CHƯƠNG 3: CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

3.1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

3.1.1. Phép biến đổi Laplace

a. Định nghĩa biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

b. Điều kiện tồn tại

Nếu hàm biến thực *x*(*t*) thoả mãn 3 điều kiện sau:

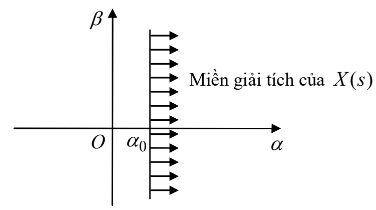
1. *x*(*t*) = 0 với mọi *t* < 0.
2. *x*(*t*) liên tục từng khúc.
3. *x*(*t*) không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to \infty$.

Thì tồn tại biến đổi Laplace *X*(*s*) xác định và giải tích tại mọi số phức $s = \alpha + i\beta$ sao cho $\alpha > \alpha_0$ thỏa mãn

1

1

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s) = 0 \qquad X'(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st}x(t)dt$$



2

2

Ví dụ: Hàm bước nhảy đơn vị (*Unit step function*)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathscr{L}\{\eta(t)\} = \mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Ví dụ: Biến đổi Laplace của hàm sin *t*

$$\mathscr{L}\{\sin t\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\, dt = \frac{1}{1+s^2}$$

3

3

c. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. Tính tuyến tính $\mathscr{L}\{Ax(t)+By(t)\} = A\mathscr{L}\{x(t)\} + B\mathscr{L}\{y(t)\}$

2. Tính đồng dạng $\mathscr{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$

3. Tính dịch chuyển ảnh $\mathscr{L}\left\{e^{at}x(t)\right\} = X(s-a)$

4. Tính trễ $\mathscr{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\} = e^{-sa}X(s)$

5. Biến đổi của đạo hàm $\mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\} = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

4

4

6. Biến đổi Laplace của tích phân $\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \frac{X(s)}{s}$

7. Đạo hàm ảnh $\mathscr{L}\left\{t^nx(t)\right\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}X(s)$

8. Tích phân ảnh $\mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty X(u)du$

9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \dfrac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}$

10. Ảnh của tích chập $\mathscr{L}\{x(t)*y(t)\} = X(s)Y(s)$

5

5

3.1.2. Phép biến đổi Laplace ngược

$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$, $x(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}X(s)ds$

Một vài phương pháp tìm hàm ngược

1. Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược

$$\mathscr{L}^{-1}\{X(s-a)\} = e^{at}x(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}X(s)\right\} = x(t-a)\eta(t-a)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\} = \int_0^t x(u)du$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{-X'(s)\} = tx(t)$$

6

6

2. Khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$X(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\frac{a_3}{s^4}+\frac{a_4}{s^5}+\cdots$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\frac{a_4t^4}{4!}+\cdots$$

3. Sử dụng thặng dư của tích phân phức

Giả sử hàm *X*(*s*) chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s)<\alpha;\ \alpha>\alpha_0$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} e^{st}X(s);a_k\right]$$

Công thức Heaviside $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_kt}$

$X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ Giả sử $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là $a_1, a_2, \ldots, a_n$

7

7

Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ

Mọi phân thức hữu tỉ thực sự có dạng $X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II

- Các phân thức hữu tỉ loại I

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}\qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

- Các phân thức hữu tỉ loại II $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^n}$

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau $\dfrac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}\qquad\dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}$

8

8

Ví dụ: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$

$$X(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{2s+3}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$$

Ví dụ: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

$$X(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}$$

9

9

3.2. Ứng dụng của biến đổi Laplace

3.2.1. Ứng dụng của biến đổi Laplace để tính tích phân

$$\int_0^\infty e^{-at}x(t)dt=\left(\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt\right)_{s=a}=X(s)\big|_{s=a}\qquad \int_0^\infty\frac{x(t)}{t}dt=\int_0^\infty X(s)ds$$

Ví dụ 2.37: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3t}\sin t\,dt=\mathscr{L}\{\sin t\}\big|_{s=3}=\frac{1}{s^2+1}\bigg|_{s=3}=\frac{1}{10}$

$$\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t\,dt=\mathscr{L}\{t\cos t\}\big|_{s=2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\bigg|_{s=2}=\frac{3}{25}$$

Ví dụ 2.39:

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)ds=\ln\frac{s+1}{s+3}\bigg|_0^\infty=\ln 3$$

