

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

PGS.TS. LÊ BÁ LONG

Giáo trình
TOÁN HỌC ỨNG DỤNG
TRONG ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

(Dành cho học viên cao học chuyên ngành Điện tử-Viễn thông)

Hà Nội, 2009

NỘI DUNG

Phần 1

Chương 1: Giải tích Fourier

Chương 2: Wavelet

Chương 3: Phép biến đổi Laplace

Phần 2

Chương 4: Quá trình ngẫu nhiên, chuỗi Markov

Chương 5: Quá trình dừng

Chương 6: Quá trình Poisson

Chương 7: Lý thuyết sắp hàng

Phụ lục

- Phụ lục A: Biến đổi Z của dãy các tín hiệu thường gặp
- Phụ lục B: Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier
- Phụ lục C: Các cặp biến đổi Fourier thường gặp
- Phụ lục D: Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace
- Phụ lục E: Biến đổi Laplace của các hàm thường gặp
- Phụ lục F: Giá trị hàm mật độ xác suất phân bố chuẩn tắc. Giá trị hàm phân bố chuẩn tắc

GIẢI TÍCH FOURIER

Cuối thế kỷ 18 nhà toán học, nhà vật lý đồng thời là kỹ sư người Pháp tên Jean Baptiste Joseph Fourier đã có khám phá kỳ lạ. Trong một kết quả nghiên cứu của mình về phương trình đạo hàm riêng mô tả sự truyền nhiệt của vật thể, Fourier đã khẳng định rằng “mọi” hàm số đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi vô hạn các hàm lượng giác.

Ban đầu khẳng định của Fourier đã không được các nhà toán học cùng thời tin tưởng và chú ý đến. Tuy nhiên không lâu sau đó các nhà khoa học đã đánh giá cao khả năng ứng dụng và lĩnh vực ứng dụng rộng lớn của ý tưởng này. Phát hiện này của Fourier được xếp hạng “top ten” về thành tựu toán học trong mọi thời đại, trong danh sách này còn có khám phá của Newton về phép tính vi tích phân, của Riemann về hình học vi phân, và 70 năm sau có lý thuyết tương đối của Einstein. Giải tích Fourier là một thành phần không thể thiếu của toán học ứng dụng hiện đại, nó được ứng dụng rộng rãi trong toán lý thuyết, vật lý, kỹ thuật. Chẳng hạn, xử lý tín hiệu hiện đại bao gồm audio, tiếng nói, hình ảnh, video, dữ liệu địa chấn, truyền sóng vô tuyến, v.v ...đều được đặt cơ sở trên giải tích Fourier và những dạng khác của nó. Nhiều công nghệ tiên tiến hiện đại bao gồm truyền hình, CD và DVD âm nhạc, phim video, đồ họa máy tính, xử lý ảnh, phân tích và lưu trữ dấu vân tay ... theo cách này hay cách khác đều có sử dụng những dạng khác nhau của lý thuyết Fourier.

Về mặt lý thuyết người ta có thể phân tích các tín hiệu âm thanh phát ra từ các nhạc cụ như: piano, violin, kèn trumpet, kèn oboe, trống thành chuỗi Fourier để tìm ra các tần số cơ bản (tone, overtone, ...). Về mặt ứng dụng, lý thuyết Fourier còn là một công cụ hiệu quả của âm nhạc điện tử hiện đại; một nhạc cụ điện tử có thể được thiết kế sao cho có thể tổ hợp các tông sin và cosin thuần túy để phát ra các âm thanh kỳ diệu của nhạc cụ. Như vậy, cả hai cách tự nhiên và nhân tạo âm nhạc điện tử đều dựa vào các nguyên lý tổng quát của Fourier.

Ý tưởng ban đầu của Fourier phân tích một hàm số tuần hoàn thành tổng của một chuỗi các hàm lượng giác được mở rộng thành biểu diễn một véc tơ của không gian Hilbert theo hệ trục chuẩn đầy đủ. Vì vậy nếu có một hệ trục chuẩn thì ta có một cách khai triển Fourier.

Trong chương này ta xét những vấn đề chính của giải tích Fourier

- Không gian Hilbert
- Chuỗi Fourier và phép biến đổi Fourier hữu hạn
- Phép biến đổi Fourier
- Phép biến đổi Fourier rời rạc và phép biến đổi Fourier nhanh.

Phép biến đổi Fourier hữu hạn được phát triển trên ý tưởng của khai triển hàm số tuần hoàn thành chuỗi Fourier, trong đó mỗi hàm số hoàn toàn được xác định bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại. Có ba dạng của chuỗi Fourier: dạng cầu phương (công thức 1.24, 1.28),

dạng cực (công thức 1.36) và dạng phức (công thức 1.37, 1.41, 1.42). Phần 1 của mục này sẽ trình bày ba dạng của chuỗi Fourier, các công thức liên hệ giữa chúng và kèm theo lời nhận xét nên sử dụng dạng nào trong mỗi trường hợp cụ thể. Trường hợp hàm không tuần hoàn phép biến đổi Fourier rời rạc được thay bằng *phép biến đổi Fourier*, phép biến đổi ngược duy nhất được xây dựng dựa vào công thức tích phân Fourier.

Khi các hàm số biểu diễn cho các tín hiệu thì biến đổi Fourier của chúng được gọi là *biểu diễn phổ*. Tín hiệu tuần hoàn sẽ có phổ rời rạc, còn tín hiệu không tuần hoàn sẽ có phổ liên tục. Đối số của hàm tín hiệu là thời gian còn đối số của biến đổi Fourier của nó là tần số, vì vậy phép biến đổi Fourier còn được gọi là phép biến đổi miền thời gian về miền tần số.

Trong thực tế ta thường phải tính toán giá trị số của các tín hiệu được rời rạc hoá bằng cách chọn mẫu tại một số hữu hạn các thời điểm, khi đó phổ tương ứng cũng nhận được tại một số hữu hạn các tần số bằng *phép biến đổi Fourier rời rạc*. Ngoài ra để thực hiện nhanh phép biến đổi Fourier rời rạc, người ta sử dụng các *thuật toán biến đổi Fourier nhanh*.

Hướng ứng dụng vào viễn thông: Phân tích phổ, phân tích truyền dẫn tín hiệu, ghép kênh vô tuyến, ghép kênh quang, đánh giá chất lượng WDM...

1.1. KHÔNG GIAN HILBERT

Khái niệm không gian Hilbert là sự mở rộng của khái niệm không gian Euclide, đó là không gian véc tơ hữu hạn chiều với tích vô hướng. Không gian Euclide đã được trang bị trong chương trình toán đại cương ở bậc đại học.

1.1.1. Tích vô hướng

Khái niệm tích vô hướng của hai véc tơ của không gian véc tơ bất kỳ được khái quát từ tích vô hướng $\vec{u}\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$.

Trong không gian véc tơ \mathbb{R}^n tích vô hướng của hai véc tơ

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Được định nghĩa như sau:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (1.1)$$

Tích vô hướng giữ một vai trò rất quan trọng, và là một khái niệm được ứng dụng rộng rãi trong toán học, cơ học, vật lý ... Biết tích vô hướng của mọi cặp véc tơ thì có thể suy ra độ dài của véc tơ (bình phương độ dài của véc tơ bằng tích vô hướng của véc tơ ấy với chính nó) và góc giữa hai véc tơ (cosin của góc này bằng tích vô hướng của hai véc tơ chia cho tích của hai độ dài của chúng). Thành thử trong khái niệm tích vô hướng đã bao hàm khả năng đo độ dài, đo góc, và từ đó đi đến những khái niệm quan trọng khác như tính trực giao, hình chiếu thẳng ...

Khái niệm tích vô hướng được mở rộng đối với không gian véc tơ bất kỳ như sau:

Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương của không gian véc tơ được gọi là một tích vô hướng của không gian véc tơ đó.

Như vậy tích vô hướng $\langle u, v \rangle$ của hai véc tơ u, v trong không gian véc tơ H có các tính chất cốt yếu sau:

- 1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- 2) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$
- 3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ với mọi số thực α
- 4) $\langle u, u \rangle > 0$ nếu $u \neq \mathbf{0}$ và $\langle u, u \rangle = 0$ nếu $u = \mathbf{0}$.

Nếu H là không gian véc tơ trên trường số phức thì điều kiện 1) được thay bằng

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \text{ trong đó } \overline{\langle v, u \rangle} \text{ là số phức liên hợp của số phức } \langle v, u \rangle.$$

Một không gian véc tơ với tích vô hướng được gọi là không gian tiền Hilbert.

Với mỗi véc tơ $v \in H$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay môđun của véc tơ v qua biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (1.2)$$

Nếu $\|v\| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Có thể kiểm chứng được

- 1) $\|v\| \geq 0$ và $\|v\| = 0$ khi và chỉ khi $v = \mathbf{0}$.
- 2) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- 3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Định nghĩa 1.1: Dãy các véc tơ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về véc tơ u nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$, ta ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N; \|u_n - u\| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Dãy các véc tơ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là dãy cơ bản nếu $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$, vậy

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ là dãy cơ bản khi và chỉ khi } \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, m \geq N; \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Có thể chứng minh được rằng mọi dãy hội tụ là dãy cơ bản, tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

Không gian tiền Hilbert thỏa mãn điều kiện mọi dãy cơ bản đều hội tụ được gọi là không gian Hilbert (đây là tính chất đầy đủ của không gian Hilbert).

Ví dụ 1.1: Người ta chứng minh được không gian các dãy bình phương hội tụ

$$l^2 = \left\{ (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\} \quad (1.4)$$

với tích vô hướng xác định như sau

$$\langle (\xi_n); (\eta_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \quad (1.5)$$

là một không gian Hilbert.

Không gian các hàm bình phương khả tích trên đoạn $[a; b]$ (theo nghĩa tích phân Lebesgue)

$$L^2_{[a;b]} = \left\{ x(t) : \int_{[a;b]} |x(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1.6)$$

với tích vô hướng xác định như sau

$$\langle x(t); y(t) \rangle = \int_{[a;b]} x(t) \overline{y(t)} \quad (1.7)$$

cũng là một không gian Hilbert.

Chú ý rằng đối với các hàm liên tục hoặc liên tục từng khúc thì tích phân Lebesgue trùng với tích phân theo nghĩa thông thường.

Hội tụ trong không gian l^2 và $L^2_{[a;b]}$ (công thức 1.7) được gọi là *hội tụ bình phương trung bình*.

1.1.2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Định lý 1.1: *Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*

Với mọi $u, v \in H$, luôn có

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (1.8)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Nếu một trong hai véc tơ bằng $\mathbf{0}$ thì cả hai vế của bất đẳng thức trên đều bằng 0, do đó bất đẳng thức nghiệm đúng.

Giả sử $v \neq \mathbf{0}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta có: $\langle u + tv, u + tv \rangle \geq 0$.

Mặt khác $F(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle = t^2 \|v\|^2 + 2t \langle v, u \rangle + \|u\|^2$ là một tam thức bậc hai đối với t và luôn luôn không âm. Vì vậy $\Delta'_F = \langle v, u \rangle^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Khi u, v phụ thuộc thì $u = kv$ (hoặc $v = ku$):

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle kv, v \rangle| = |k| \cdot \|v\|^2 = \|kv\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Ngược lại nếu $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ thì $\Delta'_F = 0$.

Do đó tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\langle u + t_0 v, u + t_0 v \rangle = 0 \Rightarrow u = -t_0 v$.

Định lý đã được chứng minh. □

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào không gian \mathbb{R}^n với tích vô hướng (1.1) ta có bất đẳng thức **Bunhiacopsky**:

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \quad (1.9)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = ty_1, \dots, x_n = ty_n$.

Hệ quả:

- 1) Nếu dãy các véc tơ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về véc tơ u thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle = \langle u, v \rangle$ đúng với mọi v .
- 2) Nếu dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về u và $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về v thì $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \langle u_n, v_m \rangle = \langle u, v \rangle$.

Chứng minh: 1) $0 \leq |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| = |\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

2) Hai dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ do đó chặn, vì vậy tồn tại C sao cho $\|u_n\| \leq C, \|v_n\| \leq C$ với mọi n .

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle u_n, v_m \rangle - \langle u, v \rangle| &= |\langle u_n - u, v_m \rangle + \langle u, v_m - v \rangle| \leq |\langle u_n - u, v_m \rangle| + |\langle u, v_m - v \rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \|v_m\| + \|u\| \|v_m - v\| \leq C(\|u_n - u\| + \|v_m - v\|) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

1.1.3. Hệ trực chuẩn, trực chuẩn hoá Gram-Schmidt

Định nghĩa 1.2: Hai véc tơ $u, v \in H$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu $\langle u, v \rangle = 0$.

Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ của H được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Vậy hệ các véc tơ $S = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ là hệ trực chuẩn khi thỏa mãn điều kiện

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ trong đó } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \text{ là ký hiệu Kronecker} \quad (1.10)$$

Ví dụ 1.2: Trong không gian véc tơ $L^2_{[0;2\pi]}$ các hàm bình phương khả tích với tích vô hướng xác định bởi công thức (1.7), hệ các hàm số sau là một hệ trực giao

$$\{1, \cos nt; \sin nt; n=1, 2, \dots\} \quad (1.11)$$

Thật vậy

$$\int_0^{2\pi} \cos ntdt = \int_0^{2\pi} \sin ntdt = 0; \quad \forall n \quad (1.12)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \sin mtdt = 0; \quad \forall n, \forall m \quad (1.13)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cos mtdt = \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mtdt = 0; \quad \forall n \neq m \quad (1.14)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 ntdt = \int_0^{2\pi} \sin^2 ntdt = \pi; \quad \forall n \neq 0 \quad (1.15)$$

Định lý 1.2: Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử hệ $S = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ trực chuẩn, khi đó nếu $\xi_1 v_1 + \dots + \xi_m v_m = \mathbf{0}$ thì $\xi_i = \langle \xi_1 v_1 + \dots + \xi_m v_m, v_i \rangle = 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$. Do đó S độc lập tuyến tính.

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 1.3: Giả sử $S = \{u_1, \dots, u_n, \dots\}$ là một hệ các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian Hilbert H . Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S' = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ sao cho

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}; \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots$$

Chứng minh: Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là **quá trình trực chuẩn hoá Gram-Schmidt**.

