CHƯƠNG 2: BIẾN ĐỔI Z VÀ CÁC HÀM ĐẶC BIỆT

2.1. PHÉP BIẾN ĐỔI Z

2.1.1. Định nghĩa phép biến đổi *Z thuận*

$$X(z)=\mathrm{Z}\{x(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{-1})^{n}$$

b. Miền xác định của biến đổi *Z*

Để tìm miền xác định của phép biến đổi *Z* ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn D'Alembert

Ví dụ 1.36: Tìm biến đổi *Z* của tín hiệu xác định bởi $x(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$

$$X(z)=\frac{4z}{4z-3}+\frac{3z}{4-3z}=\frac{7z}{(4z-3)(4-3z)},\qquad \frac{3}{4}<|z|<\frac{4}{3}$$

1

c. Tính chất của biến đổi *Z*

$$\mathcal{Z}\{Ax(n)+By(n)\}=A\mathcal{Z}\{x(n)\}+B\mathcal{Z}\{y(n)\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-anT}x(n)\right\}=X(ze^{aT})\quad \text{với}\quad X(z)=\mathcal{Z}\{x(n)\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(n+m)\}=z^{m}X(z)-z^{m}x(0)-z^{m-1}x(1)-\ldots-zx(m-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\eta(n-k)\}=z^{-k}X(z)\qquad \mathcal{Z}\{nx(n)\}=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\mathcal{Z}\{f(n)\}=\frac{X(z)}{1-z^{-N}}$$

$$x(n)=\begin{cases}f_n & \text{nếu}\ \ 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{nếu}\ \ n\ge N\end{cases}\qquad \{f(n)\}=\left\{\underbrace{f_0f_1f_2\cdots f_{N-1}}_{\text{Chu kỳ thứ nhất}}f_0f_1f_2\cdots\right\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(n)*y(n)\}=X(z)Y(z)$$

2

2.1.2. Biến đổi *Z* ngược

$$\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}\qquad x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz$$

C là đường cong kín bao quanh gốc *O* và nằm trong hình vành khăn *r* <|*z*|<*R*

Ví dụ 1.42: Hàm $X(z)=\frac{z+2}{2z^2-7z+3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{z-3}$ giải tích tại mọi $z\neq\frac{1}{2},3$.

Vì vậy ta có thể tìm biến đổi ngược trong 3 miền sau:

$|z|<\frac{1}{2}$ $\quad\frac{1}{2}<|z|<3$ $\quad 3<|z|$ **(Biến đổi Z ngược một phía)**

3

a. Miền $|z|<\frac{1}{2}$

$$X(z)=\frac{1}{1-2z}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-n}-\frac{1}{3^{-n+1}}\right)z^{-n}$$

$$x(n)=\begin{cases}2^{-n}-\frac{1}{3^{-n+1}} & \text{nếu}\ \ -\infty<n\le 0\\ 0 & \text{nếu}\ \ n>0\end{cases}$$

b. Miền $\frac{1}{2}<|z|<3$

$$x(n)=\begin{cases}-3^{n-1} & \text{nếu}\ \ -\infty<n\le 0\\ -2^{-n} & \text{nếu}\ \ n>0\end{cases}$$

c. Miền $|z|>3$

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu}\ \ -\infty<n\le 0\\ 3^{n-1}-2^{-n} & \text{nếu}\ \ n\ge 1\end{cases}$$

4

2.2 Ứng dụng biến đổi *Z*

2.2.1 Ứng dụng biến đổi *Z* giải pt sai phân

Có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi *Z* và phép biến đổi ngược để giải các phương trình sai phân

Ví dụ 1.45: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$2x(n+2)-3x(n+1)+x(n)=5\cdot 3^{n},\quad n\ge 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0,\ x(1)=1$

$$2\mathcal{Z}\{x(n+2)\}-3\mathcal{Z}\{x(n+1)\}+\mathcal{Z}\{x(n)\}=5\mathcal{Z}\left\{3^{n}\right\}$$

$$\Rightarrow 2z^2X(z)-2z^2x(0)-2zx(1)-3\left[zX(z)-zx(0)\right]+X(z)=\frac{5z}{z-3}$$

$$\Rightarrow (2z-1)(z-1)X(z)=\frac{z(2z-1)}{z-3}\Rightarrow X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-1}\right)$$

