ÔN TẬP SỐ PHỨC

1. Dạng tổng quát của số phức

$z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực

$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$

$\bar{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp với số phức $z = x + iy$

$z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2; \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Tập hợp tất cả các số phức ký hiệu $\mathbb{C}$

2. Các phép toán

Phép cộng

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Phép trừ

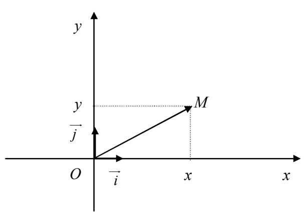
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Phép nhân

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Phép chia $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

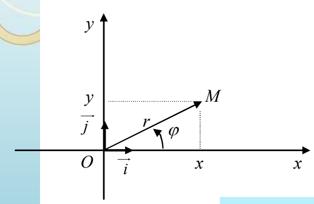
3. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức



Đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x; y)$ với số phức $z = x + iy$

lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức

4. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức



mô đun

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

argument

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

dạng lượng giác $\quad z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

dạng mũ $\quad z = |z| e^{i\varphi}$

Công thức Euler $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

5. Lũy thừa và căn của số phức

Lũy thừa bậc n

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \; \operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Căn bậc n

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ví dụ 1.11: Tính $\sqrt[4]{1+i}$

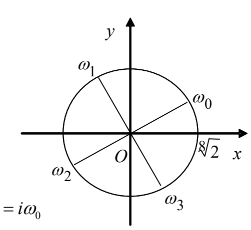
$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2})\right) = i\omega_0$$

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \pi)\right) = -\omega_0$$

$$\omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2})\right) = -i\omega_0$$



1.1. HÀM BIẾN PHỨC

1.1.1. Lân cận, miền

Lân cận

ε – lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$

N – lân cận của $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ $\quad B_N(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > N\} \cup \{\infty\}$

Miền

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là *tập mở*

Tập D là *tập liên thông* nếu với bất kỳ 2 điểm nào của tập D cũng có thể nối chúng bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D

Một tập mở và liên thông được *gọi là miền*

1.1.2. Định nghĩa hàm biến phức

Một hàm biến phức $f : D \to \mathbb{C}, z \mapsto w = f(z)$ *là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức* $z \in D$ *với một hoặc nhiều số phức* w

$$z = x + iy \;;\; w = f(z) = u + iv \;\Rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

1.1.3. Giới hạn, liên tục

$$z_n = x_n + iy_n,\; L = a + ib;\;\; \lim_{n\to\infty} z_n = L \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

$w = f(z)$ liên tục tại z_0 nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

1.1.4. Hàm khả vi, phương trình Cauchy-Riemann

Định nghĩa: *Giả sử $z = x + iy$ là một điểm thuộc miền xác định D của hàm phức đơn trị $w = f(z)$. Nếu tồn tại giới hạn dưới đây thì ta nói hàm $f(z)$* **khả vi** *(hay có đạo hàm) tại z, còn giới hạn này được gọi là đạo hàm tại z, ký hiệu $f'(z)$.*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Nếu hàm phức $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi

thì phần thực và phần ảo có các đạo hàm riêng cấp 1 và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Hàm chỉnh hình (giải tích)

Định nghĩa

Hàm đơn trị $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto w = f(z)$ khả vi trong một lân cận của z thì được gọi là hàm chỉnh hình (hoặc giải tích) tại z.
Nếu f(z) khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói f giải tích trong D.
Nếu f(z) giải tích trong một miền chứa $\overline{D}$ thì ta nói f giải tích trong $\overline{D}$.

Chú ý: Khái niệm khả vi và đạo hàm của hàm phức định nghĩa một cách hình thức giống hệt như hàm thực. Vì vậy, những tính chất cơ bản của đạo hàm của hàm phức cũng giống như hàm thực.