♦) $k = 1$: Vì hệ S độc lập nên $u_1 \neq \mathbf{0}$. Đặt $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

♦) $k = 2$: Xét $\bar{e}_2 = -\langle u_2, e_1 \rangle e_1 + u_2$, ta có $\bar{e}_2 \neq \mathbf{0}$ (vì nếu $\bar{e}_2 = \mathbf{0}$ thì $u_2 = ke_1$, điều này trái với giả thiết hệ S độc lập). Đặt $e_2 = \frac{\bar{e}_2}{\|\bar{e}_2\|}$, hệ $\{e_1, e_2\}$ trực chuẩn và

$$\text{span}\{e_1, e_2\} = \text{span}\{u_1, u_2\}.$$

♦) Giả sử đã xây dựng được đến $k-1$. Nghĩa là tồn tại $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ trực chuẩn sao cho $\text{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Tương tự trên ta xét

$$\bar{e}_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i + u_k \quad (1.16)$$

ta cũng có $\bar{e}_k \neq \mathbf{0}$ (vì nếu $\bar{e}_k = \mathbf{0}$ thì u_k là tổ hợp tuyến tính của e_1, \dots, e_{k-1} , do đó là tổ hợp tuyến tính của u_1, \dots, u_{k-1} , điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập). Đặt

$$e_k = \frac{\bar{e}_k}{\|\bar{e}_k\|} \quad (1.17)$$

thì $e_k \perp e_i; i = 1, \dots, k-1$. Vậy hệ $\{e_1, \dots, e_k\}$ trực chuẩn và

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}, \bar{e}_k\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_k\}. \quad \square$$

Ví dụ 1.3: Trong \mathbb{R}^3 xét hệ 3 véc tơ độc lập: $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 2, 1)$. Hãy trực chuẩn hoá hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$

Bước 1: $\|u_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bước 2: $\bar{e}_2 = -\langle u_2, e_1 \rangle e_1 + u_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1, 1, 1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\bar{e}_2 = \frac{2}{3}(-2, 1, 1) \Rightarrow e_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

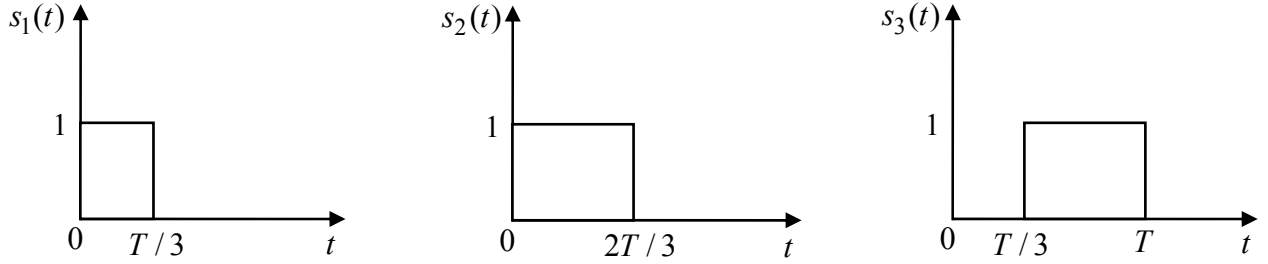
Bước 3: $\bar{e}_3 = -\langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 + u_3$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (1, 2, 1) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{2}(0, 1, -1) \Rightarrow e_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ là hệ véc tơ trực chuẩn hoá của hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Ví dụ 1.4: Xét hệ gồm ba hàm số $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ của không gian $L^2_{[0,T]}$ có đồ thị cho trong hình 1.1



Hình 1.1: Đồ thị ba hàm $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$

Ba hàm số $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ độc lập tuyến tính, trực chuẩn hóa Gram-Schmidt ba hàm số này ta được ba hàm $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ xác định như sau:

$$\langle s_1(t), s_1(t) \rangle = \int_0^T (s_1(t))^2 dt = \frac{T}{3} \Rightarrow e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{T}} s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{3/T} & \text{nếu } 0 \leq t \leq T/3 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

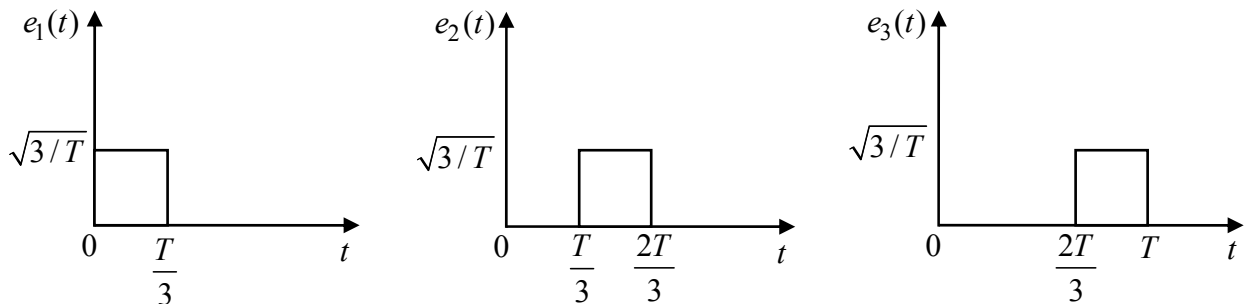
$$\langle s_2(t), e_1(t) \rangle = \int_0^T s_2(t) e_1(t) dt = \sqrt{\frac{T}{3}}$$

$$\bar{e}_2(t) = s_2(t) - \sqrt{\frac{T}{3}} e_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } T/3 \leq t \leq 2T/3 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Vậy
$$e_2(t) = \begin{cases} \sqrt{3/T} & \text{nếu } T/3 \leq t \leq 2T/3 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Tương tự
$$e_3(t) = \begin{cases} \sqrt{3/T} & \text{nếu } 2T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Hệ trực chuẩn $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ có đồ thị



Hình 1.2: Đồ thị hệ trực chuẩn $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$

1.1.4. Hệ trục chuẩn đầy đủ, chuỗi Fourier

Định lý 1.4: Giả sử $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trục chuẩn của không gian Hilbert H , với mọi $u \in H$ ta có:

1) Nếu $u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ thì $\xi_n = \langle u, e_n \rangle$.

Ta gọi $\xi_n = \langle u, e_n \rangle$ là hệ số Fourier của u đối với e_n và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ gọi là chuỗi Fourier của u theo hệ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq \|u\|^2$ (bất đẳng thức Bessel).

3) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ và $\left(u - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) \perp e_n$ với mọi n .

Chứng minh: 1) $\langle u, e_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, e_m \right\rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, e_m \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \langle e_k, e_m \rangle = \xi_m$.

2) Với mọi n : $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k e_k + \left(u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right), \sum_{k=1}^n \xi_k e_k + \left(u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) \right\rangle$
 $= \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle$
 $+ \left\langle u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle + \left\langle u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle$
 $= \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle + \left\langle u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, u - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\rangle \geq \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2$.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq \|u\|^2$.

3) Từ 1) và 2) ta có : với mọi n , với mọi $m \geq n$: $\left\langle \sum_{k=n}^m \xi_k e_k, \sum_{k=n}^m \xi_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n}^m |\xi_k|^2 \rightarrow 0$ khi

$n \rightarrow \infty$, và vì không gian Hilbert đầy đủ nên chuỗi Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ.

Với mọi n : $\left\langle e_n, u - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\rangle = \langle e_n, u \rangle - \left\langle e_n, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\rangle = \langle e_n, u \rangle - \left\langle e_n, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \right\rangle$
 $= \langle e_n, u \rangle - \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle e_n, \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \right\rangle = \xi_n - \xi_n = 0$.

Định lý đã được chứng minh. □

Định nghĩa 1.3: Hệ trực chuẩn $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ của không gian Hilbert H được gọi là hệ trực chuẩn đầy đủ khi chỉ có véc tơ $\mathbf{0}$ mới trực giao với tất cả các phần tử của hệ, nghĩa là:

$$\langle u, e_n \rangle = 0 \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots \text{ thì } u = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

Ví dụ 1.5:

1) Hệ các hàm

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt; n = 1, 2, \dots \right\} \quad (1.19)$$

là một hệ trực chuẩn đầy đủ của không gian Hilbert $L^2_{[0;2\pi]}$.

2) Hệ các véc tơ $e_n \in l^2, n = 1, 2, \dots$

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ trong đó } e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots \quad (1.20)$$

là một hệ trực chuẩn đầy đủ của không gian Hilbert l^2 .

Định lý 1.5: Giả sử $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn của không gian Hilbert H , $\xi_n = \langle u, e_n \rangle$ là hệ số Fourier $u \in H$ đối với e_n . Các mệnh đề sau đây tương đương:

1) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn đầy đủ

2) Với mọi $u \in H : u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$

3) Với mọi $u, v \in H : \langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$ trong đó $\eta_n = \langle v, e_n \rangle$ là hệ số Fourier của v đối với e_n .

4) Với mọi $u \in H : \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$.

Chứng minh: 1) \Rightarrow 2): Theo kết quả 3) của định lý 1.4 ta có $\left(u - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) \perp e_n$ với mọi n , vậy

theo định nghĩa của hệ trực chuẩn đầy đủ (công thức 1.17): $u - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \mathbf{0} \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

2) \Rightarrow 3): $\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m e_m \right\rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \eta_m e_m \right\rangle$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \sum_{m=1}^n \eta_m e_m \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}.$$

3) \Rightarrow 4): Cho $u = v$ ta được $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$.

4) \Rightarrow 1): Giả sử $\xi_n = \langle u, e_n \rangle = 0$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ thì $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = 0$, do đó $u = \mathbf{0}$. Vậy hệ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ đầy đủ.

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 1.6: (Riesz–Fischer). Cho $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn đầy đủ của không gian Hilbert H . Nếu dãy số $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \tag{1.21}$$

Thì sẽ có một véc tơ duy nhất $u \in H$ nhận các số ξ_n làm hệ số Fourier và

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \tag{1.22}$$

Chứng minh: Với mọi $m \geq n$: $\left\langle \sum_{k=n}^m \xi_k e_k, \sum_{k=n}^m \xi_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n}^m |\xi_k|^2$, điều kiện (1.19) kéo theo

$\sum_{k=n}^m |\xi_k|^2 \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, và vì không gian Hilbert đầy đủ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ.

Đặt $u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$, ta có $\langle u, e_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, e_n \right\rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \xi_k e_k, e_n \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \xi_k \langle e_k, e_n \rangle = \xi_n$, vậy

u nhận ξ_n làm hệ số Fourier và vì hệ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ đầy đủ nên ta cũng có (1.21). Ngoài ra nếu có véc tơ v nhận các số ξ_n làm hệ số Fourier thì $\langle u - v, e_n \rangle = \xi_n - \xi_n = 0$ với mọi n , do đó $u - v = \mathbf{0}$. Vậy véc tơ $u \in H$ nhận các số ξ_n làm hệ số Fourier là duy nhất.

Định lý đã được chứng minh. □

1.2 CHUỖI FOURIER

1.2.1 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

Trong không gian $L^2_{[0;2\pi]}$ các hàm bình phương khả tích trên đoạn $[0, 2\pi]$ tích vô hướng xác định theo công thức (1.7) và hệ trục chuẩn (1.19) ta có chuỗi Fourier của hàm $x(t)$ là một chuỗi lượng giác vô hạn có dạng

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1.23)$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt ; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos ntdt ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin ntdt ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Hệ số $\frac{1}{2}$ của số hạng thứ nhất xuất phát từ sự thuận lợi trong việc tính toán sau này.

Theo định lý 1.5 chuỗi Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ của hàm $x(t)$ với các hệ số thỏa mãn (1.23) hội tụ về $x(t)$ theo nghĩa bình phương trung bình (1.3). Tuy nhiên chưa chắc hội tụ theo điểm, chính vì vậy người ta dùng ký hiệu \sim thay cho dấu $=$.

Các câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên:

- (i) Khi nào chuỗi lượng giác vô hạn (1.23) hội tụ?
- (ii) Loại hàm $x(t)$ nào có thể biểu diễn thành tổng của chuỗi Fourier? Nghĩa là có thể thay dấu $=$ thay cho dấu \sim .

Định lý 1.7 (Định lý Dirichlet): Nếu hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π , đơn điệu từng khúc và bị chặn (gọi là điều kiện Dirichlet), thì chuỗi Fourier hội tụ và dấu “ \sim ” trong công thức (1.23) được thay bằng dấu “ $=$ ”.

Tại các điểm gián đoạn ta ký hiệu

$$x(t) = \frac{x(t+0) + x(t-0)}{2} \quad (1.25)$$

trong đó $x(t+0)$, $x(t-0)$ lần lượt là giới hạn phải và giới hạn trái của $x(t)$ tại t .

Ví dụ 1.6: Xét hàm số $x(t) = t$, $-\pi < t < \pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π . Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos ntdt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin ntdt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin ntdt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t \cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} = 2 \left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \dots \right) \quad (1.26)$$

Áp dụng định lý 1.7 ta có

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} = \begin{cases} t & \text{nếu } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } t = \pm\pi \end{cases}$$

Thay $t = \frac{\pi}{2}$ và chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ví dụ 1.7: Xét hàm số $x(t) = |t|$, $-\pi < t < \pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π . Vì $x(t)$ là hàm chẵn nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin ntdt = 0; \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos ntdt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t \sin nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2} \right]_{t=0}^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k \neq 0 \\ -\frac{4}{n^2 \pi} & \text{nếu } n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$|t| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \frac{\cos 7t}{49} + \dots \right) \quad (1.27)$$

Thay $t = 0$ ta được

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ví dụ 1.8: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn chu kỳ 2π xác định như sau

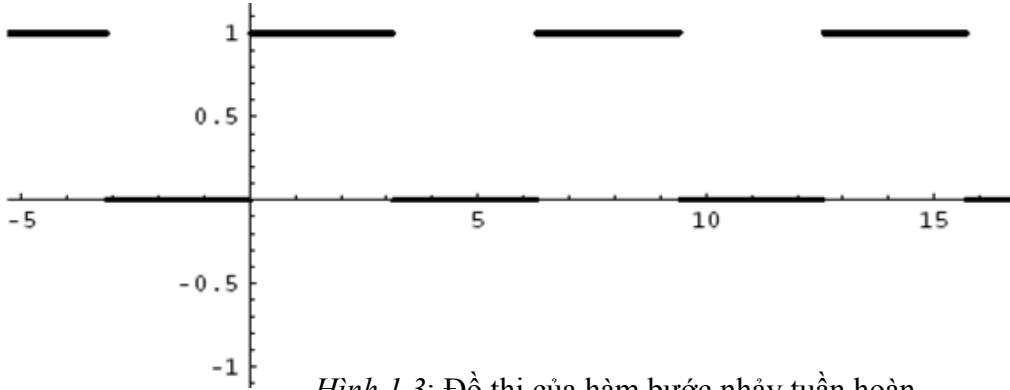
$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Các hệ số Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dt = 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ntdt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ntdt = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{nếu } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{nếu } n = 2k \end{cases}$$

Chuỗi Fourier tương ứng $\eta(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right)$

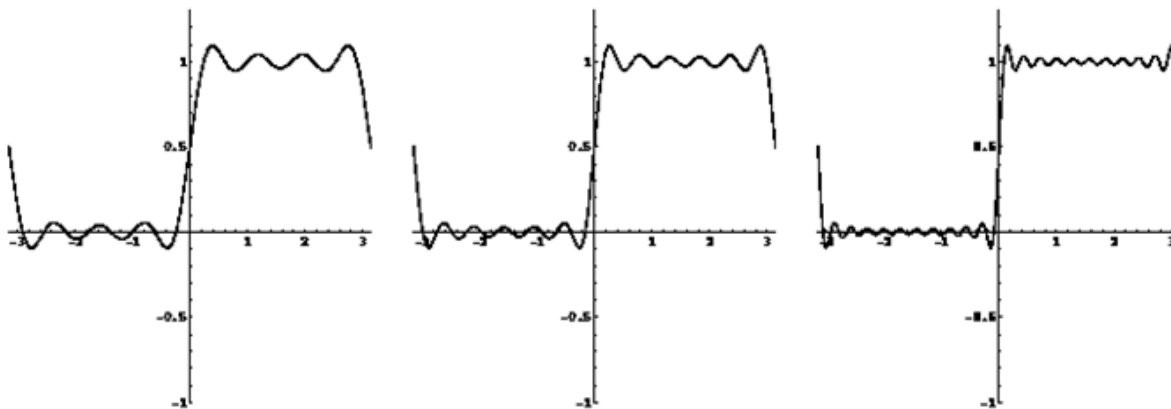


Hình 1.3: Đồ thị của hàm bước nhảy tuần hoàn

Áp dụng định lý 1.7 ta có công thức

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (2k+1)\pi < t < 2k\pi \\ 1 & \text{nếu } 2k\pi < t < (2k+1)\pi \\ 1/2 & \text{nếu } t = k\pi \end{cases}$$

Các đồ thị sau tương ứng là đồ thị của tổng riêng lần lượt có 3, 5 và 10 số hạng của chuỗi Fourier của hàm bước nhảy tuần hoàn.