10

10

3.2.2. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

1. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 2.42: Tìm nghiệm của phương trình $x''-2x'+2x=2e^t\cos t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=x'(0)=0$

$$\left(s^2-2s+2\right)X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}\Rightarrow X(s)=\frac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=2e^t\frac{t\sin t}{2}=te^t\sin t$$

11

11

2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 2.45: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases}x'=2x-3y\\ y'=y-2x\end{cases}\text{ với điều kiện đầu }\begin{cases}x(0)=8\\ y(0)=3\end{cases}$$

Hệ phương trình ảnh

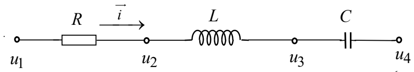
$$\begin{cases}sX-8=2X-3Y\\ sY-3=Y-2X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(s-2)X+3Y=8\\ 2X+(s-1)Y=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{3}{s-4}\\ Y=\dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}-\dfrac{2}{s-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=5e^{-t}+3e^{4t}\\ y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}.\end{cases}$$

12

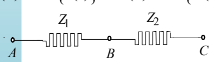
12

3.2.3. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

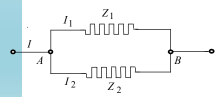


$$u_2(t)-u_1(t)=Ri(t),\ u_3(t)-u_2(t)=L\frac{di(t)}{dt},\ u_4(t)-u_3(t)=\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right)$$

$$I(s)=\mathscr{L}\{i(t)\}\quad U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}\quad Z=\frac{U}{I}\quad Z=R\,;\,Z=Ls\,;\,Z=\frac{1}{Cs}$$

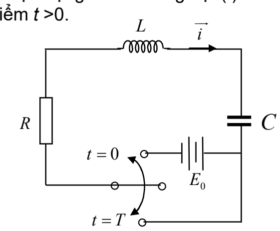


$$Z=Z_1+Z_2$$



$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$$

Ví dụ 2.51: Xét mạch RLC nối tiếp với R=110 Ω, L=1H, C=0,001F và một ắc quy cung cấp sức điện động 90V. Đóng mạch tại thời điểm $t = 0$ và đến thời điểm $t = T$(T=1s) ắc quy sẽ được tách ra khỏi mạch, lúc đó mạch RLC cũng đóng nhưng không còn sức điện động. Tìm cường độ $i(t)$ của dòng điện trong mạch tại thời điểm t >0.



$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt\right)=E(t),\ E(t)=90\big(\eta(t)-\eta(t-1)\big)$$

$$LsI+RI+\frac{1}{Cs}I=90\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$I=90\frac{1-e^{-s}}{s^2+110s+1000}=(1-e^{-s})\left(\frac{1}{s+10}-\frac{1}{s+100}\right)$$

$$i(t)=e^{-10t}-e^{-100t}-\left(e^{-10(t-1)}-e^{-100(t-1)}\right)\eta(t-1)$$

3.3. PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

3.3.1. Chuỗi Fourier

a. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt\,;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos ntdt\,;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin ntdt\,;n=1,\,2,\,...$$

b. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0=2l$

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)$$

c. Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}t-\varphi_n\right)$$

$$A_0=\frac{a_0}{2},\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,;\quad\cos\varphi_n=\frac{a_n}{A_n},\ \sin\varphi_n=\frac{b_n}{A_n}$$

d. Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series)

$$x(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi}{l}t}\,;\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_c^{c+2l}x(t)e^{-i\frac{n\pi}{l}t}dt\,,\ \forall c$$

$c_0=a_0/2$ | $a_0=2c_0$

$c_n=(a_n-ib_n)/2$ Hoặc $a_n=c_n+c_{-n}$

$c_{-n}=(a_n+ib_n)/2$ | $b_n=i(c_n-c_{-n})$

Đẳng thức Parseval: $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0=2l$

$$\frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

3.3.2. Phép biến đổi Fourier hữu hạn **(qua miền tần số)**

Biến đổi Fourier hữu hạn của dãy tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\{x(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}$$

Công thức biến đổi ngược

$$x(n)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\}=\int_0^1\widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df$$

Ví dụ 2.61: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc

$$\operatorname{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi nf} = \frac{1-e^{-i2\pi Nf}}{1-e^{-i2\pi f}} = e^{-i\pi(N-1)f}\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

Biến đổi Fourier qua miền tần số góc ω

$$\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n}$$

$$x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{X}(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

