1.1. KHÔNG GIAN HILBERT

1.1.1 Định nghĩa tích vô hướng và tính chất

Cho một không gian vec tơ *H* và ánh xạ: $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$$

Ánh xạ trên được gọi là tích vô hướng nếu thoả mãn các điều kiện sau đây:

1. Song tuyến tính

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}, \forall u_1,u_2,v;\ u,v_1,v_2 \in V$$
$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\rangle = \alpha_1 \langle u_1, v\rangle + \alpha_2 \langle u_2, v\rangle$$
$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle = \beta_1 \langle u, v_1\rangle + \beta_2 \langle u, v_2\rangle$$

2. Đối xứng $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle, \forall u,v \in V$

3. Xác định dương $\langle u,u\rangle > 0, \forall u \in V, u \neq 0$

$$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

1.1. KHÔNG GIAN HILBERT

1.1.1 Định nghĩa tích vô hướng và tính chất

Nếu *H* là không gian vec tơ phức thì điều kiện 1 được thay bằng điều kiện về liên hợp phức:

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}, \forall u,v \in V$$

Ví dụ

R^n là không gian véc tơ với tích vô hướng xác định như sau

$$x = (x_1,\ldots,x_n);\ y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x,y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Tích vô hướng có trọng số của không gian véc tơ R^n ứng với các hằng số dương $c_1, \ldots, c_n$ được định nghĩa

$$\langle x,y\rangle = c_1 x_1 y_1 + \ldots + c_n x_n y_n; c_i > 0, \forall i$$

Tích vô hướng có trọng số đặc biệt quan trọng trong thống kê và xử lý dữ liệu, khi ta muốn nhấn mạnh một thành phần nào đó so với các thành phần khác.

Ví dụ

Tích phân

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$

các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$

1.1. KHÔNG GIAN HILBERT

Không gian vec tơ *H* với tích vô hướng $\langle\ ,\ \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert

Với mỗi véc tơ $v \in H$ của kg tiền Hilbert, ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay ***môđun*** của véc tơ *v* qua biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Nếu $||v|| = 1$ thì *v* được gọi là véc tơ đơn vị

Ví dụ

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$
$$v = (1,-2,\ 3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$f(x) \in C^0_{[a,b]} \Rightarrow \|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$$

Định nghĩa:

Dãy các vec tơ $\{u_n\} \subset H$ được gọi là hội tụ về vec tơ $u \in H$ nếu với mỗi số dương ε cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\forall n \geq N : \|u_n - u\| < \varepsilon$$

Một cách tương đương $\forall n \geq N : \|u_n - u\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$

Khi đó, ta ký hiệu: $\lim_{n\to\infty} u_n = u.$

Dãy các vec tơ $\{u_n\}$ được gọi là một dãy cơ bản (dãy Cauchy) nếu

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Chú ý: Mọi dãy hội tụ đều là dãy cơ bản nhưng ngược lại chưa chắc đúng.

Định nghĩa không gian Hilbert:

Một không gian tiền Hilbert thoả mãn điều kiện mọi dãy cơ bản đều hội tụ được gọi là **không gian Hilbert.**

Ví dụ

R^n là không gian Hilbert với tích vô hướng như trong vd trước.

Ví dụ

Không gian các dãy bình phương hội tụ

$$l^2 = \left\{ (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\}$$

với tích vô hướng xác định

$$\langle (\xi_n),(\eta_n)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}$$

là một không gian Hilbert.

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ

Không gian các hàm bình phương khả tích:

$$L^2_{[a,b]} = \left\{ x(t) \in \mathbb{C} : \int_{[a,b]} |x(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

với tích vô hướng xác định

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{[a,b]} x(t)\overline{y(t)} dt$$

là một không gian Hilbert.