Các hàm phức sơ cấp cơ bản

Hàm lũy thừa $w = z^n$ $\quad$ **Hàm căn** $w = \sqrt[n]{z}$

Hàm mũ $w = e^z$ $\quad$ **Hàm lôgarit** $w = \mathrm{Ln}\, z \Leftrightarrow z = e^w$

Các hàm lượng giác phức

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\; \forall z \in \mathbb{C}$$

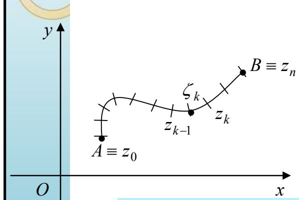
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\; \cot z = \frac{\cos z}{\sin z};\;\; z \neq k\pi$$

Các hàm lượng giác hyperbolic phức

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\; \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\; \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\; \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

1.2. TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

1.2.1. Tích phân hàm biến phức dọc theo đường trong mặt phẳng phức



Chia L thành n đoạn bởi các điểm $A \equiv z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \equiv B$

Chọn trên mỗi cung con $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$

$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$

Tổng tích phân $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

$$I = \int_{AB} f(z)dz = \lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Tính chất

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz \;;\quad \left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$$

Tích phân theo chiều dương của đường khép kín L : $\oint_L f(z)dz$

12

13

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Ví dụ 1.17: Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz \;;\; A = 0,\, B = 2+4i$

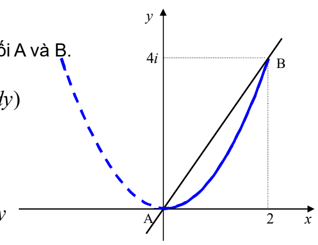
1. Dọc theo parabol : $y = x^2,\; 0 \le x \le 2$

2. Dọc theo đường thẳng nối A và B.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x+iy)^2(dx+idy)$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2-y^2)dx - 2xydy$$

$$+\, i\int_{\overset{\frown}{AB}} 2xydx + (x^2-y^2)dy$$



13

14

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Định lý tích phân Cauchy

Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm *f(z)* trong miền *D* không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của *f(z)* dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong *D* phải bằng 0.

Định lý 1: Tích phân của hàm phức chỉnh hình dọc theo mọi đường cong kín *L* bất kỳ trong miền đơn liên đều bằng 0.

Hệ quả: Nếu *f(z)* giải tích trong miền kín đơn liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ∂D thì $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$

Định lý 2: Nếu *f(z)* giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ngoài Γ_0 và các biên trong $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz$$

14

15

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.2.2. Công thức tích phân Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz \Rightarrow \oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{nếu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nếu } a \notin \overline{D} \end{cases}$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{nếu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nếu } a \notin \overline{D} \end{cases}$$

15

16

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.3. CHUỖI BIẾN SỐ PHỨC

1.3.1. Chuỗi số phức

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;,\quad u_n = a_n + ib_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

1.3.2. Chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n$$

Tập hợp các giá trị *z* sao cho chuỗi hội tụ được gọi là miền hội tụ

16

17

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Ví dụ 1.21: Xét chuỗi luỹ thừa cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \text{nếu } z \ne 1 \\ n & \text{nếu } z = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{khi } |z| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{khi } |z| \ge 1 \end{cases}$$

Miền hội tụ của chuỗi là hình tròn |z|<1

17

18

Bán kính hội tụ của chuỗi là số R thỏa mãn:

Chuỗi hội tụ khi $|z|<R$ và phân kỳ khi $|z|>R$

Tiêu chuẩn D'Alembert $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$

Tiêu chuẩn Cauchy $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$

$$R = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho} \text{ nếu } 0<\rho<\infty \\ \infty \text{ nếu } \rho = 0 \end{cases}$$

Nếu chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R>0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

thì

$$f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^z c_n (z-a)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

$f'(z)$, $F(z)$ cũng có bán kính hội tụ là R

1.3.3. Chuỗi Taylor

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ ***chuỗi Taylor*** của hàm f tại *a*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ ***chuỗi Mac Laurin***

Định lý 1.13:
1) Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.
2) Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $|z-a|<R$. Bán kính hội tụ R là số thực dương lớn nhất sao cho $f(z)$ giải tích trong lân cận $|z-a|<R$.