Hình 1.4: Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier của hàm bước nhảy tuần

Từ các đồ thị trên ta nhận thấy rằng mặc dù hàm gốc gián đoạn nhưng các tổng riêng của chuỗi Fourier tương ứng là các hàm liên tục hội tụ, mặc dù chậm chạp. Tuy nhiên gần vị trí gián đoạn của hàm thì đồ thị của các tổng riêng Fourier vượt quá vị trí khoảng 9%. Vùng vượt quá vị trí này càng nhỏ khi số các số hạng của tổng riêng Fourier tăng lên, nhưng độ lớn của nó không thay đổi. Điều này giải thích tính chất không hội tụ đều của chuỗi Fourier. Hiện tượng này lần

đầu tiên được nhà vật lý Josiah Gibbs (người Mỹ) phát hiện và ngày nay người ta gọi là hiện tượng Gibbs.

1.2.2 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$

Trường hợp hàm tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ, ta có thể đổi biến để đưa về chu kỳ 2π và áp dụng các kết quả ở mục trên.

Giả sử $x(t)$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$. Đặt $y(t) = x\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ thì $y(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Nếu $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet thì $y(t)$ cũng thỏa mãn điều kiện Dirichlet, do đó có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

trong đó $y(t)$ ở vế trái của đẳng thức trên được quy ước như (1.25).

Thay biến số ta có

$$x(t) = y\left(\frac{\pi}{l}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}t + b_n \sin \frac{n\pi}{l}t \right) \quad (1.28)$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} x(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} x(t) \cos \frac{n\pi}{l}t dt; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} x(t) \sin \frac{n\pi}{l}t dt; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

Ví dụ 1.9: Xét hàm số $x(t) = t$, $-1 < t < 1$; tuần hoàn chu kỳ 2. Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 t dt = 0, \quad a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 t \cos n\pi t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 t \sin n\pi t dt = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t dt = 2 \left[-\frac{t \cos n\pi t}{n\pi} + \frac{\sin n\pi t}{(n\pi)^2} \right]_0^1 = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi t}{n} = \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi t - \frac{\sin 2\pi t}{2} + \frac{\sin 3\pi t}{3} - \frac{\sin 4\pi t}{4} + \dots \right).$$

Nhận xét 1.1:

- Hàm tuần hoàn chu kỳ 2π là một trường hợp đặc biệt của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, vì vậy các nhận xét sau đây được giả thiết là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$. Ngoài ra do tính chất tích phân của hàm tuần hoàn nên các hệ số Fourier (1.24) cũng có thể tính như sau:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{2l+c} x(t) dt ; a_n = \frac{1}{l} \int_c^{2l+c} x(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt ; b_n = \frac{1}{l} \int_c^{2l+c} x(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt ; n = 1, 2, \dots \forall c$$

Để công thức có tính đối xứng người ta thường chọn $c = -l$:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) dt ; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt ; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt ; n = 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

2. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t) \cos \frac{n\pi}{l} t$ là hàm lẻ và $x(t) \sin \frac{n\pi}{l} t$ là hàm chẵn, do đó các hệ số Fourier (1.24) thỏa mãn

$$a_0 = a_n = 0 ; b_n = \frac{2}{l} \int_0^l x(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt ; n = 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t) \cos \frac{n\pi}{l} t$ là hàm chẵn và $x(t) \sin \frac{n\pi}{l} t$ là hàm lẻ, do đó các hệ số Fourier (1.29) thỏa mãn

$$b_n = 0 ; a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x(t) dt ; a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt ; n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

4. Nếu $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng (a, b) . Ta có thể mở rộng thành hàm tuần hoàn chu kỳ $2l = b - a$. Do đó $x(t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier, các hệ số Fourier được tính như sau

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) dt ; a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \cos \frac{2n\pi}{b-a} t dt ;$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \sin \frac{2n\pi}{b-a} t dt ; n = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

5. Nếu $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng $(0, l)$. Khi đó ta có thể mở rộng thành hàm chẵn hoặc hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$. Nếu mở rộng thành hàm chẵn thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (1.32) và nếu mở rộng thành hàm lẻ thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (1.31).

1.2.3 Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

Từ công thức (1.28) nếu ta đặt

$$A_0 = \frac{a_0}{2} ; A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1.34)$$

và góc φ_n , $0 \leq \varphi_n < 2\pi$ xác định bởi

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \sin \varphi_n = \frac{b_n}{A_n} \quad (1.35)$$

thì công thức (1.28) có thể viết lại

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} t - \varphi_n \right) \quad (1.36)$$

Công thức (1.28) được gọi là *chuỗi Fourier dạng cầu phương* (Quadrature Fourier Series). Công thức (1.36) được gọi là *chuỗi Fourier dạng cực* của $x(t)$.

1.2.4 Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series)

Thay công thức Euler

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

vào (1.23) ta được

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{int} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-int} \end{aligned}$$

Vậy ta có thể viết chuỗi Fourier dưới dạng phức

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \dots + c_{-2} e^{-2it} + c_{-1} e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \dots \quad (1.37)$$

trong đó các hệ số Fourier phức c_n xác định như sau

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 / 2 & a_0 &= 2c_0 \\ c_n &= (a_n - ib_n) / 2 & \text{hoặc} & & a_n &= c_n + c_{-n} \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n) / 2 & & & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Mặt khác, tương tự (1.7) ta có tích vô hướng các hàm phức

$$\langle x; y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Với tích vô hướng này hệ các hàm $\{e^{imt}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ là một hệ trực giao, nghĩa là thỏa mãn

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } n = m \\ 0 & \text{nếu } n \neq m \end{cases} \quad (1.39)$$

Vì vậy các hệ số Fourier phức (1.38) có thể tính trực tiếp

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int} dt \quad \text{hoặc} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_c^{c+2\pi} x(t)e^{-int} dt, \quad \forall c \quad (1.40)$$

Ví dụ 1.10: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn ví dụ 1.8

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{nếu } n = 0 \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn } n \neq 0 \\ \frac{1}{in\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Vậy, hàm bước nhảy đơn vị có khai triển Fourier

$$\eta(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2m+1)it}}{2m+1}.$$

Ví dụ 1.11: Tìm khai triển Fourier của hàm mũ tuần hoàn $x(t) = e^{at}$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{at} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(a-in)t} dt = \frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)} \Big|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n \frac{(a+in) \text{sh } a\pi}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

Vậy hàm có chuỗi Fourier tương ứng

$$e^{at} \sim \frac{\text{sh } a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (a+in)}{a^2 + n^2} e^{int}.$$

Hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ có khai triển Fourier dạng phức

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}t}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_c^{c+2l} x(t) e^{-\frac{in\pi}{l}t} dt, \quad \forall c \quad (1.41)$$

Nếu ký hiệu $f_0 = \frac{1}{T_0}$ là tần số cơ bản của hàm tuần hoàn chu kỳ T_0 thì công thức (1.41)

được biểu diễn

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi f_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_c^{c+2l} x(t) e^{-i2n\pi f_0 t} dt, \quad \forall c \quad (1.42)$$

Nhận xét 1.2: Công thức (1.34)-(1.38) cho thấy dạng cực, dạng phức và dạng cầu phương của chuỗi Fourier là hoàn toàn tương đương, nghĩa là từ dạng này ta có thể biểu diễn duy nhất qua dạng kia và ngược lại. Vậy thì dạng nào được ứng dụng tốt nhất. Câu trả lời phụ thuộc vào từng

trường hợp cụ thể. Nếu bài toán thiên về giải tích thì sử dụng dạng phức sẽ thuận lợi hơn vì việc tính các hệ số c_n dễ hơn. Tuy nhiên khi đo các hàm dạng sóng được thực hiện trong phòng thí nghiệm thì dạng cực sẽ thuận tiện hơn, vì các thiết bị đo lường như vôn kế, máy phân tích phổ sẽ đọc được biên độ và pha. Dùng các kết quả thí nghiệm đo được các nhà kỹ thuật có thể vẽ các vạch phổ một phía là các đoạn thẳng ứng với mỗi giá trị biên độ A_n tại tần số $f_n = nf_0 = \frac{n}{T_0}$.

1.2.5 Đẳng thức Parseval

Định lý 1.8: Đối với mọi hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ thoả mãn điều kiện Dirichlet sẽ xảy ra đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.43)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} x(t) \overline{x(t)} dt = \frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i \frac{m\pi}{l} t} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} e^{-i \frac{n\pi}{l} t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m \overline{c_n} e^{i \frac{m\pi}{l} t - i \frac{n\pi}{l} t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

1.2.6 Đạo hàm và tích phân của chuỗi Fourier

Đối với chuỗi hàm hội tụ, một vấn đề tự nhiên đặt ra là: khi lấy đạo hàm hoặc lấy tích phân của từng số hạng của chuỗi ta được chuỗi mới, chuỗi mới này có hội tụ về đạo hàm hoặc tích phân của hàm tổng của chuỗi ban đầu không? Trường hợp chuỗi lũy thừa thì câu trả lời là khẳng định. Với ý tưởng này người ta thường tìm nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng chuỗi lũy thừa nếu nghiệm của phương trình không phải là hàm sơ cấp.

Sự hội tụ của chuỗi Fourier tinh tế hơn vì vậy đòi hỏi phải thận trọng khi áp dụng phương pháp lấy đạo hàm hoặc tích phân theo các số hạng. Tuy nhiên, trong nhiều tình huống cả hai phép toán này đem lại những kết quả thú vị và cung cấp một công cụ hữu ích để xây dựng chuỗi Fourier của các hàm tương đối phức tạp.

1.2.6.1 Tích phân của chuỗi Fourier

Ta thấy rằng nguyên hàm luôn mịn hơn hàm gốc, vì vậy có thể tiên đoán rằng sẽ không gặp khó khăn gì khi lấy tích phân của chuỗi Fourier. Tuy nhiên có một trở ngại là nguyên hàm của một hàm tuần hoàn chưa chắc là hàm tuần hoàn. Chẳng hạn hàm hằng 1 là một hàm tuần hoàn nhưng có nguyên hàm, cụ thể x , không tuần hoàn. Vì nguyên hàm của hàm \sin , hàm \cos là hàm $-\cos$ và hàm \sin , do đó nguyên hàm của tất cả các hàm tuần hoàn khác trong chuỗi

Fourier cũng là hàm tuần hoàn. Vì vậy chỉ có số hạng hằng $\frac{a_0}{2}$ có thể gây nên khó khăn khi lấy tích phân của chuỗi Fourier.

Bổ đề 1.1: Giả sử $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π , khi đó tích phân $y(t) = \int_0^t x(u)du$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π khi và chỉ khi $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = 0$ (có giá trị trung bình bằng 0).

Định lý 1.9: Nếu $x(t)$ là hàm liên tục từng khúc, tuần hoàn chu kỳ 2π và có giá trị trung bình bằng 0 thì có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi Fourier của $x(t)$ để nhận được chuỗi Fourier của nguyên hàm

$$y(t) = \int_0^t x(u)du \sim m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt \right], \quad m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt \quad (1.44)$$

Ví dụ 1.12: Hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ 2π và $x(t) = t$, do đó có giá trị trung bình bằng 0.

Theo ví dụ 1.6 ta có chuỗi Fourier

$$t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nt}{n}$$

Lấy tích phân từng số hạng của chuỗi Fourier ta được

$$\frac{t^2}{2} \sim \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nt = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left(\cos t - \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos 3t}{9} - \frac{\cos 4t}{16} + \dots \right)$$

Vì $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

Nếu $x(t)$ có giá trị trung bình khác 0, chuỗi Fourier tương ứng có số hạng $a_0 \neq 0$

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Trong trường hợp này kết quả của lấy tích phân sẽ là

$$y(t) = \int_0^t x(u)du \sim \frac{a_0}{2}t + m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt \right]; \quad m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt \quad (1.45)$$

Chú ý rằng vế phải của chuỗi (1.45) không phải là chuỗi Fourier. Ta có thể viết lại dưới dạng khai triển chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π như sau

$$y(t) - \frac{a_0}{2}t \sim m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt \right] \quad (1.46)$$

1.2.6.2 Đạo hàm của chuỗi Fourier

Phép tính đạo hàm ngược với phép lấy tích phân. Đạo hàm có thể làm cho hàm xấu hơn. Vì vậy khi sử dụng phương pháp lấy đạo hàm của chuỗi Fourier $x(t)$ chúng ta cần phải chú ý đến sự thỏa mãn điều kiện Dirichlet của $x'(t)$. Điều kiện này được thỏa mãn nếu $x(t)$ khả vi liên tục từng khúc đến cấp 2.

Định lý 1.10: Nếu $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và khả vi liên tục từng khúc đến cấp 2 thì có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi Fourier của $x(t)$ để nhận được chuỗi Fourier của đạo hàm

$$\omega(t) = x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos nt - na_n \sin nt] \quad (1.47)$$

Ví dụ 1.13: Nếu đạo hàm chuỗi Fourier của hàm $x(t) = |t|$ (ví dụ 1.7) ta được

$$x'(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right).$$

Mặt khác đạo hàm của $x(t) = |t|$ ta được hàm dấu

$$\frac{d|t|}{dt} = \text{sign } t = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ -1 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Vậy

$$\text{sign } t \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right)$$

1.2.7 Chuỗi Fourier của hàm delta

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng. Hàm xung đơn vị tại $t = t_0$ được ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$, hàm số này chỉ tập trung giá trị tại $t = t_0$. Vậy

$$\delta_{t_0}(t) = 0 \text{ với mọi } t \neq t_0. \quad (1.48)$$

Ngoài ra $\delta_{t_0}(t)$ là xung đơn vị nên tích phân của nó thỏa mãn điều kiện

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) dt = 1 \quad (1.49)$$

Rõ ràng rằng không tồn tại hàm theo nghĩa thông thường thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện trên, vì hàm thỏa mãn điều kiện (1.48) sẽ có tích phân bằng 0.

Kỹ sư người Anh Oliver Heaviside là người đầu tiên sử dụng hàm delta trong các ứng dụng thực tế của mình, mặc dù các nhà toán học lý thuyết cùng thời cho rằng đó là ý nghĩ điên rồ. Ba mươi năm sau, nhà Vật lý lý thuyết nổi tiếng Paul Dirac đã sử dụng hàm delta trong lý thuyết cơ học lượng tử của mình, nhờ đó cuối cùng các nhà lý thuyết đã chấp nhận hàm delta. Năm 1944 nhà toán học Pháp Laurent Schwartz cuối cùng đã xây dựng được lý thuyết phân bố kết hợp với hàm suy rộng điều này giải thích cơ sở tồn tại của hàm delta.

Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm tron theo nghĩa bình thường.
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp.

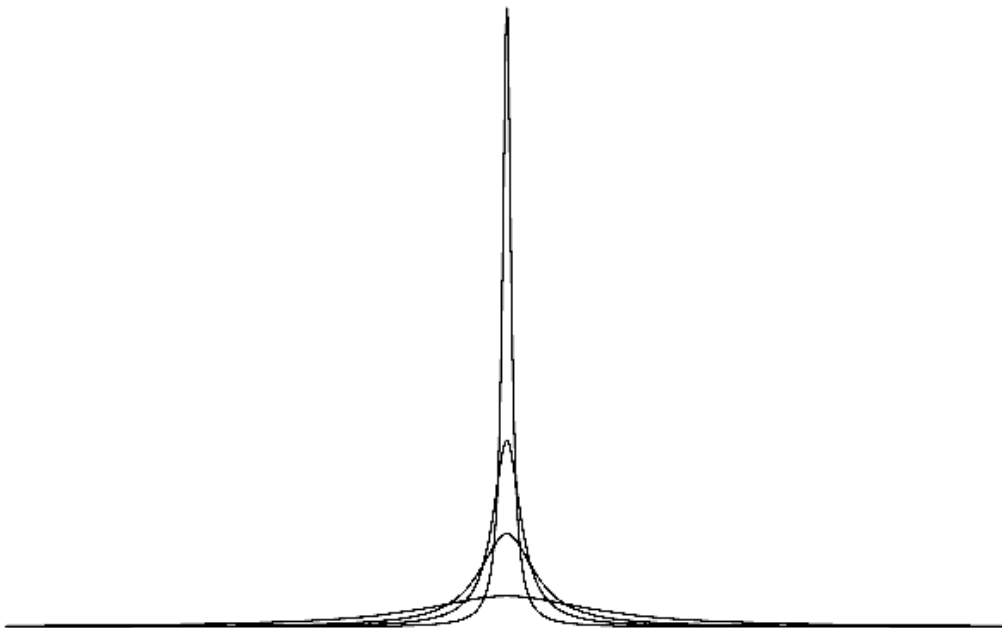
Cả hai đều quan trọng và đáng quan tâm. Tuy nhiên cách thứ nhất sẽ dễ dàng tiếp thu hơn, vì vậy ta chỉ xét phương pháp này.