7

7

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.1.2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Định lý: Với mọi $u, v \in H$ luôn có

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v phụ thuộc tuyến tính

Nếu một trong hai véc tơ bằng $\mathbf{0}$ thì cả hai vế của bất đẳng thức trên đều bằng 0, do đó bất đẳng thức nghiệm đúng

Giả sử $v \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ta có $0 \le \langle u + tv, u + tv \rangle = t^2 \|v\|^2 + 2t \langle v, u \rangle + \|u\|^2 = F(t)$

$$\Rightarrow \Delta'_F = |\langle v, u \rangle|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 \le 0 \ \Rightarrow |\langle v, u \rangle|^2 \le \|v\|^2 \|u\|^2$$

Khi u, v phụ thuộc thì $u = kv$ (hoặc $v = ku$)

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle kv, v \rangle| = |k| \cdot \|v\|^2 = \|kv\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|$$

Ngược lại nếu $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ thì $\Delta'_F = 0$

Do đó tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $F(t_0) = \langle u + t_0 v, u + t_0 v \rangle = 0 \Rightarrow u = -t_0 v$

8

8

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.1.3. Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Schmidt

Hai véc tơ $u, v \in H$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$

nếu $\langle u, v \rangle = 0$

Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ của H được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn

Định lý

Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính

9

9

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Định lý

Giả sử $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của không gian Hilbert H.

Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1, \dots, v_n\}$ sao cho

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}; \ \forall k = 1, \dots, n$$

Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là ***quá trình trực chuẩn hoá Gram-Schmidt***

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad \overline{v_2} = -\langle u_2, v_1 \rangle v_1 + u_2 \qquad v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$$

$$\overline{v_k} = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i + u_k \qquad v_k = \frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$$

10

10

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ Trực chuẩn hoá hệ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1); \ u_2 = (-1,1,1); \ u_3 = (1,2,1)$$

$$\|u_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\overline{v_2} = -\langle u_2, v_1 \rangle v_1 + u_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + (-1,1,1) = \frac{2}{3}(-2,1,1)$$

$$\|\overline{v_2}\| = \frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\overline{v_3} = -\langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 + u_3 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(0,1,-1)$$

$$\|\overline{v_3}\| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

11

11

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.1.4. Hệ trực chuẩn đầy đủ, chuỗi Fourier

Định lý: Giả sử $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn của H. Khi đó, với mọi $u \in H$, ta có:

1. Nếu $u = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ thì $\xi_n = \langle u, e_n \rangle$

$\xi_n = \langle u, e_n \rangle$ gọi là hệ số Fourier của u đối với e_n còn chuỗi trên gọi là chuỗi Fourier của u theo cơ sở $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\|u\|^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ **(BĐT Bessel)**

Định nghĩa: Hệ trực chuẩn $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ của không gian Hilbert H được gọi là hệ trực chuẩn đầy đủ nếu chỉ có vec tơ 0 mới trực giao với tất cả các phần tử của hệ.

12

12

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.1.4. Hệ trực chuẩn đầy đủ, chuỗi Fourier

Định lý: Giả sử $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn của H và $\xi_n = \langle u, e_n \rangle$ là hệ số Fourier của $u \in H$ đối với e_n. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:

1. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn đầy đủ
2. Với mọi $u \in H$: $u = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$
3. $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$

Định lý Riesz-Fischer: Cho $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ của không gian Hilbert H. Nếu dãy số (ξ_n) thoả mãn $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ thì tồn tại duy nhất vec tơ $u \in H$ nhận ξ_n làm hệ số Fourier và

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n, \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$$

13

13

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.2. CHUỖI FOURIER

Khai triển Fourier của các hàm tuần hoàn

1.2.1. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt;\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos ntdt;\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin ntdt;\ n = 1, 2, \ldots$$

1.2.2. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right)$$

14

14

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.2.3. Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t - \varphi_n \right)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2},\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\quad \cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n},\ \sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n}$$

1.2.4. Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series)

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}t};\quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{c}^{c+2l} x(t) e^{-i\frac{n\pi}{l}t} dt, \forall c$$

$c_0 = a_0 / 2$		$a_0 = 2c_0$
$c_n = (a_n - ib_n)/2$	Hoặc	$a_n = c_n + c_{-n}$
$c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$		$b_n = i(c_n - c_{-n})$

15

15

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.2.5. Đẳng thức Parseval: $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$

$$\frac{1}{T_0} \int_{c}^{c+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Định lý (Dirichlet): Nếu hàm $x(t)$ *tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn (điều kiện Dirichlet)*, thì chuỗi Fourier hội tụ và dấu "~" trong 1.2.1 được thay bởi dấu "=".