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(3^{n}-1\right),\quad n\ge 0$$

5

Ví dụ 1.48: Giải hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases}x(n+1)=4x(n)+2y(n)\\ y(n+1)=3x(n)+3y(n),\quad n\ge 0\end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0,\ y(0)=5$

$$\begin{cases}zX(z)-x(0)z=4X(z)+2Y(z)\\ zY(z)-y(0)z=3X(z)+3Y(z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(z-4)X(z)-2Y(z)=0\\ 3X(z)-(z-3)Y(z)=-5z.\end{cases}$$

$$X(z)=-\frac{10z}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-6}\Rightarrow x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=2-2\cdot 6^{n}$$

$$Y(z)=\frac{5z(z-4)}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-6}+\frac{3z}{z-1}\Rightarrow y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=3+2\cdot 6^{n}$$

2.2.2 Ứng dụng biến đổi *Z* trong hệ thống điều khiển tuyến tính rời rạc

6

CHƯƠNG 2: BIẾN ĐỔI Z VÀ CÁC HÀM ĐẶC BIỆT

2.3. HÀM DELTA

2.3.1. Hàm delta, hàm Gamma

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hoặc hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng.

Hàm delta tại $t = t_0$, ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$, thỏa mãn hai điều kiện sau

$$\forall t \neq t_0 : \delta_{t_0}(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1$$

1

7

Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm trơn theo nghĩa thông thường
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp

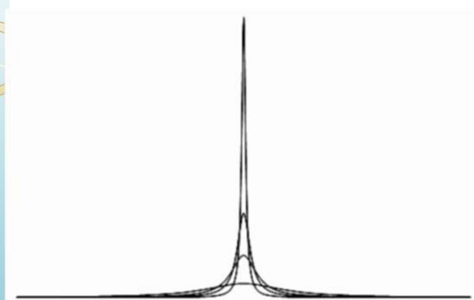
Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan nt\Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1$$

2

8



Hình 3.1: *Đồ thị các hàm* $g_n(t)$

3

9

Vì vậy, một cách hình thức ta đồng nhất giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ là hàm delta tập trung tại gốc $t = 0$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \delta(t) = \delta_0(t)$$

Hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ có giá trị tập trung tại t_0 bất kỳ có thể nhận được từ hàm $\delta(t)$ bằng cách tịnh tiến

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$$

Hoặc

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n(t); \;\; \hat{g}_n(t) = g_n(t - t_0) = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2(t-t_0)^2\right)}$$

4

10

Tích chập của hàm delta

$$f(t_0) * \delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Với mọi hàm liên tục *x*(*t*)

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt = \begin{cases} x(v) & \text{nếu } 0 < v < l \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Do đó
$$\int_{-\infty}^t \delta_v(u)du = \eta(t - v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > v \\ 0 & \text{nếu } t < v \end{cases}$$

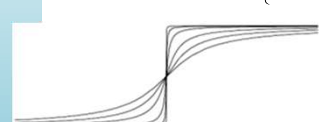
Vậy có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta

5

11

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^t g_n(u)du = \int_{-\infty}^t \frac{n}{\pi\left(1+n^2u^2\right)}du = \frac{1}{\pi}\arctan nt + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nếu } t = 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm $f_n(t)$

Vậy có thể coi $\dfrac{d\eta(t)}{dt} = \delta(t)$

6

12

Giả sử $x(t)$ là hàm khả vi (theo nghĩa thông thường) tại mọi t ngoại trừ tại điểm gián đoạn t_0 với bước nhảy β, khi đó ta có thể biểu diễn lại hàm $x(t)$ dưới dạng

$$x(t) = y(t) + \beta\eta(t - t_0)$$

trong đó y(t) là hàm liên tục tại mọi điểm và khả vi tại mọi điểm có thể trừ điểm gián đoạn. Do đó có đạo hàm

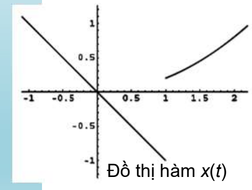
$$x'(t) = y'(t) + \beta\delta(t - t_0)$$