Phương pháp giới hạn xem hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm khả vi $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại $t = t_0$ và có tích phân luôn bằng 1.

Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan nt \Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1 \quad (1.51)$$



Hình 1.5: Đồ thị các hàm $g_n(t)$

Vì vậy, một cách hình thức ta đồng nhất giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ là hàm delta tập trung tại gốc $t = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \delta(t) = \delta_0(t). \quad (1.52)$$

Hình 1.5 cho thấy các hàm $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại gốc $t = 0$.

Cần chú ý rằng có nhiều cách chọn các hàm $g_n(t)$ có giới hạn là hàm delta.

Trường hợp hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ có giá trị tập trung tại t_0 bất kỳ có thể nhận được từ hàm $\delta(t)$ bằng cách tịnh tiến

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0). \quad (1.53)$$

Vì vậy, có thể xem $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm

$$\hat{g}_n(t) = g_n(t - t_0) = \frac{n}{\pi(1 + n^2(t - t_0)^2)} \quad (1.54)$$

Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Từ công thức (1.48)-(1.49) ta có

Với mọi hàm liên tục $x(t)$:

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt = \begin{cases} x(v) & \text{nếu } 0 < v < l \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (1.55)$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^t \delta_v(u)du = \eta(t - v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > v \\ 0 & \text{nếu } t < v \end{cases} \quad (1.56)$$

Theo định nghĩa thông thường của nguyên hàm, từ công thức (1.56) ta có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta. Sự khác biệt ở đây là mặc dù hàm delta là hàm suy rộng nhưng hàm bước nhảy là hàm số theo nghĩa thông thường.

Công thức (1.56) cũng phù hợp với định nghĩa của hàm delta theo giới hạn

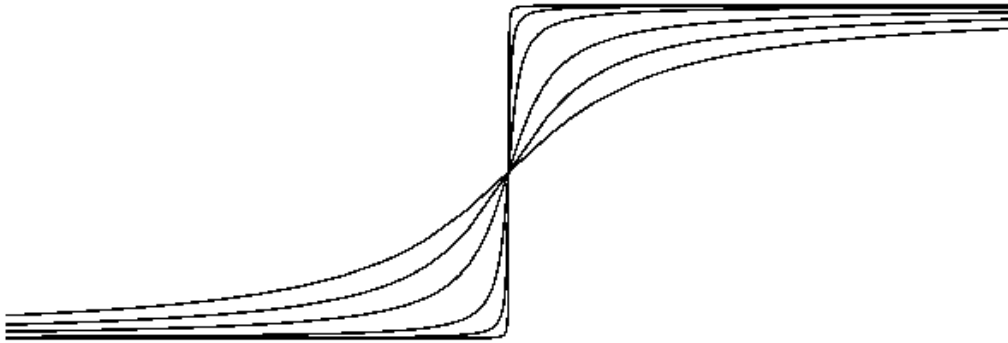
$$f_n(t) = \int_{-\infty}^t \frac{n}{\pi(1 + n^2u^2)} du = \frac{1}{\pi} \arctan nt + \frac{1}{2}$$

Các hàm này sẽ hội tụ về hàm bước nhảy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nếu } t = 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Với nhận xét trên ta có thể coi

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \delta(t) \tag{1.57}$$



Hình 1.6: Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm $f_n(t)$

Tính liên tục là điều kiện cần của tính khả vi, như vậy hàm không liên tục thì không khả vi. Tuy nhiên người ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm của các hàm không liên tục như là hàm suy rộng với các hàm delta tập trung giá trị tại những điểm gián đoạn.

Nếu $x(t)$ là hàm khả vi (theo nghĩa thông thường) tại mọi t ngoại trừ tại điểm gián đoạn t_0 với bước nhảy β . Khi đó ta có thể biểu diễn lại hàm $x(t)$ dưới dạng tiện hơn

$$x(t) = y(t) + \beta\eta(t - t_0) \tag{1.58}$$

Trong đó $y(t)$ là hàm liên tục tại mọi điểm và khả vi tại mọi điểm có thể trừ điểm gián đoạn. Đạo hàm công thức (1.58) và áp dụng công thức (1.57) ta được

$$x'(t) = y'(t) + \beta\delta(t - t_0) \tag{1.59}$$

Ví dụ 1.14: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

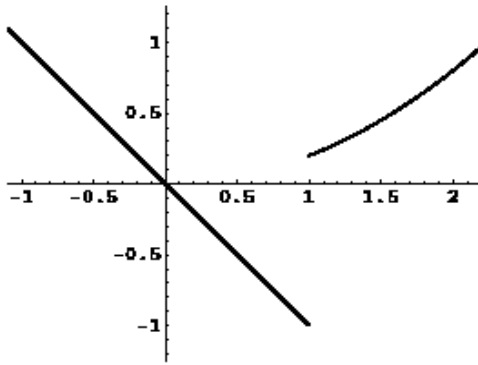
Hàm số gián đoạn tại $t = 1$ với bước nhảy $\frac{6}{5}$ (có đồ thị trong hình 1.7).

Do đó có thể biểu diễn theo công thức (1.56) như sau

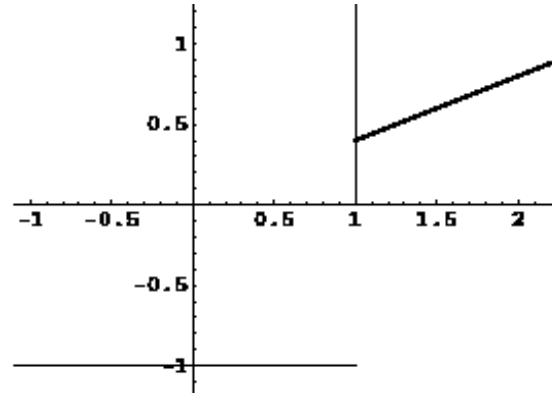
$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\eta(t-1), \quad y(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 - \frac{6}{5} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

Công thức đạo hàm (1.57) tương ứng

$$x'(t) = y'(t) + \frac{6}{5}\delta(t-1), \quad y(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{2}{5}t & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$



Đồ thị hàm $x(t)$



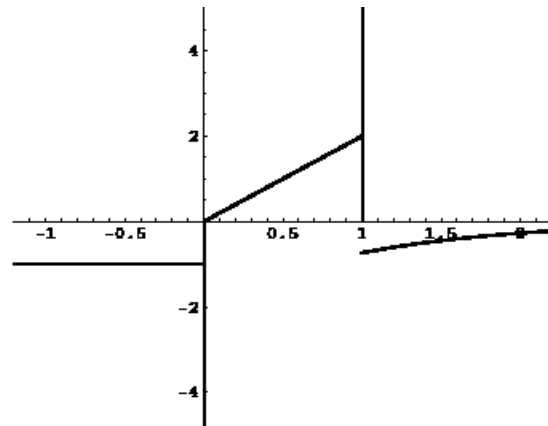
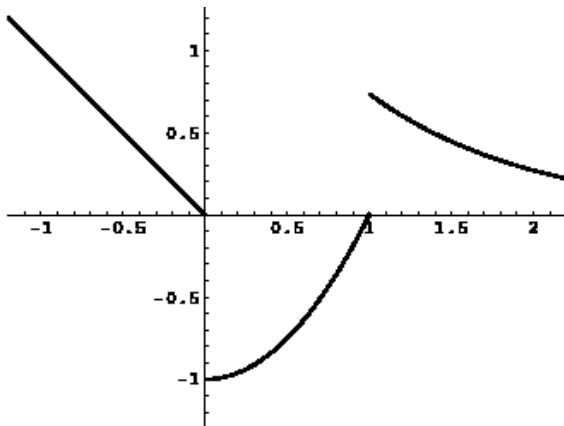
Đồ thị hàm $x'(t)$

Hình 1.7: Đồ thị của $x(t)$ và đạo hàm $x'(t)$

Ví dụ 1.15: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 0 \\ t^2 - 1 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

Hàm số gián đoạn tại $t=0$ với bước nhảy -1 và tại $t=1$ với bước nhảy $\frac{2}{e}$ (có đồ thị trong hình 1.8). Do đó đạo hàm suy rộng có dạng

$$x'(t) = -\delta(t) + \frac{2}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 0 \\ 2t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ -2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$



Hình 1.8

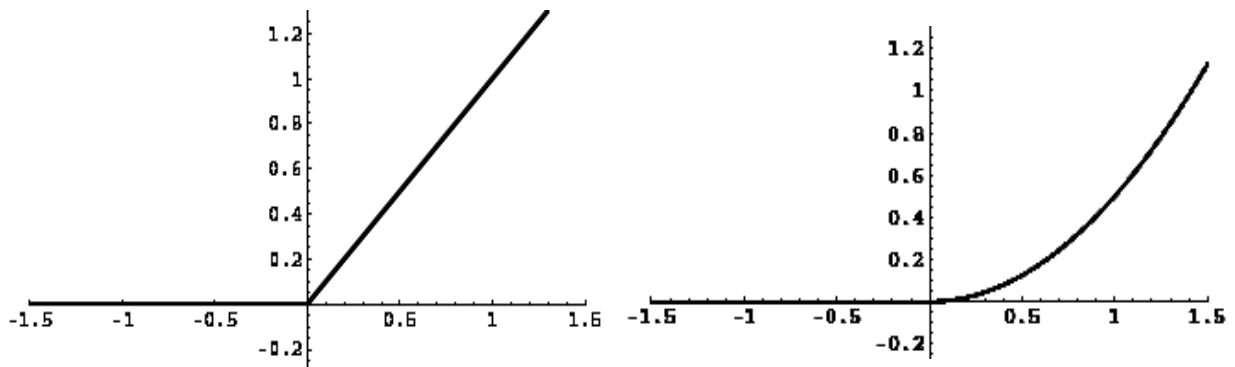
Tích phân của hàm bước nhảy $\eta(t-t_0)$ gián đoạn là hàm dốc liên tục $\rho(t-t_0)$

$$\eta_{t_0}(t) = \eta(t-t_0); \int_a^t \eta_{t_0}(t) dt = u_{t_0}(t) = u(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0 & \text{nếu } t > t_0 > a \\ 0 & \text{nếu } a < t < t_0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Hàm dốc $u(t-t_0)$ có điểm góc tại $t=t_0$ do đó không khả vi tại điểm này; đạo hàm $\frac{du}{dx} = \eta$ gián đoạn tại điểm này và đạo hàm bậc hai $\frac{d^2u}{dx^2} = \delta$ là hàm suy rộng.

Như vậy lấy tích phân hai lần của hàm delta ta được hàm dốc. Bằng cách quy nạp ta có tích phân $n+1$ lần của hàm delta là hàm dốc bậc n

$$u_n(t-t_0) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^n}{n!} & \text{nếu } t > t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases} \quad (1.61)$$



Hình 1.9: Đồ thị của hàm dốc bậc nhất và hàm dốc bậc hai

Ví dụ 1.16: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên X xác định bởi công thức:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ sao cho

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Nếu biến ngẫu nhiên X rời rạc có miền giá trị là một tập đếm được $\{x_1, x_2, \dots\}$ thì các xác suất chỉ tập trung tại các giá trị này. Xác suất của X nhận các giá trị $x_k; k=1, 2, \dots$ gọi là hàm khối lượng xác suất

$$p_X(x_k) = P\{X = x_k\}$$

Hàm phân bố được xác định từ hàm khối lượng xác suất theo công thức

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k)$$

Đồ thị của hàm phân bố $F_X(x)$ là có dạng bậc thang liên tục phải tại các bước nhảy.

Sử dụng công thức (1.55) và (1.59) ta có thể viết lại

$$F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k) = \int_{-\infty}^x \sum_{x_k} p_X(x_k) \delta(t - x_k) dt$$

Vì vậy ta có thể xem hàm mật độ của biến ngẫu nhiên rời rạc là

$$f_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k) \delta(x - x_k).$$

Khai triển Fourier của hàm delta

Áp dụng công thức (1.56) tính hệ số Fourier ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \cos n0 = \frac{1}{\pi}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \sin n0 = 0 \quad (1.62)$$

Vậy hàm delta có khai triển Fourier

$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \dots) \quad (1.63)$$

Thay $\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$ (công thức Euler) vào (1.63) ta được

$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} (\dots + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + \dots) \quad (1.64)$$

Cũng có thể nhận được công thức khai triển trên bằng cách tính trực tiếp các hệ số theo công thức (1.40)

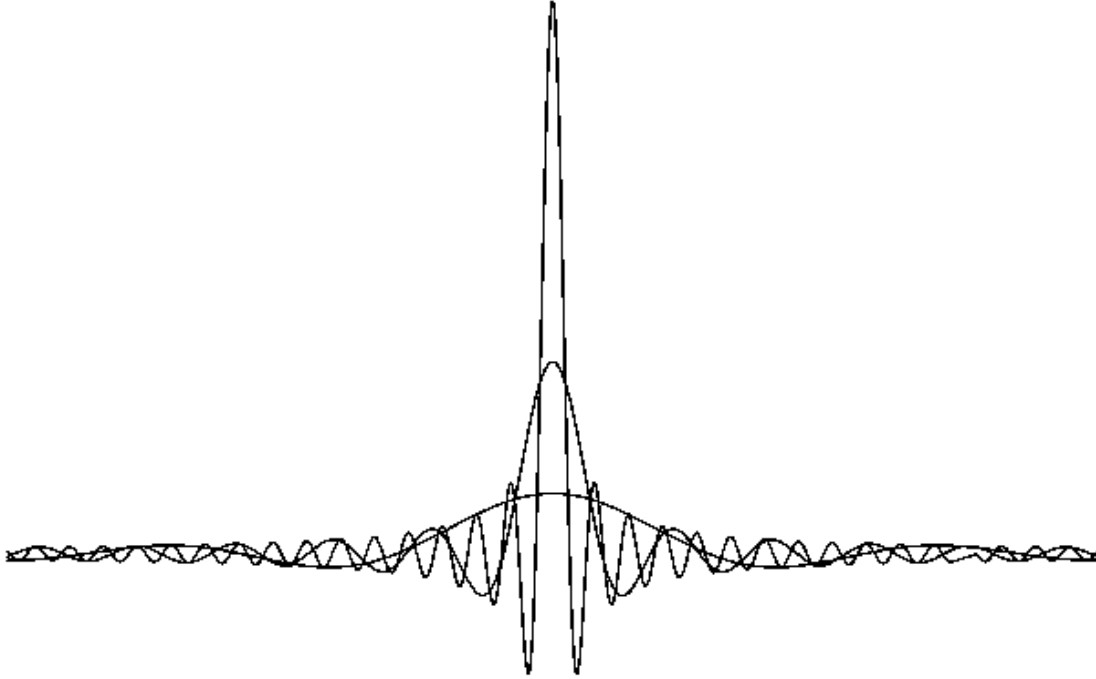
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} e^{ik0} = \frac{1}{2\pi}.$$

Tổng riêng của chuỗi Fourier

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$$

là tổng của $2n+1$ số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu tiên là e^{-int} và công bội e^{it} , do đó:

$$s_n = \frac{1}{2\pi} e^{-int} \left(\frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$



Hình 1.10: Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier hàm Delta

1.3 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER HỮU HẠN

Mỗi hàm tuần hoàn được xác định duy nhất bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại (công thức 1.23, 1.24, 1.28, 1.29), điều này được suy ra từ tính chất trực giao của hệ 1.11, 1.39.