1.3.4. Khai triển thành chuỗi Mac Laurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

1.3.5. Chuỗi Laurent và điểm bất thường

Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn

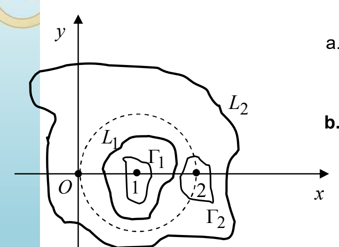
$$K = \{z \mid r < |z-a| < R\},\quad 0 \le r < R \le \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ (*) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong K bao quanh a,
được gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại a

Định lý 1.16 **(định lý tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent):**
1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn K đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent.
2. Ngược lại, chuỗi bất kỳ có dạng (*) hội tụ trong hình vành khăn K có hàm tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$ trong hình vành khăn K.

Ví dụ 1.25: Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent có tâm tại $z=1$



a. Khai triển Laurent trong miền $0 < |z-1| < 1$:

b. Khai triển Laurent trong miền $|z-1| > 1$:

a. Khai triển Laurent trong miền 0 < |*z* –1| < 1:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz \qquad n+2 \le 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$n=-1 \Rightarrow c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}dz = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=1} = -1$$

$$n \ge 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = -1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

b. Khai triển Laurent trong miền |*z* –1| >1:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \le -2 \\ -1 & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz = \frac{1}{(z-1)^{n+2}}\Bigg|_{z=2} = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

Định nghĩa: Nếu hàm f(z) giải tích trong hình vành khăn $0 < |z-a| < R$ và không giải tích tại a thì a được gọi là điểm bất thường cô lập hay kỳ dị cô lập của hàm f.

Theo ĐL Laurent, có thể khai triển thành chuỗi Laurent của hàm trong hình vành khăn ứng với điểm bất thường cô lập. Do đó

TH1: Nếu khai triển Laurent của hàm chỉ có phần đều, nghĩa là

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

thì a được gọi là điểm bất thường khử được. Khi đó $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$

TH2: Nếu khai triển Laurent của hàm có phần chính chứa hữu hạn số hạng, nghĩa là

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

thì a được gọi là cực điểm cấp n (n=1 gl cực điểm đơn). Khi đó $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

TH3: Nếu khai triển Laurent của hàm có phần chính chứa vô hạn số hạng, thì a được gọi là điểm bất thường cốt yếu. Khi đó, không tồn tại

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

1.4. THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

1.4.1. Định nghĩa và cách tính thặng dư

Cho f là hàm giải tích trong hình vành khăn $K = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$.

Số phức $\left[\text{Res } f(z); a\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, với C là đường cong bao a,

được gọi là thặng dư của hàm f tại a.

Cách tính thặng dư

$$\left[\text{Res } f(z); a\right] = c_{-1}$$

$\left[\text{Res } f(z); a\right] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ nếu *a* là cực điểm đơn

$\left[\text{Res } f(z); a\right] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$ cực điểm cấp *m*

1.4.2. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

a. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân phức

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } f(z); a_k\right]$$

f(*z*) có các điểm bất thường cô lập $a_1, \ldots, a_n \in D$

Ví dụ 1.29: Tính tích phân $I = \oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$

$$\left[\text{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; 1\right] = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16} \qquad C: |z| = 2,\ I = 2\pi i\frac{e}{16} = \frac{e\pi i}{8}$$

$$\left[\text{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; -3\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-1}\right] = -\frac{5e^{-3}}{16}$$

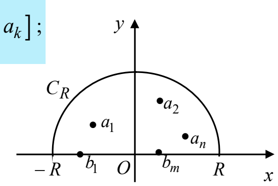
$C: |z| = 4$

$$I = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right)$$

b. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân thực

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } R(z); a_k\right];$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\beta x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } R(z)e^{i\beta z}; a_k\right] + \pi i\sum_{k=1}^{m}\left[\text{Res } R(z)e^{i\beta z}; b_k\right]$$