Đạo hàm của chuỗi Fourier: Nếu hàm $x(t)$ *tuần hoàn chu kỳ 2π, khả vi liên tục từng khúc đến cấp 2* thì có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi Fourier và

$$\omega(t) = x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(nb_n \cos nt - na_n \sin nt \right)$$

Tích phân của chuỗi Fourier: Nếu hàm $x(t)$ *tuần hoàn chu kỳ 2π, liên tục từng khúc và có giá trị trung bình bằng 0,* thì có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi Fourier và

$$y(t) = \int_0^t x(u)du \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt \right)$$

16

16

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.2.6. Chuỗi Fourier của hàm DELTA

Khái niệm hàm delta

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hoặc hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng.

Hàm delta tại $t = t_0$, ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$, thỏa mãn hai điều kiện sau

$$\forall t \neq t_0 : \delta_{t_0}(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1$$

17

17

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm trơn theo nghĩa thông thường
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp

Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \dfrac{n}{\pi(1 + n^2 t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

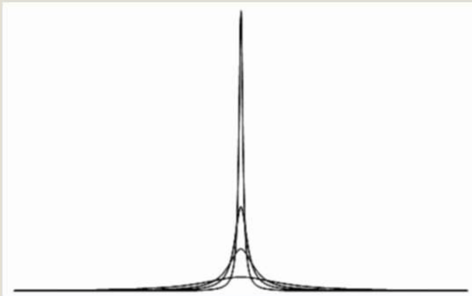
$$\lim_{n \to \infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = \frac{1}{\pi} \arctan nt \Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1$$

18

18

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER



Hình 3.1: *Đồ thị các hàm* $g_n(t)$

19

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Tích chập của hàm delta

$$f(t_0)*\delta(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Với mọi hàm liên tục $x(t)$

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt=\begin{cases}x(v) & \text{nếu } 0<v<l\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_v(u)du=\eta(t-v)=\begin{cases}1 & \text{nếu } t>v\\ 0 & \text{nếu } t<v\end{cases}$$

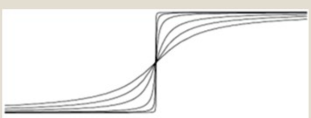
Vậy có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta

20

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

$$f_n(t)=\int_{-\infty}^{t} g_n(u)du=\int_{-\infty}^{t}\frac{n}{\pi\left(1+n^2u^2\right)}du=\frac{1}{\pi}\arctan nt+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } t>0\\ 1/2 & \text{nếu } t=0\\ 0 & \text{nếu } t<0\end{cases}$$



Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm $f_n(t)$

Vậy có thể coi $\dfrac{d\eta(t)}{dt}=\delta(t)$

21

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Khai triển Fourier của hàm delta

Các hệ số Fourier

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\cos n0=\frac{1}{\pi},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\sin n0=0$$

Chuỗi Fourier

$$\delta(t)\sim\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\cdots\right)$$

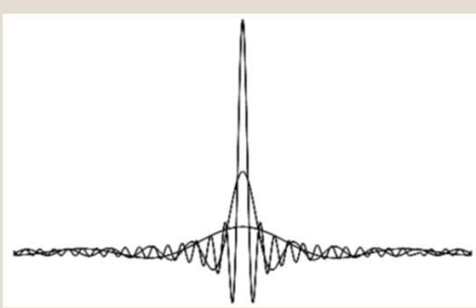
$$\delta(t)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikt}=\frac{1}{2\pi}\left(\cdots+e^{-2it}+e^{-it}+1+e^{it}+e^{2it}+\cdots\right)$$

Tổng riêng của chuỗi Fourier

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

22

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER



Hình 3.7: *Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier hàm delta*

23

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.3. Phép biến đổi Fourier

Công thức tích phân Fourier

Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực và thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\cos\lambda(t-u)du$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{i\lambda(t-u)}du$$

Đổi biến $\lambda=2\pi f$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}df\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{i2\pi f(t-u)}du=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-i2\pi fu}du\right)e^{i2\pi ft}df$$

24

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

a. Phép biến đổi Fourier liên tục

Phép biến đổi Fourier

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}dt,\ f\in\mathbb{R}$$

Công thức biến đổi ngược

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\widehat{X}(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{X}(f)e^{i2\pi ft}df$$

Dạng biên độ - pha của phép biến đổi $\widehat{X}(f)=\left|\widehat{X}(f)\right|e^{i\varphi(f)}$

$$\left|\widehat{X}(f)\right|=\sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}},\quad \varphi(f)=\angle\widehat{X}(f)$$

25

25

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Tính chất của phép biến đổi Fourier