Tương tự ta có thể chứng minh được hệ các hàm phức tuần hoàn $\left\{ e^{i2\pi n f} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn trên đoạn $[0, 1]$

$$\int_0^1 e^{i2\pi n f} e^{-i2\pi m f} df = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = m \\ 0 & \text{nếu } n \neq m \end{cases} \quad (1.65)$$

Dựa vào hệ trực chuẩn này ta định nghĩa phép biến đổi Fourier hữu hạn của các tín hiệu rời rạc như sau.

1.3.1 Định nghĩa phép biến đổi Fourier hữu hạn

Định nghĩa 1.4: Biến đổi Fourier hữu hạn của dãy tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F} \{ x(n) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi n f} \quad (1.66)$$

nếu chuỗi ở vế phải hội tụ.

Công thức biến đổi ngược

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1} \{ \widehat{X}(f) \} = \int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi n f} df \quad (1.67)$$

Ví dụ 1.17: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $x(n) = \text{rect}_N(n)$, N là 1 số tự nhiên.

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Giải:
$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi n f} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi n f} = \frac{1 - e^{-i2\pi N f}}{1 - e^{-i2\pi f}}$$

$$= \frac{e^{-i\pi N f}}{e^{-i\pi f}} \cdot \frac{e^{i\pi N f} - e^{-i\pi N f}}{e^{i\pi f} - e^{-i\pi f}} = e^{-i\pi(N-1)f} \frac{\sin N\pi f}{\sin \pi f}.$$

Nhận xét 1.3:

1. Trong công thức biến đổi Fourier 1.66, 1.67 đối số f được ký hiệu cho tần số. Có tài liệu không biểu diễn biến đổi Fourier qua miền tần số f mà qua miền tần số góc ω như sau

$$\widehat{X}(\omega) = \mathcal{F} \{ x(n) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}, \quad x(n) = \mathcal{F}^{-1} \{ \widehat{X}(\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega n} d\omega \quad (1.68)$$

Hai cách biểu diễn này tương ứng với nhau qua phép đổi biến số $\omega = 2\pi f$.

2. Một điều kiện đủ để tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tồn tại biến đổi Fourier hữu hạn là

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.$$

3. Công thức biến đổi ngược 1.67 là khai triển Fourier dạng phức của hàm $\widehat{X}(f)$ đối với hệ trục chuẩn 1.65, nếu biến đổi Fourier xét trong miền ω thì biến đổi ngược của $\widehat{X}(\omega)$ là khai triển Fourier dạng phức đối với hệ trục giao 1.39. Vì vậy biến đổi ngược tồn tại khi $\widehat{X}(f)$ (hoặc $\widehat{X}(\omega)$) thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

1.3.2 Các tính chất của phép biến đổi Fourier hữu hạn

Tương tự phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier hữu hạn có các tính chất sau:

1. Tuyến tính:

$$\mathcal{F}\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \alpha \mathcal{F}\{x(n)\} + \beta \mathcal{F}\{y(n)\} \quad (1.69)$$

Chứng minh: $\mathcal{F}\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x(n) + \beta y(n)) e^{-i2\pi n f}$

$$= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi n f} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-i2\pi n f} = \alpha \mathcal{F}\{x(n)\} + \beta \mathcal{F}\{y(n)\}.$$

2. Trễ:

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{x(n - n_0)\} = e^{-i2\pi n_0 f} \widehat{X}(f). \quad (1.70)$$

Chứng minh: $\mathcal{F}\{x(n - n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) e^{-i2\pi n f} = e^{-i2\pi n_0 f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) e^{-i2\pi(n - n_0) f}$

$$= e^{-i2\pi n_0 f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi n f} = e^{-i2\pi n_0 f} \mathcal{F}\{x(n)\}.$$

3. Dịch chuyển ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{e^{i2\pi n f_0} x(n)\} = \widehat{X}(f - f_0). \quad (1.71)$$

4. Điều chế:

$$\mathcal{F}\{x(n) \cos(2\pi n f_0)\} = \mathcal{F}\left\{x(n) \frac{e^{i2\pi n f_0} + e^{-i2\pi n f_0}}{2}\right\} = \frac{\widehat{X}(f - f_0) + \widehat{X}(f + f_0)}{2}. \quad (1.72)$$

5. Liên hợp phức: $\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi n f}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\overline{x(n)}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)} e^{-i2\pi n f} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{i2\pi n f}} = \overline{\widehat{X}(-f)} \quad (1.73)$$

Do đó nếu $x(n)$ thực thì $\widehat{X}(f) = \overline{\widehat{X}(-f)}$.

6. Biến số đảo: $\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi n f}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi(-n)(-f)} = \widehat{X}(-f) \quad (1.74)$$

7. Tích chập:

$$\mathcal{F}\{x(n) * y(n)\} = \mathcal{F}\{x(n)\} \cdot \mathcal{F}\{y(n)\} \quad (1.75)$$

Chứng minh: Ta có $z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{Z}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right) e^{-i2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i2\pi k f} \right) y(n-k) e^{-i2\pi(n-k)f} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)e^{-i2\pi(n-k)f} \right) x(k)e^{-i2\pi k f} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(f) \end{aligned}$$

8. Tích chập ảnh:

$$\mathcal{F}\{x(n) \cdot y(n)\} = \mathcal{F}\{x(n)\} * \mathcal{F}\{y(n)\} \quad (1.76)$$

Chứng minh: $\mathcal{F}\{x(n) \cdot y(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-i2\pi n f}$. Theo 2.71 ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-i2\pi n f} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \int_0^1 e^{-i2\pi(m-n)u} du \right) y(n)e^{-i2\pi n f} \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i2\pi(m-n)u} \right) y(n)e^{-i2\pi n f} du \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i2\pi m u} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-i2\pi n(f-u)} \right) du = \widehat{X}(f) * \widehat{Y}(f). \end{aligned}$$

9. Biến đổi của hàm tương quan

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} \Rightarrow \mathcal{F}\{r_{x,y}(n)\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)} \quad (1.77)$$

Định lý Wiener-Khinchin: $\mathcal{F}\{r_{x,x}(n)\} = |\widehat{X}(f)|^2$. (1.78)

Nếu $x(n), y(n)$ thực, $r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \Rightarrow \mathcal{F}\{r_{x,y}(n)\} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(-f)$.

Chứng minh: $r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} = x(n) * \overline{y(-n)} \Rightarrow \mathcal{F}\{r_{x,y}(n)\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$.

Hoặc ta có thể chứng minh trực tiếp như sau:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{r_{x,y}(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} \right) e^{-i2\pi n f} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(m-n)} e^{-i2\pi(n-m)f} \right) e^{-i2\pi m f} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(m-n) e^{-i2\pi(m-n)f} \right)} e^{-i2\pi m f} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}. \end{aligned}$$

10. Đạo hàm ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{nx(n)\} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df} \quad (1.79)$$

Chứng minh: $\mathcal{F}\{nx(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-i2\pi n f} = \frac{1}{-i2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{de^{-i2\pi n f}}{df} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df}$

11. Đẳng thức Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(-f)}df; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_0^1 |\widehat{X}(f)|^2 df. \quad (1.80)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(n)} \left(\int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi n f} df \right) = \int_0^1 \widehat{X}(f) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(n)} e^{i2\pi n f} \right) df \\ &= \int_0^1 \widehat{X}(f) \overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{i2\pi n(-f)} \right)} df = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(-f)} df. \end{aligned}$$

Ta có thể tổng kết trong bảng sau.

Tính chất	Tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(n)\}$
Tuyến tính	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha \widehat{X}(f) + \beta \widehat{Y}(f)$
Trễ	$x(n - n_0)$	$e^{-i2\pi n_0 f} \widehat{X}(f)$

Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi n f_0} x(n)$	$\widehat{X}(f - f_0)$
Điều chế	$x(n) \cos(2\pi n f_0)$	$\frac{\widehat{X}(f - f_0) + \widehat{X}(f + f_0)}{2}$
Liên hợp phức	$\overline{x(n)}$	$\overline{\widehat{X}(f)}$
Biến số đảo	$x(-n)$	$\widehat{X}(-f)$
Tích chập	$x(n) * y(n)$	$\widehat{X}(f) \widehat{Y}(f)$
Tích chập ảnh	$x(n) \cdot y(n)$	$\widehat{X}(f) * \widehat{Y}(f)$
Hàm tương quan	$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{y(m-n)}$	$\widehat{X}(f) \overline{\widehat{Y}(f)}$
Đạo hàm ảnh	$nx(n)$	$\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df}$

1.4 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Khởi đầu chuỗi Fourier được xây dựng với mục đích giải quyết các bài toán tương ứng với các hàm số xác định trong miền bị chặn hoặc hàm tuần hoàn. Để giải quyết các bài toán có các hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực $-\infty < t < \infty$ người ta mở rộng một cách tự nhiên phương pháp chuỗi Fourier, điều này đưa đến phép biến đổi Fourier. Phép biến đổi Fourier là một công cụ mạnh mẽ và đóng vai trò cốt yếu trong nhiều miền ứng dụng như: Giải phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu, lý thuyết điều khiển và trong nhiều lãnh vực khác của toán lý thuyết cũng như toán ứng dụng. Đối với các nhà toán học phép biến đổi Fourier là cơ bản hơn phép biến đổi Laplace.

Cơ sở của phép biến đổi Fourier là công thức tích phân Fourier, công thức này có được bằng cách xét chuỗi Fourier trong khoảng khá lớn tùy ý, sau đó cho khoảng này tiến đến vô cùng.

1.4.1 Công thức tích phân Fourier

Định lý 1.11: Nếu hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$) và thỏa mãn điều kiện Dirichlet thì có đẳng thức

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \lambda(u-t) du \quad (1.81)$$

Chứng minh: Vì hàm $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên toàn bộ trục thực nên với mọi $l > 0$ ta có thể khai triển thành chuỗi Fourier trong khoảng $(-l; l)$ (xem nhận xét và công thức 1.28).

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right)$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(u) du; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(u) \cos \frac{n\pi}{l} u du; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(u) \sin \frac{n\pi}{l} u du; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l x(u) du + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l x(u) \left[\cos \frac{n\pi}{l} u \cos \frac{n\pi}{l} t + \sin \frac{n\pi}{l} u \sin \frac{n\pi}{l} t \right] du$$

$$x(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l x(u) du + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l x(u) \cos \frac{n\pi}{l} (u-t) du \quad (1.82)$$

Vi $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ nên khi cho $l \rightarrow \infty$ ta có:

$$\begin{cases} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l x(u) du = 0 \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l x(u) \cos \frac{n\pi}{l} (u-t) du = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \frac{n\pi}{l} (u-t) du \end{cases} \quad (1.83)$$

Đặt $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}, \quad F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \lambda(u-t) du \quad (1.84)$

$$\Rightarrow \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \frac{n\pi}{l} (u-t) du = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda F(n\Delta\lambda) \quad (1.85)$$

Vế phải của (1.85) là tổng tích phân của hàm $F(\lambda)$ trong khoảng $[0, \infty)$. Theo (1.84), $l \rightarrow \infty$ khi và chỉ khi $\Delta\lambda \rightarrow 0$. Vậy lấy giới hạn hai vế của (1.82) khi cho $l \rightarrow \infty$ và sử dụng (1.83)-(1.85) ta được

$$x(t) = \int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \lambda(u-t) du.$$

Công thức (1.81) được gọi là công thức tích phân Fourier.

Vì hàm cosin là hàm chẵn và sin là hàm lẻ nên từ công thức (1.81) ta cũng có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \lambda(u-t) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cos \lambda(t-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) (\cos \lambda(t-u) + i \sin \lambda(t-u)) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{i\lambda(t-u)} du \end{aligned}$$

Vậy

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i\lambda u} du \right) e^{i\lambda t} d\lambda \quad (1.86)$$

(1.86) được gọi là *công thức tích phân Fourier phức*.

Nhận xét 2.4:

1. Các công thức trên đã sử dụng quy ước (1.25) tại những điểm không liên tục.
2. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn thì công thức (1.86) trở thành

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda t d\lambda \int_0^{\infty} x(u) \cos \lambda u du. \quad (1.87)$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ thì

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda t d\lambda \int_0^{\infty} x(u) \sin \lambda u du. \quad (1.88)$$

4. Các công thức tích phân Fourier, Định lý 1.11 được phát biểu và chứng minh cho trường hợp $x(t)$ là hàm thực. Tuy nhiên do tính chất tuyến tính của tích phân nên các kết quả trên vẫn còn đúng cho trường hợp hàm phức biến thực $x(t)$ khả tích tuyệt đối có phần thực, phần ảo thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

5. Đổi biến $\lambda = 2\pi f \Rightarrow d\lambda = 2\pi df$ và thay vào công thức (1.88) ta được

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi f(u-t)} du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi fu} du \right) e^{i2\pi ft} df \quad (1.89)$$

1.4.2 Phép biến đổi Fourier

Định nghĩa 1.5: Biến đổi Fourier (viết tắt là FT) của hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên trục thực và thỏa mãn điều kiện Dirichlet là

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt, f \in \mathbb{R} \quad (1.90)$$

Trong kỹ thuật, nếu $x(t)$ là hàm dạng sóng (waveform) theo thời gian t thì $\widehat{X}(f)$ được gọi là phổ hai phía của $x(t)$ (two - sided spectrum), còn tham số f chỉ tần số, có đơn vị là Hz.

Từ công thức tích phân Fourier (1.89) ta có công thức biến đổi ngược

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{X}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f)e^{i2\pi ft} df \quad (1.91)$$

Hàm ảnh qua phép biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$ có thể viết dưới dạng cực

$$\widehat{X}(f) = |\widehat{X}(f)|e^{i\varphi(f)} \quad (1.92)$$

trong đó

$$|\widehat{X}(f)| = \sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}}, \quad \varphi(f) = \angle \widehat{X}(f) \quad (1.93)$$

được gọi dạng biên độ - pha của phép biến đổi.

Cặp $x(t)$, $\widehat{X}(f)$ được gọi là cặp biến đổi Fourier.

1.4.3 Tính chất phép biến đổi Fourier

Tương tự các tính chất (1.69)-(1.80) của phép biến đổi Fourier hữu hạn, phép biến đổi Fourier có các tính chất được tổng kết trong bảng sau:

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha \widehat{X}_1(f) + \beta \widehat{X}_2(f)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \widehat{X}(f/a)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t - T_d)$	$e^{-i2\pi T_d f} \widehat{X}(f)$
6. Đồng dạng tịnh tiến	$x(at + b)$	$\frac{e^{i2\pi \frac{b}{a} f}}{ a } \widehat{X}\left(\frac{f}{a}\right)$

7. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t} x(t)$	$\widehat{X}(f - f_0)$
8. Điều chế	$x(t) \cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} \widehat{X}(f - f_0) + \frac{1}{2} \widehat{X}(f + f_0)$
9. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i2\pi f)^n \widehat{X}(f)$
10. Tích phân	$\int_{-\infty}^t x(u) du$	$\frac{1}{i2\pi f} \widehat{X}(f) + \frac{1}{2} \widehat{X}(0) \delta(f)$
11. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \widehat{X}(f)}{df^n}$
12. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(t-u) du$	$\widehat{X}_1(f) \widehat{X}_2(f)$
13. Tích	$x_1(t) x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f) * \widehat{X}_2(f)$

Hàm δ trong tính chất 10. là hàm delta Dirac (xem mục 1.2.7).