Ví dụ 3.1: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

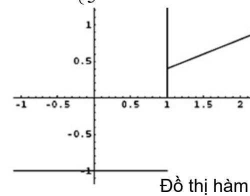
13

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\eta(t-1)\ ;\ y(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 - \frac{6}{5} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

$$x'(t) = y'(t) + \frac{6}{5}\delta(t-1)\ ,\ y'(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{2}{5}t & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$



Đồ thị hàm $x(t)$

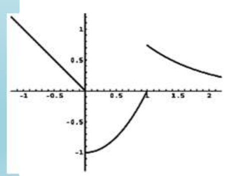


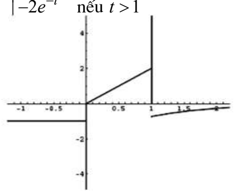
Đồ thị hàm $x'(t)$

14

Ví dụ 3.2: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 0 \\ t^2 - 1 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

$$x'(t) = -\delta(t) + \frac{2}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 0 \\ 2t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ -2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$





15

Ví dụ 3.3: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên ***X*** xác định bởi công thức

$$F_X(x) = P\{X \le x\},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Nếu $f_X(x)$ là hàm mật độ xác suất thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Nếu biến ngẫu nhiên ***X*** rời rạc có hàm khối lượng xác suất

$$p_X(x_k) = P\{X = x_k\} \text{ thì } F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_X(x_k)$$

$$F_X(x) = \sum_{x_k \le x} p_X(x_k) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{x_k} p_X(x_k)\delta(t - x_k)dt$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k)\delta(x - x_k)$$

16

MỘT SỐ CÁC HÀM SỐ TÍCH PHÂN

Công thức xác định các hàm số tích phân

Hàm *tích phân mũ* $\quad \text{Ei}(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\ ,\ t > 0$

Hàm *tích phân sin* $\quad \text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du\ ,\ t > 0$

$$\text{si}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du\ ;\quad \text{Si}(t) = \frac{\pi}{2} + \text{si}(t)$$

Hàm *tích phân cosin* $\quad \text{Ci}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du\ ,\ t > 0$

17

Hàm lỗi (error function) $\quad \text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du\ ,\ t > 0$

$$\text{erf}(t) = 2\Phi\left(\sqrt{2}t\right) - 1\ ,\ \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

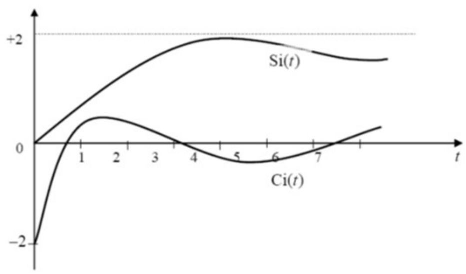
Khai triển các hàm tích phân thành chuỗi luỹ thừa

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

$$\text{Ci}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{\ln\left(s^2+1\right)}{2s}\right\} = \ln t + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!2n}$$

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t - \frac{t^3}{1!3} + \frac{t^5}{2!5} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots\right]$$

18



Hình 3.9: *Đồ thị của các hàm* **Si**(*t*) *và* **Ci**(*t*)

16

19

HÀM GAMMA

a. Định nghĩa hàm Gamma (Gauss)

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)...(z+m)}, \forall z \neq 0,-1,-2,...$$

Công thức Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}.\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}$$

Công thức Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \operatorname{Re} z > 0$$

17

20

b. Các tính chất của hàm Gamma

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \forall z \neq 0,-1,-2,...$$

$$\Gamma(1) = 1;\ \Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!, \forall z = n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \forall z \neq 0,\pm 1,\pm 2,...$$

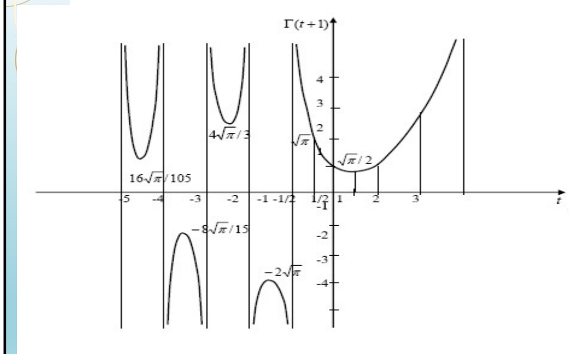
$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \forall z \neq \pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},...$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \forall z = n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \forall z = n \in \mathbb{N}$$