1. Tuyến tính $\mathscr{F}\{Ax(t)+By(t)\}=A\mathscr{F}\{x(t)\}+B\mathscr{F}\{y(t)\}$
2. Trễ $\mathscr{F}\{x(t-T_d)\}=e^{-i2\pi T_d f}\widehat{X}(f)$
3. Dịch chuyển ảnh $\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}x(t)\right\}=\widehat{X}(f-f_0)$
4. Điều chế $\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}=\dfrac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}$
5. Liên hợp phức $\mathscr{F}\{\overline{x(t)}\}=\overline{\widehat{X}(-f)}$
6. Đối ngẫu $\mathscr{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\}=x(-f)$

nếu x(t) là hàm thực chẵn thì $\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\{x(t)\}\Rightarrow\mathscr{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\}=x(f)$

26

26

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

7. Đồng dạng $\mathscr{F}\{x(at)\}=\dfrac{1}{|a|}\cdot\widehat{X}(f/a)$
8. Đạo hàm $\mathscr{F}\left\{\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}\right\}=(2\pi if)^n\widehat{X}(f)$
9. Tích phân $\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}x(u)du\right\}=\dfrac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f)+\dfrac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh $\mathscr{F}\left\{t^n x(t)\right\}=(-i2\pi f)^{-n}\dfrac{d^n\widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập $\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\}=\widehat{X}(f)\widehat{Y}(f)$
12. Tích chập ảnh $\mathscr{F}\{x(t)\cdot y(t)\}=\widehat{X}(f)*\widehat{Y}(f)$

27

27

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\overline{x_2(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{X}(f)\right|^2df$$

Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ 2.64: Hàm phân bố mũ hai phía $x(t)=e^{-\lambda|t|},\ \lambda>0$

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\lambda|t|}\right\}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2f^2}\qquad \mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2}\right\}=e^{-\lambda|f|},\ \lambda>0$$

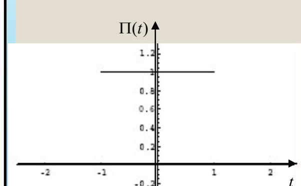
28

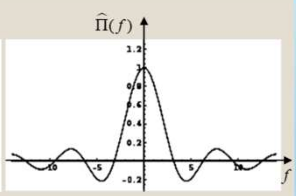
28

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Biến đổi Fourier của xung chữ nhật hay hình hộp có độ dài *2a*

$$\Pi_a(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } |t|<a\\ 0 & \text{nếu } |t|>a,\ a>0\end{cases}\qquad \mathscr{F}\{\Pi_a(t)\}=2a\,\mathrm{sinc}(2af)$$





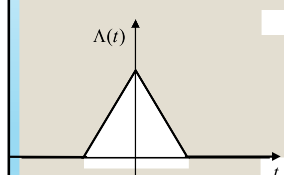
29

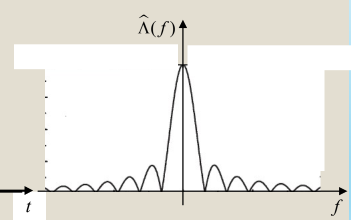
29

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Xung tam giác đơn vị

$$\Lambda(t)=\begin{cases}1-|t| & \text{nếu } |t|<1\\ 0 & \text{nếu } |t|>1\end{cases}\qquad \mathscr{F}\{\Lambda(t)\}=\mathrm{sinc}^2(f)$$





30

30

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

b. Phép biến đổi Fourier hữu hạn

Biến đổi Fourier hữu hạn của dãy tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$$

Công thức biến đổi ngược

$$x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}\,df$$

31

31

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi nf} = \frac{1-e^{-i2\pi Nf}}{1-e^{-i2\pi f}} = e^{-i\pi(N-1)f}\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

Biến đổi Fourier qua miền tần số góc ω

$$\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$$

$$x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega n}\,d\omega$$

32

32

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Tính chất của phép biến đổi Fourier hữu hạn

1. Tuyến tính $\mathscr{F}\{Ax(n)+By(n)\} = A\mathscr{F}\{x(n)\} + B\mathscr{F}\{y(n)\}$

2. Trễ $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\{x(n-n_0)\} = e^{-i2\pi n_0 f}\widehat{X}(f)$

3. Dịch chuyển ảnh $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{i2\pi nf_0}x(n)\right\} = \widehat{X}(f-f_0)$

4. Điều chế $\mathscr{F}\{x(n)\cos(2\pi nf_0)\} = \dfrac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}$