Từ định nghĩa biến đổi Fourier (1.90) ta nhận thấy rằng nếu $x(t)$ là hàm thực chẵn thì biến đổi Fourier của nó cũng là hàm thực chẵn. Kết hợp với tính chất đối ngẫu 4. ta có thể chuyển đổi vai trò của $x(t)$ và $\widehat{X}(f)$ cho nhau, nghĩa là

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{\widehat{X}(t)\} = x(f) \quad (1.94)$$

1.4.3 Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

Nếu $x_1(t), x_2(t)$ là hai hàm bình phương khả tích (gọi là hàm kiểu năng lượng) thì ta có *đẳng thức Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \overline{x_2(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f) \overline{\widehat{X}_2(f)} df \quad (1.95)$$

Khi $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ ta có *định lý năng lượng Rayleigh*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{X}_1(f)|^2 df \quad (1.96)$$

Như vậy có thể chuyển tính năng lượng trong miền thời gian bằng tính năng lượng trong miền tần số.

Công thức (1.96) có thể chứng minh bằng cách sử dụng công thức tích phân Fourier như sau:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_2(f)e^{i2\pi ft}df\right)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{X}_2(f)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-i2\pi ft}dt\right)df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df. \end{aligned}$$

1.4.4 Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ 1.18: Biến đổi Fourier của xung chữ nhật hay hình hộp có độ dài $2a$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a, a > 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

$$\widehat{\Pi}_a(f) = \int_{-a}^a e^{-i2\pi ft}dt = \begin{cases} 1 & \text{nếu } f = 0 \\ \left. \frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right|_{-a}^a & \text{nếu } f \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } f = 0 \\ \frac{\sin(2a\pi f)}{\pi f} & \text{nếu } f \neq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{nếu } t \neq 0 \end{cases} \quad (1.98)$$

Ta có

$$\mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} = 2a \text{sinc}(2af). \quad (1.99)$$

Phép biến đổi Fourier ngược cho phép khôi phục lại giá trị của xung chữ nhật $\Pi_a(t)$ (xem công thức (1.91))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} \frac{\sin(2a\pi f)}{\pi f} df = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < a \\ 1/2 & \text{nếu } |t| = a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a \end{cases} \quad (1.100)$$

Tách phần thực và phần ảo (1.100) ta có:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft) \sin(2a\pi f)}{f} df = \begin{cases} \pi/2 & \text{nếu } |t| < a \\ \pi/4 & \text{nếu } |t| = a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a \end{cases};$$

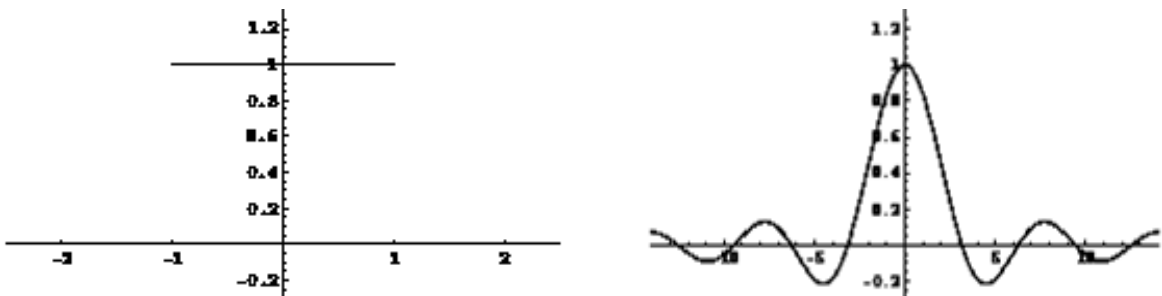
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft) \sin(2a\pi f)}{f} df = 0.$$

Khi $a=1$ ta có xung hình vuông:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |t| > 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \mathcal{F}\{\Pi(t)\} = 2 \operatorname{sinc}(2f).$$

Áp dụng công thức (1.94) ta cũng có

$$\mathcal{F}\{2 \operatorname{sinc}(2t)\} = \Pi(f).$$



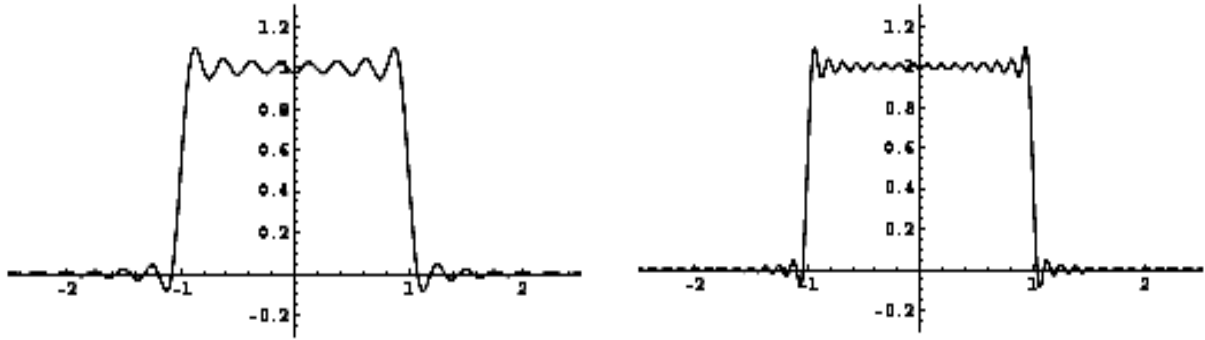
Hình 1.11: Đồ thị của $\Pi(t)$ và $\widehat{\Pi}(f)$

Công thức (1.100) khôi phục giá trị của $\Pi(t)$ dựa vào tích phân vô hạn của $\widehat{\Pi}(f)$

$$\Pi(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{\Pi}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Pi}(f) e^{i2\pi ft} df$$

Tuy nhiên khi tính toán số người ta chỉ tính tích phân trong khoảng hữu hạn.

Hai đồ thị sau đây tương ứng là đồ thị của $\int_{-25}^{25} e^{i2\pi ft} \widehat{\Pi}(f) df$ và $\int_{-50}^{50} e^{i2\pi ft} \widehat{\Pi}(f) df$.



Hình 1.12

Ví dụ 1.19: Xung tam giác đơn vị

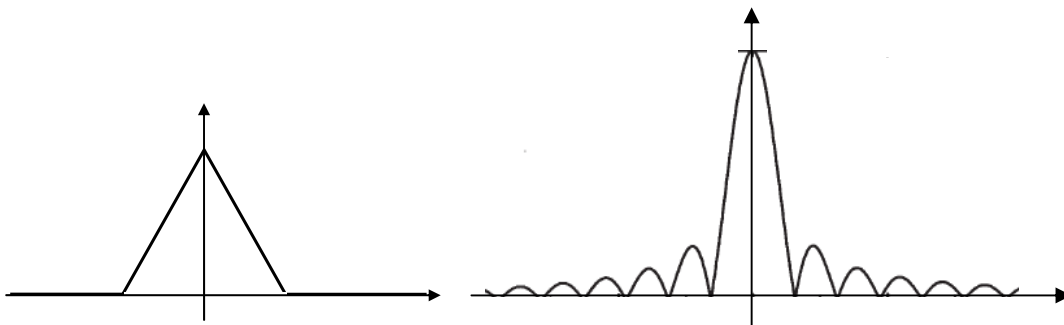
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{nếu } |t| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.101)$$

Áp dụng quy tắc tích phần từng phần ta được

$$\hat{\Lambda}(f) = \int_{-1}^1 (1-|t|) e^{-i2\pi ft} dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(2\pi ft) dt = (\text{sinc}(f))^2 \quad (1.102)$$

Áp dụng công thức (1.94) ta cũng có

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}^2(t)\} = \Lambda(f). \quad (1.103)$$



Hình 1.13: Đồ thị của $\Lambda(t)$ và biến đổi Fourier $\hat{\Lambda}(f)$

Ví dụ 1.20: Xét xung dạng mũ suy giảm về phải

$$x_r(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{nếu } t > 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0; \quad \lambda > 0 \end{cases} \quad (1.104)$$

Có biến đổi Fourier

$$\widehat{X}_r(f) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-i2\pi f t} dt = -\frac{e^{-(\lambda+i2\pi f)t}}{\lambda+i2\pi f} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda+i2\pi f}$$

Sử dụng công thức biến đổi Fourier ngược ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi f t}}{\lambda+i2\pi f} df = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{nếu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nếu } t = 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Tương tự với xung dạng mũ suy giảm về trái

$$x_l(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{nếu } t < 0 \\ 0 & \text{nếu } t > 0; \quad \lambda > 0 \end{cases} \quad (1.105)$$

Có biến đổi Fourier

$$\widehat{X}_l(f) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} e^{-i2\pi f t} dt = \frac{e^{(\lambda-i2\pi f)t}}{\lambda-i2\pi f} \Big|_{t=-\infty}^0 = \frac{1}{\lambda-i2\pi f}$$

Xung dạng mũ chẵn, hai phía

$$x_e(t) = e^{-\lambda|t|}; \quad \lambda > 0 \quad (1.106)$$

Rõ ràng $x_e(t) = x_l(t) + x_r(t)$, do đó biến đổi Fourier sẽ là

$$\widehat{X}_e(f) = \widehat{X}_l(f) + \widehat{X}_r(f) = \frac{1}{\lambda-i2\pi f} + \frac{1}{\lambda+i2\pi f} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (1.107)$$

Áp dụng biến đổi Fourier ngược ta có công thức tính tích phân

$$e^{-\lambda|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda e^{i2\pi f t}}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda \cos 2\pi f t}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} df$$

Xung dạng mũ lẻ $x_o(t) = (\text{sgn } t)e^{-\lambda|t|}$

$$x_o(t) = x_r(t) - x_l(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{nếu } t > 0 \\ -e^{\lambda t} & \text{nếu } t < 0; \quad \lambda > 0 \end{cases} \quad (1.108)$$

$$\widehat{X}_o(f) = \widehat{X}_r(f) - \widehat{X}_l(f) = \frac{1}{\lambda+i2\pi f} - \frac{1}{\lambda-i2\pi f} = -i \frac{4\pi f}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (1.109)$$

Sử dụng công thức biến đổi Fourier ngược ta được

$$(\operatorname{sgn} t)e^{-\lambda|t|} = -4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{fe^{i2\pi ft}}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} df = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f \sin 2\pi ft}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} df \quad (1.110)$$

Có thể nghiệm lại được $x_o(t) = (\operatorname{sgn} t)e^{-\lambda|t|} = \frac{1}{-\lambda} \frac{dx_e(t)}{dt}$,

do đó
$$\widehat{X}_o(f) = \frac{1}{-\lambda} (i2\pi f) \widehat{X}_e(f) = -i \frac{4\pi f}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Mặt khác, vì hàm xung dạng mũ lẻ gián đoạn tại $t = 0$ với bước nhảy bằng 2, do đó đạo hàm của nó chứa hàm delta và thỏa mãn

$$\frac{dx_o(t)}{dt} = -\lambda e^{-\lambda|t|} + 2\delta(t) = -\lambda x_e(t) + 2\delta(t)$$

Công thức này cũng thống nhất với kết quả của biến đổi Fourier

$$(i2\pi f) \widehat{X}_o(f) = \frac{8\pi^2 f^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = 2 - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = 2\widehat{\delta}(f) - \lambda \widehat{X}_e(f).$$

Ví dụ 1.21: Xét hàm hữu tỉ

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + c^2}, \quad c > 0$$

Áp dụng công thức (1.96) và (1.106)-(1.107) ta có

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} = e^{-\lambda|f|}, \quad \lambda > 0.$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda|f|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda e^{-i2\pi ft}}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2} dt = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi ft}}{t^2 + (\lambda/2\pi)^2} dt$$

$$\Rightarrow \widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi ft}}{t^2 + c^2} dt = \frac{\pi}{c} e^{-2\pi c|f|}$$

Vậy

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t^2 + c^2} \right\} = \frac{\pi}{c} e^{-2\pi c|f|}, \quad c > 0 \quad (1.111)$$

Ví dụ 1.22: Biến đổi Fourier của Hàm delta Dirac $\delta(t)$ tập trung giá trị tại $t = 0$.

Từ công thức (1.48)-(1.49) ta có

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{với } t \neq 0 \\ \infty & \text{với } t = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.112)$$

1. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$ với mọi hàm $x(t)$ liên tục tại 0.

2. $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i2\pi ft} dt = 1 \Rightarrow \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} df$. (1.113)

3. Nếu giả thiết $\delta(t)$ là hàm chẵn thì

$$\delta(t) = \delta(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi ft} df. \quad (1.114)$$

4. Áp dụng tính đồng dạng của biến đổi Fourier ta có

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \quad (1.115)$$

5. Đổi biến số lấy tích phân ta có

$$x(t_0) * \delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t_0 - t)dt = x(t_0) \quad (1.116)$$

với mọi hàm $x(t)$ liên tục tại t_0 .

Một kết quả thú vị nhận được từ xung dạng mũ chẵn (1.106) là nếu lấy giới hạn khi $\lambda \rightarrow 0$ ta nhận được hàm hằng đồng nhất bằng 1.

Mặt khác lấy giới hạn của biến đổi Fourier (1.107) của xung dạng mũ chẵn ta được

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } f = 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

Giới hạn này giúp ta nhớ đến định nghĩa của hàm delta

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi(1 + n^2 t^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + t^2)}, \text{ trong đó } n = \frac{1}{\lambda}.$$

Ví dụ 1.23: Hàm bước nhảy

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda \quad (1.118)$$

Hàm $\eta(t)$ không khả tích tuyệt đối trong toàn bộ trục thực nhưng theo tính chất tích phân của phép biến đổi Fourier (xem mục 1.4.3) ta có thể mở rộng và xem

$$\mathcal{F}\{\eta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\lambda)d\lambda\right\} = \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

Ví dụ 1.24: Hàm dấu

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ -1 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} = \eta(t) - \eta(-t) \quad (1.119)$$

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \mathcal{F}\{\eta(t)\} - \mathcal{F}\{\eta(-t)\} = \left(\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right) - \left(\frac{1}{-i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(-f)\right) = \frac{-i}{\pi f}.$$

Mặt khác từ các công thức (1.108)-(1.109) lấy giới hạn khi $\lambda \rightarrow 0$ ta cũng nhận được

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{-i}{\pi f}.$$

Ví dụ 1.25: Giả sử $x(t)$ có biến đổi Fourier là $\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t)dt$. Ta sẽ chứng minh

$$\text{biến đổi Fourier của } y(t) = \int_{-\infty}^t x(u)du \text{ là } \frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f).$$

Thật vậy, đặt $c = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \widehat{X}(0)$. Ta có $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c$, do đó hàm

$$z(t) = y(t) - c\eta(t)$$

có giới hạn 0 khi $t \rightarrow \pm\infty$, và biến đổi Fourier

$$\widehat{Z}(f) = \widehat{Y}(f) - \frac{c}{2}\delta(f) + \frac{ic}{2\pi f}$$

Mặt khác

$$z'(t) = x(t) - c\delta(t)$$

Do đó

$$\begin{aligned} (i2\pi f)\widehat{Z}(f) &= \widehat{X}(f) - c \Rightarrow \widehat{Z}(f) = \frac{\widehat{X}(f)}{i2\pi f} - \frac{c}{i2\pi f} = \widehat{Y}(f) - \frac{c}{2}\delta(f) + \frac{ic}{2\pi f} \\ \Rightarrow \widehat{Y}(f) &= \frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{c}{2}\delta(f) = \frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f). \end{aligned}$$

1.4.5 Các cặp biến đổi Fourier thường gặp

Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$	Giải thích
1) $\Pi_a(t)$	$2a \operatorname{sinc}(2af)$	Tính chất A.2. và Ví dụ 1.12
2) $2W \operatorname{sinc}(2Wt)$	$\Pi_W(f)$	Đối ngẫu với 1)
3) $\Lambda(t/T)$	$T \operatorname{sinc}^2(Tf)$	Tính chất A.2. và Ví dụ 1.13
4) $e^{-\lambda t} \eta(t); \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda + i2\pi f}$	Tính trực tiếp
5) $t e^{-\lambda t} \eta(t); \lambda > 0$	$\frac{1}{(\lambda + i2\pi f)^2}$	Đạo hàm của 4)
6) $e^{-\lambda t }; \lambda > 0$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}$	Ví dụ 1.15
7) $\frac{1}{t^2 + \lambda^2}; \lambda > 0$	$\frac{\pi}{\lambda} e^{-2\pi\lambda f }$	Đối ngẫu của 6)
8) $\delta(t)$	1	Định nghĩa của $\delta(t)$
9) 1	$\delta(f)$	Đối ngẫu của 8)
10) $\delta(t - t_0)$	$e^{-i2\pi f t_0}$	Trễ của 8)
11) $e^{i2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	Dịch chuyển ảnh
12) $\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$	Công thức Euler và 11)
13) $\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2i}$	Công thức Euler và 11)
14) $\eta(t)$	$\frac{-i}{2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$	Ví dụ 1.17
15) $\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{-i}{\pi f}$	Ví dụ 1.18
16) $\frac{1}{\pi t}$	$-i \operatorname{sgn}(f)$	Đối ngẫu 15)

1.5 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT: Discrete Fourier Transform)

Trong thực tế khi tính toán các dữ liệu nhận được không thể là hàm liên tục mà thường là các dữ liệu số rời rạc. Chẳng hạn, ngay cả khi đo các tín hiệu liên tục người ta cũng chỉ thực hiện một số hữu hạn các lần đo, đó là một mẫu của tín hiệu đầy đủ. Các phương tiện số (CD, DVD, ..) hoặc các dữ liệu thí nghiệm được lưu trữ trong máy tính cũng chỉ là các tín hiệu được lấy mẫu tại những khoảng thời gian rời rạc. Vì vậy mặc dù chuỗi Fourier về mặt lý thuyết là rất quan trọng không thể chối cãi được nhưng theo quan điểm tính toán cần phải chuyển các không gian hàm vô hạn chiều về các không gian véc tơ hữu hạn chiều của các dữ liệu mẫu.