19

19

Tính chất của phép biến đổi Fourier hữu hạn

1. Tuyến tính $\mathscr{F}\{Ax(n)+By(n)\} = A\mathscr{F}\{x(n)\} + B\mathscr{F}\{y(n)\}$
2. Trễ $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\{x(n-n_0)\} = e^{-i2\pi n_0 f}\widehat{X}(f)$
3. Dịch chuyển ảnh $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{i2\pi nf_0}x(n)\right\} = \widehat{X}(f-f_0)$
4. Điều chế $\mathscr{F}\{x(n)\cos(2\pi nf_0)\} = \dfrac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}$
5. Liên hợp phức $\mathscr{F}\left\{\overline{x(n)}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)} e^{-i2\pi nf} = \overline{\widehat{X}(-f)}$
6. Biến số đảo $\mathscr{F}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-i2\pi nf} = \widehat{X}(-f)$

20

20

7. Tích chập $\mathscr{F}\{x(n) * y(n)\} = \mathscr{F}\{x(n)\} \cdot \mathscr{F}\{y(n)\}$
8. Tích chập ảnh $\mathscr{F}\{x(n) \cdot y(n)\} = \mathscr{F}\{x(n)\} * \mathscr{F}\{y(n)\}$
9. Biến đổi của hàm tương quan

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} \qquad \mathscr{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$$

10. Đạo hàm ảnh $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\{nx(n)\} = \dfrac{i}{2\pi} \cdot \dfrac{d\widehat{X}(f)}{df}$
11. Đẳng thức Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(-f)}df \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_0^1 \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df$$

21

21

3.3.3. Phép biến đổi Fourier

a. Công thức tích phân Fourier

Giả sử hàm *x*(*t*) khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực và thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{i\lambda(t-u)}du$$

Đổi biến $\lambda = 2\pi f$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{i2\pi f(t-u)}du = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i2\pi fu}du\right)e^{i2\pi ft}df$$

22

22

b. Phép biến đổi Fourier liên tục

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt,\ f \in \mathbb{R}$$

Công thức biến đổi ngược

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f)e^{i2\pi ft}df$$

Dạng biên độ - pha của phép biến đổi $\widehat{X}(f) = \left|\widehat{X}(f)\right|e^{i\varphi(f)}$

$$\left|\widehat{X}(f)\right| = \sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}},\quad \varphi(f) = \angle\widehat{X}(f)$$

23

23

Tính chất của phép biến đổi Fourier

1. Tuyến tính $\mathscr{F}\{Ax(t)+By(t)\} = A\mathscr{F}\{x(t)\} + B\mathscr{F}\{y(t)\}$
2. Trễ $\mathscr{F}\{x(t-T_d)\} = e^{-i2\pi T_d f}\widehat{X}(f)$
3. Dịch chuyển ảnh $\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}x(t)\right\} = \widehat{X}(f-f_0)$
4. Điều chế $\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = \dfrac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}$
5. Liên hợp phức $\mathscr{F}\left\{\overline{x(t)}\right\} = \overline{\widehat{X}(-f)}$
6. Đối ngẫu $\mathscr{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\} = x(-f)$

nếu x(t) là hàm thực chẵn thì $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\} = x(f)$

24

24

7. Đồng dạng $\mathscr{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}\cdot\widehat{X}(f/a)$

8. Đạo hàm $\mathscr{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (2\pi i f)^n \widehat{X}(f)$

9. Tích phân $\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(u)du\right\} = \frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$

10. Đạo hàm ảnh $\mathscr{F}\left\{t^n x(t)\right\} = (-i2\pi f)^{-n}\frac{d^n\widehat{X}(f)}{df^n}$

11. Tích chập $\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(f)$

12. Tích chập ảnh $\mathscr{F}\{x(t)\cdot y(t)\} = \widehat{X}(f)*\widehat{Y}(f)$

25

25

c. Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{X}(f)\right|^2 df$$

d. Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ: Hàm phân bố mũ hai phía $x(t) = e^{-\lambda|t|},\ \lambda > 0$

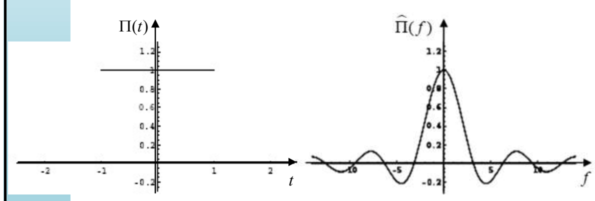
$$\mathscr{F}\left\{e^{-\lambda|t|}\right\} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} \qquad \mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} = e^{-\lambda|f|},\ \lambda > 0$$