5. Liên hợp phức $\mathscr{F}\left\{\overline{x(n)}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{x(n)}e^{-i2\pi nf} = \overline{\widehat{X}(-f)}$

6. Biến số đảo $\mathscr{F}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi nf} = \widehat{X}(-f)$

33

33

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

7. Tích chập $\mathscr{F}\{x(n)*y(n)\} = \mathscr{F}\{x(n)\}\cdot\mathscr{F}\{y(n)\}$

8. Tích chập ảnh $\mathscr{F}\{x(n)\cdot y(n)\} = \mathscr{F}\{x(n)\} * \mathscr{F}\{y(n)\}$

9. Biến đổi của hàm tương quan

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} \qquad \mathscr{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$$

10. Đạo hàm ảnh $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathscr{F}\{nx(n)\} = \dfrac{i}{2\pi}\cdot\dfrac{d\widehat{X}(f)}{df}$

11. Đẳng thức Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(-f)}\,df \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \int_0^1 \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df$$

34

34

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.4. Phép biến đổi Fourier rời rạc

Xây dựng phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tuần hoàn, chu kỳ 2π
Các điểm mẫu tương ứng

$$t_0 = 0,\ t_1 = \frac{2\pi}{n}, t_2 = \frac{4\pi}{n}, \dots, t_j = \frac{2j\pi}{n}, \dots, t_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Véc tơ mẫu $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),\quad x_j = x(t_j) = x\left(\dfrac{2j\pi}{n}\right)$

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1e^{it} + c_2e^{i2t} + \dots + c_{n-1}e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}$$

trong đó $x(t_j) = p(t_j) \quad \forall\, j = 0, \dots, n-1$

35

35

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Các hệ số $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

trong cơ sở trực chuẩn $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$

$$c_k = \langle \mathbf{x}; \omega_k \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j\overline{e^{ikt_j}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ikt_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{-jk}x_j$$

$$\mathscr{E}^k = e^{i2k\pi/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k = 0, \dots, n-1$$

$$DFT\{x(t)\} = \widehat{X}(k) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}),\ c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{-jk}x_j, x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$$

$$IDFT\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \quad x_j = \sum_{j=0}^{n-1}\mathscr{E}^{jk}c_k$$

36

36

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Xét trường hợp *n = 4*

$$\mathscr{E} = e^{i2\pi/4} = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,\ \mathscr{E}^2 = -1,\ \mathscr{E}^3 = -i$$

các giá trị mẫu

$$x_0 = x(0),\ x_1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right),\ x_2 = x(\pi),\ x_3 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

cơ sở trực chuẩn

$$\omega_0 = (1,1,1,1),\ \omega_1 = (1,i,-1,-i),\ \omega_2 = (1,-1,1,-1),\ \omega_3 = (1,-i,-1,i)$$

$$c_0 = \langle \mathbf{x};\omega_0\rangle = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3),\ c_1 = \langle \mathbf{x};\omega_1\rangle = \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3)$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x};\omega_2\rangle = \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3),\ c_3 = \langle \mathbf{x};\omega_3\rangle = \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)$$

37

37

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Xét tín hiệu $x(t) = 2\pi t - t^2$

Các giá trị mẫu

$$x_0 = 0;\quad x_1 = 7,4022;\quad x_2 = 9,8696;\quad x_3 = 7,4022$$

Các hệ số Fourier rời rạc

$$c_0 = 6,1685;\ c_1 = -2,4674;\ c_2 = -1,2337;\ c_3 = -2,4674$$

Đa thức lượng giác nội suy của biến đổi Fourier rời rạc

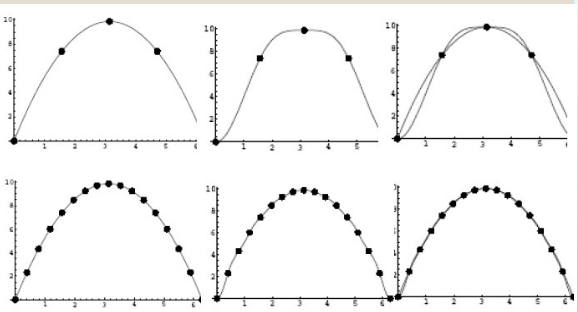
$$\hat{p}(t) = -1,2337e^{-i2t} - 2,4674e^{-it} + 6,1685 - 2,4674e^{it}$$

$$\operatorname{Re}\hat{p}(t) = 6,1685 - 4,9348\cos t - 1,2337\cos 2t$$

38

38

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER



Hình 2.17: *Biến đổi Fourier tần số thấp của* $2\pi t - t^2$ *ứng với* $n = 4$ *và* $n = 16$