Thông thường một tín hiệu liên tục $x(t)$ xác định trong đoạn $[a, b]$, máy tính chỉ có thể lưu trữ các giá trị đo được của nó tại một số hữu hạn *điểm mẫu* $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$. Đơn giản nhất người ta xét các điểm mẫu cách đều nhau.

$$t_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, n, \quad \text{trong đó } h = \frac{b-a}{n} \text{ là tốc độ mẫu.}$$

Khi xử lý tín hiệu $x(t)$, biến số t chỉ thời gian và t_j chỉ thời điểm lấy mẫu lần thứ j . Tốc độ mẫu h rất cao, thường lấy khoảng $10 \cdot 10^{-3} - 20 \cdot 10^{-3}$ giây.

Chuỗi Fourier thích hợp với các hàm tuần hoàn, tổng của chuỗi Fourier rời rạc thích hợp với các tín hiệu được lấy mẫu tuần hoàn. (trong thực tế các tín hiệu lấy mẫu hiếm khi tuần hoàn, tuy nhiên vì mục đích tính toán giải tích người ta thường mở rộng tuần hoàn từ tín hiệu mẫu gốc). Để đơn giản ta chọn chu kỳ 2π (trường hợp chu kỳ khác có thể nhận được bằng phép đổi biến). Ở đây ta chọn khoảng $[0; 2\pi]$ thay cho $[-\pi; \pi]$. Các điểm mẫu tương ứng

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad t_2 = \frac{4\pi}{n}, \quad \dots \quad t_j = \frac{2j\pi}{n}, \quad \dots \quad t_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n} \quad (1.120)$$

Tính tuần hoàn đòi hỏi $x(0) = x(2\pi)$, do đó giá trị tại điểm mẫu $x_n = 2\pi$ được bỏ qua. Việc lấy mẫu (giá trị phức) của tín hiệu hoặc hàm số $x(t)$ tại các điểm mẫu cung cấp một *véc tơ mẫu*

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})), \quad \text{trong đó } x_j = x(t_j) = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \quad (1.121)$$

Sự lấy mẫu không thể phân biệt được giữa những hàm có cùng giá trị mẫu tại tất cả các điểm mẫu, như vậy chúng phải được đồng nhất như nhau theo quan điểm lấy mẫu. Chẳng hạn hàm tuần hoàn

$$x(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

Có các giá trị mẫu

$$x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = \exp\left(in\frac{2j\pi}{n}\right) = e^{2j\pi} = 1 \quad \text{với mọi } j = 0, \dots, n-1$$

Vi vậy không thể phân biệt với hàm hằng $c(t) \equiv 1$, cả hai hàm đều có véc tơ mẫu là $(1, 1, \dots, 1)$. Điều này dẫn đến một hệ quả quan trọng là việc lấy mẫu tại n điểm cách đều nhau không thể tách các tín hiệu tần số n . Một cách tổng quát hơn, hai tín hiệu mũ giá trị phức

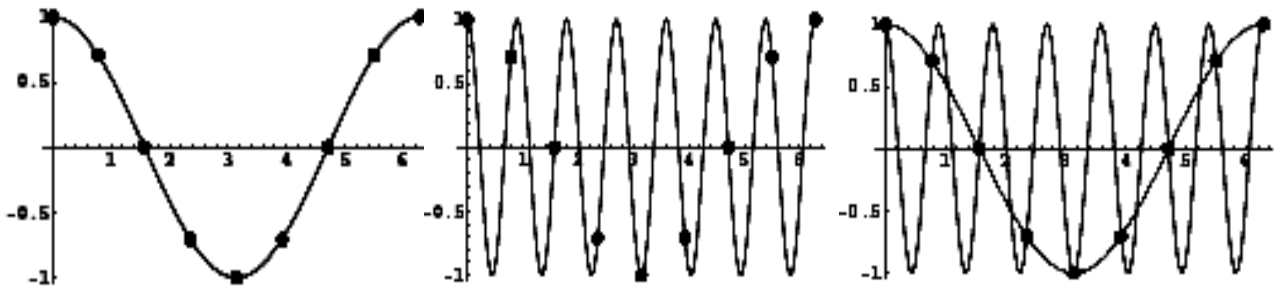
$$e^{i(k+n)t} \sim e^{ikt} \tag{1.122}$$

là không thể phân biệt khi lấy mẫu. Vì vậy chỉ cần chọn n hàm mũ phức đầu tiên sau đây làm cơ sở để biểu diễn cho các tín hiệu được lấy mẫu bất kỳ tuần hoàn chu kỳ 2π với n điểm mẫu.

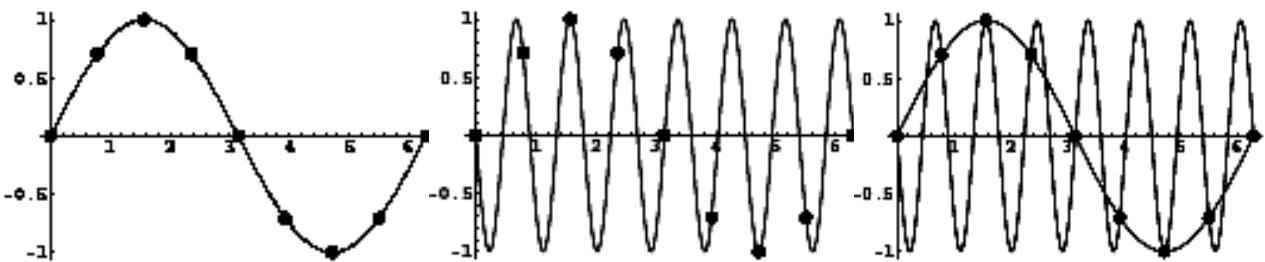
$$x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = e^{it}, \quad x_2(t) = e^{i2t}, \quad \dots \quad x_{n-1}(t) = e^{i(n-1)t} \tag{1.123}$$

Đặc biệt hàm mũ tần số “âm” e^{-ikt} có thể chuyển về dạng $e^{i(n-k)t}$ có cùng giá trị mẫu. Chẳng hạn e^{-it} và $e^{i(n-1)t}$ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu. Tuy nhiên ngoài giá trị mẫu hai hàm này hoàn toàn khác nhau, hàm e^{-it} có tần số thấp còn $e^{i(n-1)t}$ có tần số cao hơn.

Hình sau cho sự so sánh đồ thị của e^{-it} và e^{i7t} với $n = 8$ điểm mẫu.



Hình 1.14: Đồ thị của $\cos t$ và $\cos 7t$ với 8 điểm mẫu



Hình 1.15: Đồ thị của $\sin t$ và $-\sin 7t$ với 8 điểm mẫu

Vi không thể phân biệt giá trị mẫu của các hàm mũ có tần số lớn hơn n (xem công thức 1.122) do đó chỉ có thể khai triển $x(t)$ thành tổng của các hàm mũ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu dưới dạng

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \dots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} \quad (1.124)$$

trong đó

$$x(t_j) = p(t_j) \text{ với mọi } j = 0, \dots, n-1 \quad (1.125)$$

Như vậy $p(t)$ là đa thức lượng giác nội suy bậc $\leq n-1$ đối với các dữ liệu mẫu $x_j = x(t_j)$. Nếu $x(t)$ nhận giá trị thực thì đa thức lượng giác nội suy tương ứng được chọn là phần thực của $p(t)$.

Vì chúng ta làm việc với các dữ liệu là các véc tơ mẫu thuộc không gian phức hữu hạn chiều \mathbf{C}^n , do đó ta có thể chuyển chuỗi Fourier rời rạc về dạng véc tơ.

Mẫu của các hàm của cơ sở gồm các hàm mũ (1.123) được biểu diễn dưới dạng véc tơ

$$\omega_k = \left(e^{ikt_0}, e^{ikt_1}, e^{ikt_2}, \dots, e^{ikt_{n-1}} \right) = \left(1, e^{i2k\pi/n}, e^{i4k\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)k\pi/n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.126)$$

Vì vậy, điều kiện nội suy (1.125) được viết lại dưới dạng véc tơ

$$\mathbf{x} = c_0 \omega_0 + c_1 \omega_1 + \dots + c_{n-1} \omega_{n-1} \quad (1.127)$$

Nói cách khác ta có thể tính các hệ số Fourier rời rạc c_0, c_1, \dots, c_{n-1} của $x(t)$ bằng cách biểu diễn véc tơ mẫu \mathbf{x} thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ mẫu hàm mũ cơ sở $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

Định lý 1.12: Hệ các véc tơ $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của \mathbf{C}^n với tích vô hướng trung bình xác định như sau

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{y_j} ; \quad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{C}^n \quad (1.128)$$

Để chứng minh ta xét

$$\mathcal{E} = e^{i2\pi/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

Lũy thừa n lần ta được

$$\mathcal{E}^n = (e^{i2\pi/n})^n = e^{i2\pi} = 1.$$

Vậy \mathcal{E} là một căn bậc n của 1: $\mathcal{E} = \sqrt[n]{1}$.

Có n số phức khác nhau là n căn bậc n của 1, trong đó có 1 và các lũy thừa của \mathcal{E} , cụ thể

$$\mathcal{E}^k = e^{i2k\pi/n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} ; \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.129)$$

Véc tơ ω_k trong công thức (1.126) có thể viết lại

$$\omega_k = (1, e^{jk}, e^{2jk}, \dots, e^{(n-1)jk}); \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.130)$$

Từ công thức

$$z^n - 1 = (z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})$$

Suy ra

$$1 + e^{jk} + e^{2jk} + \dots + e^{(n-1)jk} = \begin{cases} n & \text{nếu } k = 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 < k < n \end{cases} \quad (1.131)$$

Ngoài ra từ tính chất $e^{k+n} = e^k$ có thể mở rộng công thức (1.131) cho mọi số nguyên k bất kỳ,

$$1 + e^{jk} + e^{2jk} + \dots + e^{(n-1)jk} = \begin{cases} n & \text{nếu } k \text{ là bội số của } n \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (1.132)$$

Từ (1.128) và (1.132) ta có

$$\langle \omega_k; \omega_l \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{jk} \overline{e^{jl}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{j(k-l)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = l \\ 0 & \text{nếu } k \neq l \end{cases} \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.133)$$

Vậy $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Như vậy các hệ số c_0, c_1, \dots, c_{n-1} trong công thức (1.127) là tọa độ của véc tơ \mathbf{x} trong cơ sở này

$$c_k = \langle \mathbf{x}; \omega_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{e^{ikt_j}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ikt_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-jk} x_j \quad (1.134)$$

Nói cách khác, hệ số Fourier rời rạc c_k có được bằng cách lấy trung bình của các giá trị mẫu của hàm tích $x(t)e^{-ikt}$.

Chuyển từ tín hiệu $x(t)$ thành các hệ số Fourier rời rạc gọi là phép biến đổi Fourier rời rạc, ký hiệu

$$DFT \{x(t)\} = \widehat{X}(k) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}); \quad c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-jk} x_j, \quad x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \quad (1.135)$$

Biến đổi ngược

$$IDFT \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \quad x_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{jk} c_k \quad (1.136)$$

x_0, x_1, \dots, x_{n-1} là các giá trị mẫu của hàm $x(t)$ và đa thức lượng giác $p(t)$ thỏa mãn

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \dots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}. \quad (1.137)$$

Ví dụ 1.26: Xét trường hợp $n = 4$ thì $\mathcal{E} = e^{i2\pi/4} = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i$.

Các véc tơ mẫu là

$$\omega_0 = (1, 1, 1, 1), \quad \omega_1 = (1, i, -1, -i), \quad \omega_2 = (1, -1, 1, -1), \quad \omega_3 = (1, -i, -1, i).$$

Cho tín hiệu có các giá trị mẫu

$$x_0 = x(0), \quad x_1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 = x(\pi), \quad x_3 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Ta có biểu diễn Fourier rời rạc

$$\mathbf{x} = c_0 \omega_0 + c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + c_3 \omega_3$$

Trong đó

$$c_0 = \langle \mathbf{x}; \omega_0 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3), \quad c_1 = \langle \mathbf{x}; \omega_1 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3)$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x}; \omega_2 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3), \quad c_3 = \langle \mathbf{x}; \omega_3 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)$$

Chẳng hạn nếu $x(t) = 2\pi t - t^2$

thì $x_0 = 0, \quad x_1 = 7,4022 \quad x_2 = 9,8696 \quad x_3 = 7,4022$

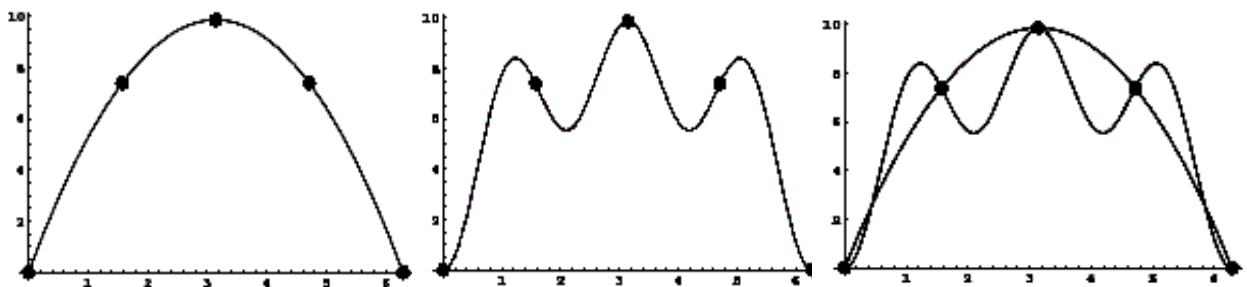
do đó $c_0 = 6,1685 \quad c_1 = -2,4674 \quad c_2 = -1,2337 \quad c_3 = -2,4674$

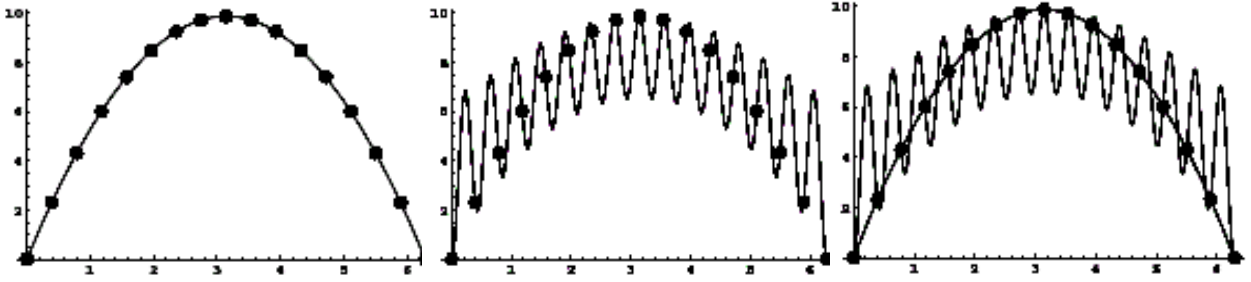
Vì vậy đa thức lượng giác nội suy là phần thực của đa thức

$$p(t) = 6,1685 - 2,4674 e^{it} - 1,2337 e^{i2t} - 2,4674 e^{i3t} \quad (1.138)$$

Cụ thể $\text{Re } p(t) = 6,1685 - 2,4674 \cos t - 1,2337 \cos 2t - 2,4674 \cos 3t$

Trong hình sau chúng ta sẽ so sánh tín hiệu $x(t)$ và các biểu diễn Fourier với $n = 4$ và $n = 8$.