26

26

Ví dụ: Biến đổi Fourier của xung chữ nhật hay hình hộp có độ dài *2a*

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a,\ a > 0\end{cases} \qquad \mathscr{F}\{\Pi_a(t)\} = 2a\,\mathrm{sinc}(2af)$$

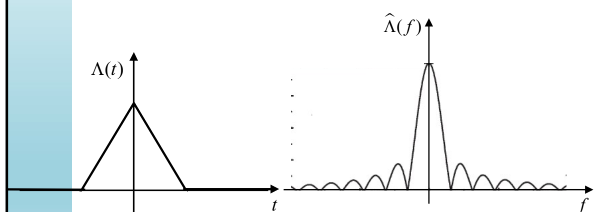


27

27

Ví dụ: Xung tam giác đơn vị

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{nếu } |t| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |t| > 1\end{cases} \qquad \mathscr{F}\{\Lambda(t)\} = \mathrm{sinc}^2(f)$$



28

28

3.4. Phép biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform)

3.4.1. Khái niệm phép biến đổi Fourier rời rạc

Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tuần hoàn, chu kỳ 2π

Các điểm mẫu tương ứng

$$t_0 = 0,\ t_1 = \frac{2\pi}{n}, t_2 = \frac{4\pi}{n}, \ldots, t_j = \frac{2j\pi}{n}, \ldots, t_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Véc tơ mẫu $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),\quad x_j = x(t_j) = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \ldots + c_{n-1}e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}$$

trong đó $x(t_j) = p(t_j)\quad \forall\ j = 0, \ldots, n-1$

29

29

Các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ trong cơ sở trực chuẩn $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$

$$c_k = \langle \mathbf{x}; \omega_k\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{e^{ikt_j}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ikt_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{-jk}x_j$$

$$\mathscr{E}^k = e^{i2k\pi/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$DFT\{x(t)\} = \widehat{X}(k) = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}),\ c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{-jk}x_j, x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$$

$$IDFT\{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}\quad x_j = \sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{jk}c_k$$

30

30

Ví dụ: Xét trường hợp *n = 4*

$$\mathscr{E} = e^{i2\pi/4} = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,\ \mathscr{E}^2 = -1,\ \mathscr{E}^3 = -i$$

các giá trị mẫu

$$x_0 = x(0),\ x_1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right),\ x_2 = x(\pi),\ x_3 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

cơ sở trực chuẩn

$$\omega_0 = (1,1,1,1),\ \omega_1 = (1,i,-1,-i),\ \omega_2 = (1,-1,1,-1),\ \omega_3 = (1,-i,-1,i)$$

$$c_0 = \langle \mathbf{x};\omega_0\rangle = \frac{1}{4}(x_0+x_1+x_2+x_3),\ c_1 = \langle \mathbf{x};\omega_1\rangle = \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3)$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x};\omega_2\rangle = \frac{1}{4}(x_0-x_1+x_2-x_3),\ c_3 = \langle \mathbf{x};\omega_3\rangle = \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)$$

31

31

Xét tín hiệu $x(t) = 2\pi t - t^2$

Các giá trị mẫu

$$x_0 = 0;\ x_1 = 7,4022;\ x_2 = 9,8696;\ x_3 = 7,4022$$

Các hệ số Fourier rời rạc

$$c_0 = 6,1685;\ c_1 = -2,4674;\ c_2 = -1,2337;\ c_3 = -2,4674$$

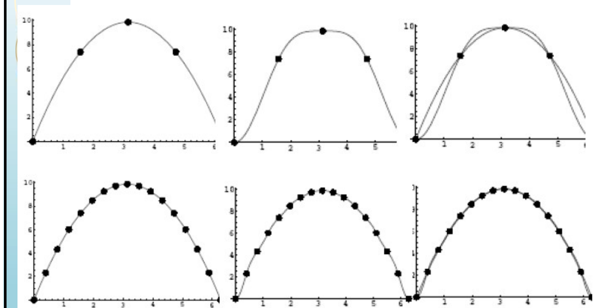
Đa thức lượng giác nội suy của biến đổi Fourier rời rạc

$$\hat{p}(t) = -1,2337e^{-i2t} - 2,4674e^{-it} + 6,1685 - 2,4674e^{it}$$

$$\mathrm{Re}\,\hat{p}(t) = 6,1685 - 4,9348\cos t - 1,2337\cos 2t$$

32

32



Hình 2.17: *Biến đổi Fourier tần số thấp của $2\pi t - t^2$ ứng với $n = 4$ và $n = 16$*

33

33

Kiểm tra trắc nghiệm Toán kỹ thuật

34