39

39

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.5. WAVELET

1.5.1 Haar wavelet

Hàm Haar wavelet thứ nhất gọi là scaling:

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi(t) \equiv 1, 0 \le t \le 1$$

Hàm Haar wavelet thứ hai gọi là wavelet mẹ (mother)

$$\varphi_2(t) = \omega(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2, \\ -1, & 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

Hàm Haar wavelet thứ ba và bốn gọi là wavelet con (daughter)

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/4, \\ -1, & 1/4 < t < 1/2, \\ 0, & 1/2 < t < 1. \end{cases} \quad \varphi_4(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/2, \\ 1, & 1/2 < t < 3/4, \\ -1, & 3/4 < t < 1. \end{cases}$$

Sau khi mở rộng trên toàn tập số thực, ta có các biểu diễn:

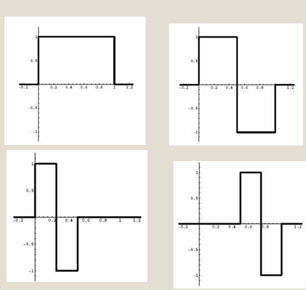
$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t-1),$$
$$\omega(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) = \eta(t) - 2\eta(t-1/2) + \eta(t-1),$$
$$\varphi_3(t) = \omega(2t), \varphi_4(t) = \omega(2t-1)$$

40

40

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Cần xây dựng một hệ trực giao đầy đủ có các tính chất tốt như hàm lượng giác Fourier, đồng thời chuyển tải được tính chất địa phương hoá của các tín hiệu.



41

41

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Trong không gian các hàm xác định trong [0,1], xét tích vô hướng:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

Với tích vô hướng này thì 4 hàm Haar wavelet trực giao với nhau

Rời rạc hoá 4 hàm này bằng cách chia đoạn $[0,1]$ thành 4 khoảng

$$\left(1,\frac{1}{4}\right);\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right);\left(\frac{3}{4},1\right)$$

Do trên mỗi khoảng, các hàm Haar không đổi nên ta biểu diễn mỗi hàm tương ứng với một vec tơ của $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,1,-1,-1),\ v_3 = (1,-1,0,0),\ v_4 = (0,0,1,-1)$$

42

42

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Tạo thành một cơ sở trực giao với tích vô hướng có trọng số:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)$$

Tương ứng x(t) và x là ánh xạ đẳng cự vì x(t)~x, y(t)~y

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt = \frac{1}{4}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) = \langle x, y\rangle$$

Ta có biểu diễn duy nhất của các hàm x(t) qua các hàm Haar wavelet:

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) + c_4\varphi_4(t)$$

với vec tơ mẫu tương ứng và hệ số

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4, \qquad c_k = \frac{\langle x, \varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\langle x, v_k\rangle}{\|v_k\|^2}$$

Để xác định chính xác hơn các dữ liệu thì cần càng nhiều vec tơ cơ sở. Do đó người ta dùng sự phân bậc (scaling) (Xem GT).

43

43

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.5.2 Daubechies wavelet

Dùng hàm scaling và phân bậc các hàm mẹ trên các đoạn con của [a,b]: $supp\omega_{j,k} = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right]$

Ta có pt giản: $\varphi(t) = c_0\varphi(2t) + c_1\varphi(2t-1) + \ldots + c_p\varphi(2t-p)$

Từ tính trực giao ta suy ra các hằng số c_i

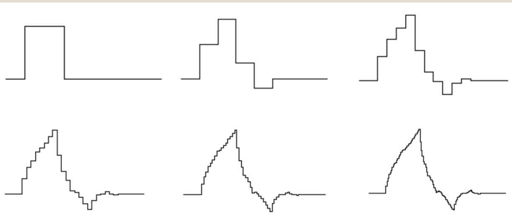
Cụ thể: $\sum_{k=0}^{p} c_k = 2; \sum_{0\le k\le p-2m} c_{2m+k}c_k = \begin{cases} 2, m = 0, \\ 0, m \neq 0. \end{cases}$

$$\varphi_{n+1}(t) = c_0\varphi_n(2t) + c_1\varphi_n(2t-1) + \ldots + c_p\varphi_n(2t-p)$$