18

21



Hình 3.10: Đồ thị hàm Gamma

19

22

2.3.2. Hàm Beta

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Xác định với mọi $p,q > 0$

Tính chất $B(p,q) = B(q,p) \qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$$

20

23

Ví dụ 3.4: $B\left(3,\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{16}{315}$

Ví dụ 3.5: *Tính tích phân* $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{1}{2}}\theta \sin^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} == \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

21

24

2.3.3. HÀM BESSEL

3.4.1. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2

Phương trình Bessel cấp α, $\alpha \geq 0$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0$$

Nếu $J_\alpha(z)$ và $Y_\alpha(z)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y(z)=AJ_\alpha(z)+BY_\alpha(z)=Z_\alpha(z)$$

22

25

a. Hàm Bessel loại 1

Tìm nghiệm của phương trình theo phương pháp Frobenius bằng cách xét các nghiệm dạng

$$y(z)=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\quad a_0\neq 0$$

Thay vào phương trình và đồng nhất hệ số suy ra

$$\begin{cases}(\rho^2-\alpha^2)a_0=0\\ \left((\rho+1)^2-\alpha^2\right)a_1=0\\ \left((\rho+2)^2-\alpha^2\right)a_2+a_0=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left((\rho+r)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}=0\ ;\ k\geq 2\end{cases}$$

23

26

Từ điều kiện $a_0\neq 0$ ta được $\rho=\pm\alpha,\alpha\geq 0$

Với $\rho=\alpha$ ta được hàm Bessel loại 1 $J_\alpha(z)$

$$J_\alpha(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\qquad J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

Với $\rho=-\alpha$ ta được hàm Bessel loại 1 $J_{-\alpha}(z)$

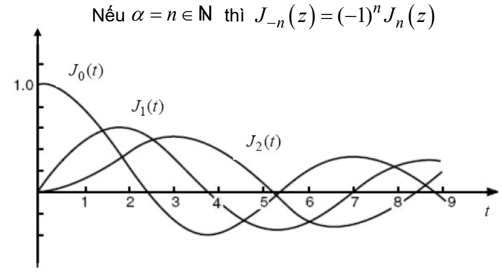
$$J_{-\alpha}(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

24

27

Định lý 3.2: Nếu $\alpha\notin\mathbb{N}$ thì $J_\alpha(z), J_{-\alpha}(z)$ độc lập

Nếu $\alpha=n\in\mathbb{N}$ thì $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$



Hình 3.12: Đồ thị các hàm Bessel $J_0(t)$, $J_1(t)$, $J_2(t)$

25

28

b. Hàm Bessel loại 2

$$Y_\alpha(z)=\begin{cases}\dfrac{(\cos\pi\alpha)J_\alpha(z)-J_{-\alpha}(z)}{\sin\pi\alpha} & \text{nếu}\quad \alpha\neq n\\ \lim\limits_{\beta\to n}Y_\beta(z) & \text{nếu}\quad \alpha=n\end{cases}$$

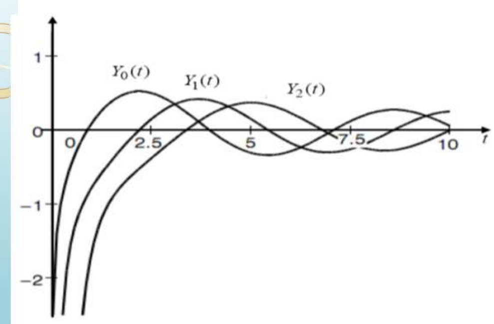
$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_n(z)}{\partial n}-(-1)^n\frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n}\right]$$

Hàm Weber $\quad I_n(z)=J_n(z)\left(A+B\int\frac{dz}{zJ_n^2(z)}\right)$

Hàm Neumann $\quad N_\alpha(z)=\frac{1}{2}\pi Y_\alpha(z)+(\ln 2-\gamma)J_\alpha(z)$

