năm là

$$X_3=P^3X_0=\begin{bmatrix}0,9&0,2\\0,1&0,8\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}0,5\\0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6095\\0,3905\end{bmatrix}$$

Vậy sau 2 năm thì có 58,5% cư dân ở nội thành và 41,5 % cư dân ở ngoại thành, sau 3 năm thì có 60,95% cư dân ở nội thành và 39,05 % cư dân ở ngoại thành.