44

44

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER



Hình 2.6: *Đồ thị của các hàm* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_5(t)$

45

45

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.5.3 Phép biến đổi wavelet

a. Biến đổi wavelet của hàm liên tục

$$W_{b,a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

Khác với phép biến đổi Fourier thời gian ngắn (short-time Fourier transform viết tắt STFT) gọi là phân tích thời gian – tần số, phân tích wavelet được gọi là phân tích thời gian – phân bậc, vì hàm wavelet có tính phân bậc.

Điều kiện để có biến đổi Wavelet ngược là $C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{|f|}df < \infty$

b. Tính biến đổi wavelet dựa vào bđ Fourier

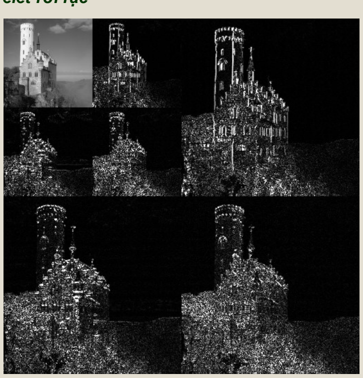
$$W_{b,a} = \left\langle \widehat{X}(f), \widehat{\Psi}_{b,a}(f)\right\rangle = \sqrt{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f)\overline{\Psi(af)}e^{i2\pi bf}df$$

46

46

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Biến đổi wavelet rời rạc



47

47

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.6. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1.6.1. Phép biến đổi Laplace

Định nghĩa biến đổi Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$$

Điều kiện tồn tại

Nếu hàm biến thực $x(t)$ thoả mãn 3 điều kiện sau:

1. $x(t) = 0$ với mọi $t < 0$.
2. $x(t)$ liên tục từng khúc.
3. $x(t)$ không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to \infty$.

Thì tồn tại biến đổi Laplace $X(s)$ xác định và giải tích tại mọi số phức $s = \alpha + i\beta$ sao cho $\alpha > \alpha_0$ thỏa mãn

48

48

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Hàm bước nhảy đơn vị (*Unit step function*)

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ 1 & \text{nếu} \quad t\ge 0\end{cases}$$

$$\mathscr{L}\{\eta(t)\}=\mathscr{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

Ví dụ: Biến đổi Laplace của hàm sin *t*

$$\mathscr{L}\{\sin t\}=X(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt=\frac{1}{1+s^2}$$

49

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. Tính tuyến tính $\mathscr{L}\{Ax(t)+By(t)\}=A\mathscr{L}\{x(t)\}+B\mathscr{L}\{y(t)\}$
2. Tính đồng dạng $\mathscr{L}\{x(at)\}=\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
3. Tính dịch chuyển ảnh $\mathscr{L}\left\{e^{at}x(t)\right\}=X(s-a)$
4. Tính trễ $\mathscr{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\}=e^{-sa}X(s)$
5. Biến đổi của đạo hàm $\mathscr{L}\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)$

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\}=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$$

50

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

6. Biến đổi Laplace của tích phân $\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\}=\frac{X(s)}{s}$
7. Đạo hàm ảnh $\mathscr{L}\left\{t^nx(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}X(s)$
8. Tích phân ảnh $\mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty X(u)du$
9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}=\dfrac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}$
10. Ảnh của tích chập $\mathscr{L}\{x(t)*y(t)\}=X(s)Y(s)$

51

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.6.2. Phép biến đổi Laplace ngược

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}, \quad x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{st}X(s)ds$$

Một vài phương pháp tìm hàm ngược

a. Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược

$$\mathscr{L}^{-1}\{X(s-a)\}=e^{at}x(t) \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}X(s)\right\}=x(t-a)\eta(t-a)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\}=\int_0^t x(u)du \qquad \mathscr{L}^{-1}\{-X'(s)\}=tx(t)$$

52

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

b. Khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$X(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\frac{a_3}{s^4}+\frac{a_4}{s^5}+\cdots$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\frac{a_4t^4}{4!}+\cdots$$

c. Sử dụng thặng dư của tích phân phức

Giả sử hàm *X*(*s*) chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s)<\alpha;\ \alpha>\alpha_0$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\sum_{k=1}^n\left[\mathrm{Res}\,e^{st}X(s);a_k\right]$$