26

29



Hình 3.13: Đồ thị các hàm Bessel loại 2

27

30

c. Các công thức truy toán đối với hàm Bessel

$$J_{\alpha+1}(z)=\frac{2\alpha}{z}J_\alpha(z)-J_{\alpha-1}(z)$$

$$zJ'_\alpha(z)=\alpha J_\alpha(z)-zJ_{\alpha+1}(z)\qquad \alpha=0\Rightarrow J'_0(z)=-J_1(z)$$

$$J'_\alpha(z)=\frac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right]$$

$$zJ'_\alpha(z)=zJ_{\alpha-1}(z)-\alpha J_\alpha(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right)=z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$$

$$\int_{z_0}^{z} z^\alpha J_{\alpha-1}(z)dz=\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right)dz=z^\alpha J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$$

28

31

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_\alpha(z)\right)=-z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)$$

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)dz=-\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_\alpha(z)\right)dz=-z^{-\alpha}J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$$

$$\int_{0}^{z} J_\alpha(z)dz=2\left[J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha+3}(z)+\ldots\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{\alpha+2k+1}(z)$$

$$I_m=\int_0^z z^m J_m(z)dz\ \Rightarrow\ I_m=-z^m J_{m-1}(z)+(2m-1)I_{m-1}$$

$$I_{m,n}=\int_0^z z^m J_n(z)dz\Rightarrow I_{m,n}=z^m J_{n+1}(z)-(m-n-1)I_{m-1,n+1}$$

29

32

Ví dụ 3.6: *Tính tích phân* $I=\int_0^\lambda z^3J_0(z)dz$ *theo* $J_1(\lambda)$ *và* λ, trong đó λ là một nghiệm dương của phương trình $J_0(z)=0$

Áp dụng các công thức truy toán của hàm Bessel ta có

$$I_{3,0}=z^3J_1(z)-2I_{2,1}=z^3J_1(z)-2z^2J_2(z)$$

$$I_{3,0}=z^3J_1(z)-2z^2\left(\frac{2}{z}J_1(z)-J_0(z)\right)=(z^3-4z)J_1(z)+2z^2J_0(z)$$

$$I=I_{3,0}\Big|_{z=\lambda}=(z^3-4z)J_1(z)+2z^2J_0(z)\Big|_{z=\lambda}=(\lambda^3-4\lambda)J_1(\lambda)$$

30

33

d. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2 với cấp bán nguyên

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\qquad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$Y_{1/2}(z)=-J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\ ;\ Y_{-1/2}(z)=J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$J_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)\qquad J_{-3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right)$$

$$J_{5/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z\right\}$$

$$J_{-5/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z+\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right\}$$

32

34

e. Các phương trình vi phân đưa về phương trình Bessel

1. Phương trình dạng $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(k^2-\dfrac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0$

   Công thức nghiệm
   $$Z_\alpha(kx)=\begin{cases}AJ_\alpha(kx)+BJ_{-\alpha}(kx) & \text{nếu}\ \ \alpha\neq n\\ AJ_\alpha(kx)+BY_\alpha(kx) & \text{nếu}\ \ \alpha=n\end{cases}$$

2. Phương trình dạng
   $$y''+\left(2a+\frac{1}{x}\right)y'+\left(b+\frac{a}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0$$

   Công thức nghiệm
   $$y=e^{-ax}Z_\alpha\left\{\sqrt{b-a^2}\,x\right\},\ \text{nếu}\ \ b\neq a^2$$
   $$y=e^{-ax}\left(Ax^\alpha+Bx^{-\alpha}\right)\ \text{nếu}\ \ b=a^2,\alpha\neq 0$$
   $$y=e^{-ax}(A+B\ln x)\ \text{nếu}\ \ b=a^2,\alpha=0$$

33

35

3. Phương trình dạng
   $$y''+\left[\frac{1}{x}-2g(x)\right]y'-\left[1-\frac{\alpha^2}{x^2}+g^2(x)-g'(x)-\frac{g(x)}{x}\right]y=0$$

   Công thức nghiệm $\quad y=e^{\int g(x)dx}Z_\alpha(x)$

4. Phương trình dạng
   $$y''+\left(\frac{1}{x}+2\cot x\right)y'-\left(\frac{\alpha^2}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)y=0$$

   Công thức nghiệm $\quad y=\dfrac{1}{\sin x}Z_\alpha(x)$

34

36

Bài kiểm tra trắc nghiệm TKT

37