Công thức Heaviside $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^n\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_kt}$

$X(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ Giả sử $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là $a_1, a_2, ..., a_n$

53

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ

Mọi phân thức hữu tỉ thực sự có dạng $X(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II

- Các phân thức hữu tỉ loại I

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at} \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

- Các phân thức hữu tỉ loại II $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^n}$

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau $\dfrac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}$ $\dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}$

54

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$

$$X(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{2s+3}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$$

Ví dụ: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

$$X(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}$$

55

55

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

1.6.3. Ứng dụng của biến đổi Laplace

a. Ứng dụng của biến đổi Laplace để tính tích phân

$$\int_0^\infty e^{-at}x(t)dt=\left(\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt\right)_{s=a}=X(s)\Big|_{s=a}\qquad \int_0^\infty \frac{x(t)}{t}dt=\int_0^\infty X(s)ds$$

Ví dụ:

$$\int_0^\infty e^{-3t}\sin t\,dt=\mathscr{L}\{\sin t\}\big|_{s=3}=\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=3}=\frac{1}{10}$$

$$\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t\,dt=\mathscr{L}\{t\cos t\}\big|_{s=2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2}=\frac{3}{25}$$

Ví dụ:

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)ds=\ln\frac{s+1}{s+3}\Big|_0^\infty=\ln 3$$

56

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

b. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

1. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $x''-2x'+2x=2e^t\cos t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=x'(0)=0$

$$\left(s^2-2s+2\right)X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}\Rightarrow X(s)=\frac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=2e^t\,\frac{t\sin t}{2}=te^t\sin t$$

57

57

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases}x'=2x-3y\\ y'=y-2x\end{cases}\text{ với điều kiện đầu }\begin{cases}x(0)=8\\ y(0)=3\end{cases}$$

Hệ phương trình ảnh

$$\begin{cases}sX-8=2X-3Y\\ sY-3=Y-2X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(s-2)X+3Y=8\\ 2X+(s-1)Y=3\end{cases}$$

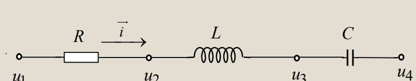
$$\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{3}{s-4}\\ Y=\dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}-\dfrac{2}{s-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=5e^{-t}+3e^{4t}\\ y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}\end{cases}.$$

58

58

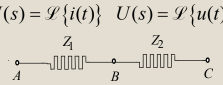
CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

c. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

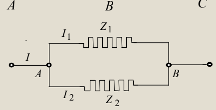


$$u_2(t)-u_1(t)=Ri(t),\ u_3(t)-u_2(t)=L\frac{di(t)}{dt},\ u_4(t)-u_3(t)=\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right)$$

$$I(s)=\mathscr{L}\{i(t)\}\quad U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}\quad Z=\frac{U}{I}\quad Z=R\,;\ Z=Ls\,;\ Z=\frac{1}{Cs}$$



$$Z=Z_1+Z_2$$



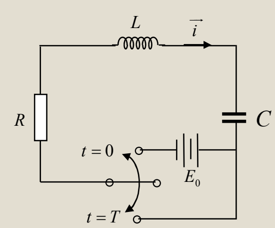
$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$$

59

59

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

Ví dụ: Xét mạch RLC nối tiếp với *R*=110 Ω, *L*=1H, *C*=0,001*F* và một ắc quy cung cấp sức điện động 90*V*. Đóng mạch tại thời điểm *t* = 0 và đến thời điểm *t* =*T*(*T*=1s) ắc quy sẽ được tách ra khỏi mạch, lúc đó mạch RLC cũng đóng nhưng không còn sức điện động. Tìm cường độ *i*(*t*) của dòng điện trong mạch tại thời điểm *t* >0.



60

60

CHƯƠNG I: GIẢI TÍCH FOURIER

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt\right) = E(t),\;\; E(t) = 90\big(\eta(t) - \eta(t-1)\big)$$

$$LsI + RI + \frac{1}{Cs}I = 90\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$I = 90\frac{1-e^{-s}}{s^2 + 110s + 1000} = (1-e^{-s})\left(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100}\right)$$

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - \left(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right)\eta(t-1)$$

61

61