Hình 1.16: Biến đổi Fourier của $2\pi t - t^2$ ứng với $n = 4$ và $n = 16$

Kết quả của đồ thị chỉ ra rằng có cản trở đáng kể đối với phép biến đổi Fourier rời rạc đó là trong khi đa thức lượng giác nội suy một cách chính xác từ các giá trị mẫu của tín hiệu nhưng đáng điều dao động cao làm cho chúng vượt xa các điểm mẫu (hình 1.16).

Tuy nhiên khó khăn này có thể khắc phục được một cách linh hoạt. Vấn đề là ta đã không chú ý đầy đủ đến các tần số được biểu diễn trong tổng Fourier (1.134).

Hình 1.17 cho ta thấy rằng các hàm mũ có tần số cao và tần số thấp có thể cho cùng dữ liệu mẫu nhưng có sự khác nhau rõ rệt trong khoảng giữa các điểm mẫu. Một nửa các số hạng đầu trong công thức tổng Fourier (1.134) có tần số thấp, nửa còn lại có tần số cao hơn. Ta thay các hàm mũ tần số cao này bằng các hàm mũ tần số thấp hơn tương ứng, như vậy sẽ giảm bớt sự dao động của các hàm mũ.

Cụ thể với $0 < k \leq \frac{n}{2}$ thì e^{-ikt} và $e^{i(n-k)t}$ có cùng các giá trị mẫu, nhưng hàm e^{-ikt} có tần số thấp hơn $e^{i(n-k)t}$.

Vì vậy ta sẽ thay các hàm mũ trong các số hạng nửa sau của tổng Fourier (1.134) bằng các hàm mũ tương ứng có tần số thấp hơn.

Nếu $n = 2m + 1$ là một số lẻ thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \dots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \dots + c_me^{imt} = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikt} \quad (1.139)$$

Nếu $n = 2m$ là một số chẵn thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

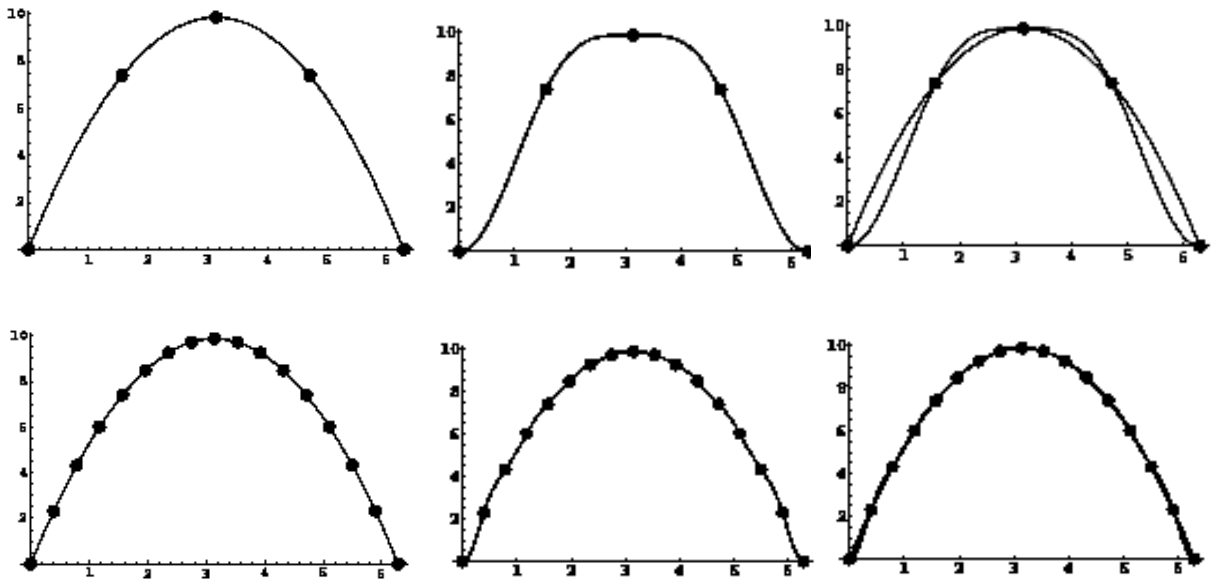
$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \dots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \dots + c_{m-1}e^{i(m-1)t} = \sum_{k=-m}^{m-1} c_k e^{ikt} \quad (1.140)$$

Trở lại ví dụ trên, ta thay đa thức lượng giác nội suy (1.137) bằng đa thức dạng (1.139)

$$\hat{p}(t) = -1,2337e^{-i2t} - 2,4674e^{-it} + 6,1685 - 2,4674e^{it}$$

$$\text{Re } \hat{p}(t) = 6,1685 - 4,9348 \cos t - 1,2337 \cos 2t \quad (1.141)$$

Hình 1.17 sau đây so sánh đồ thị của hàm gốc $2\pi t - t^2$ và các đa thức lượng giác nội suy gồm các hàm mũ tần số thấp ứng với $n = 4$ và $n = 16$.

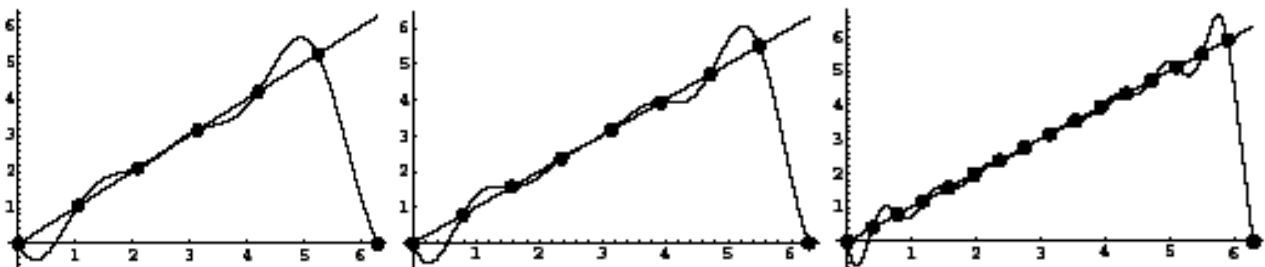


Hình 1.17: Biến đổi Fourier tần số thấp của $2\pi t - t^2$ ứng với $n = 4$ và $n = 16$

Như vậy, bằng cách sử dụng tần số thấp ta có thể nội suy một hàm cho trước bằng đa thức lượng giác cùng giá trị mẫu.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $x(t)$ liên tục, tuần hoàn chu kỳ 2π , và khả vi liên tục từng khúc thì đa thức lượng giác nội suy (1.139)-(1.140) hội tụ đều về $x(t)$ khi số các điểm mẫu $n \rightarrow \infty$. Trường hợp hàm $x(t)$ không liên tục thì xuất hiện hiện tượng Gibbs tại các điểm không liên tục.

Hình 1.18 sau đây minh họa hiện tượng Gibbs của đồ thị các đa thức nội suy hàm $x(t) = t$ ứng với 6, 8 và 16 điểm mẫu.



Hình 1.18: Biến đổi Fourier của hàm $x(t) = t$

Nén và khử nhiễu

Các tín hiệu thực nghiệm, nhiễu có khuynh hướng ảnh hưởng tới các mode tần số cao, trong khi đó những đặc điểm chủ yếu thiên về tích lũy ở tần số thấp. Vì vậy, một phương pháp rất đơn giản nhưng hiệu quả để khử tín hiệu nhiễu là phân tích nó thành các mode Fourier như công thức (1.124) sau đó loại trừ các thành phần tần số cao. Điểm chính ở đây là định rõ điểm phân biệt tần số thấp và tần số cao, tức là phân biệt giữa tín hiệu với nhiễu. Sự lựa chọn này phụ thuộc vào tính chất của tín hiệu đo được và đặt nhiệm vụ cho xử lý tín hiệu.

Để áp dụng một cách chính xác quy trình khử nhiễu, tốt hơn hết ta sử dụng dạng dao động thấp theo công thức (1.139), (1.140) của đa thức nội suy lượng giác, trong đó các số hạng tần số thấp xuất hiện khi $|k|$ nhỏ. Vì vậy, để khử các thành phần tần số cao chúng ta thay tổng đầy đủ bằng

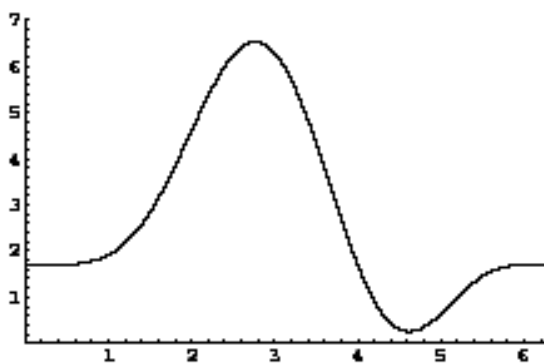
$$q(x) = \sum_{k=-l}^l c_k e^{ikt} \quad (1.142)$$

trong đó số $l < \frac{1}{2}(n+1)$ đặc trưng cho điểm phân biệt giữa tần số thấp và tần số cao, các hệ số c_k thỏa mãn công thức (1.134). Nói cách khác, thay vì giữ tất cả n thành phần, thì $2l+1 \ll n$ các mode Fourier tần số thấp thường sẽ đủ để biểu diễn phiên bản khử nhiễu của tín hiệu gốc.

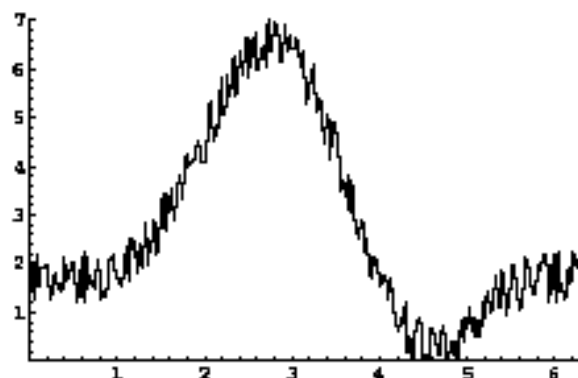
Hình 1.19 biểu diễn tín hiệu và tín hiệu bị sai lệch do tác động của nhiễu ngẫu nhiên. Chúng ta dùng $n = 2^8 = 512$ điểm mẫu trong tính toán. Để khử nhiễu, ta chỉ giữ lại $2l+1 = 11$ tần số thấp nhất. Nói cách khác thay vì lấy tất cả 512 hệ số Fourier $c_{-256}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{255}$, ta chỉ tính 11 hệ số ứng với tần số thấp nhất c_{-5}, \dots, c_5 .

Tổng Fourier tương ứng $\sum_{k=-5}^5 c_k e^{ikt}$ biểu diễn tín hiệu đã sạch nhiễu.

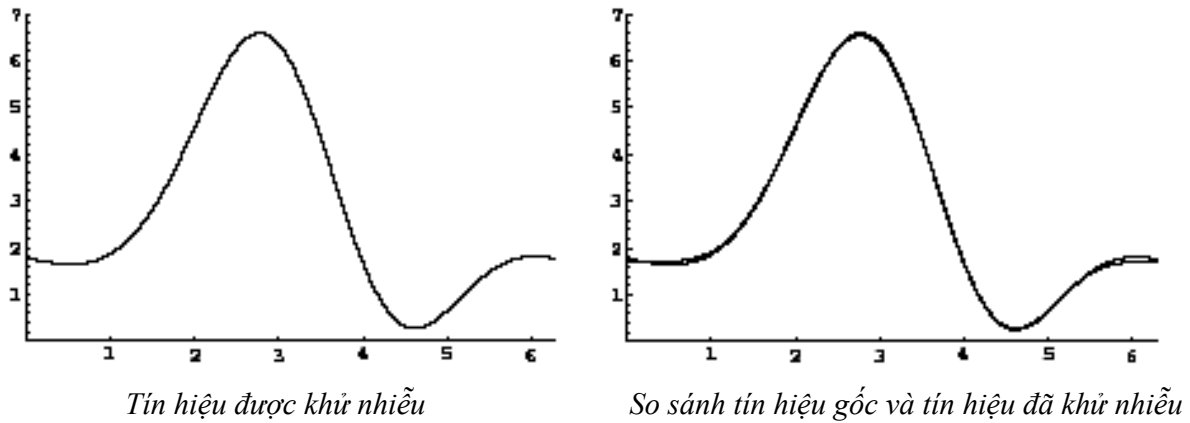
Đồ thị cuối cùng biểu diễn đồng thời tín hiệu gốc và tín hiệu đã khử nhiễu. Sự sai lệch giữa hai đồ thị nhỏ hơn 0,15 trên toàn đoạn $[0, 2\pi]$.



Tín hiệu gốc



Tín hiệu nhiễu



Hình 1.19: Khử nhiễu của tín hiệu

Chương trình MATLAB dùng lệnh

$$X = \text{fft}(x) \quad (1.142)$$

để tính DFT (công thức (1.135)), trong đó $x = \{x_j\}_{j=1}^n$ và $X = \{c_j\}_{j=1}^n$ (công thức được tính ứng với $j = 1, \dots, n$ thay cho $j = 0, \dots, n-1$).

$$x = \text{ifft}(X) \quad (1.143)$$

để tính biến đổi ngược IDFT (công thức (1.136)).

CHƯƠNG 2: WAVELET

“Lý thuyết Wavelet” là kết quả của sự nỗ lực chung giữa các nhà toán học, các nhà vật lý và các nhà kỹ thuật ... đã mang lại. Sự liên kết này đã tạo nên luồng ý tưởng vượt ra khỏi việc xây dựng các cơ sở hoặc các phép biến đổi mới.

Stéphane Mallat

Giải tích wavelet là một phương pháp mới, mặc dù nền tảng toán học của nó bắt nguồn từ công trình của Joseph Fourier thế kỷ 19. Giải tích Fourier phân tích các tín hiệu thành tổ hợp các sóng hình sin với nhiều tần số khác nhau. Một cách tương tự, giải tích wavelet phân tích các tín hiệu thành tổ hợp các phiên bản của wavelet gốc (wavelet mẹ) với các thang độ (scaling) và trễ (shifting) khác nhau.

Alfred Haar được xem là người đầu tiên đề cập đến wavelet vào năm 1909, ngày nay người ta gọi các wavelet đó là các Haar wavelet.

Khái niệm wavelet trình bày dưới dạng lý thuyết như hiện nay lần đầu tiên được Jean Morlet và các đồng nghiệp ở Trung tâm Vật lý lý thuyết Marseille đưa ra. Các phương pháp wavelet được phát triển và ứng dụng một cách nhanh chóng và hiệu quả, có thể kể đến những đóng góp chính trong lĩnh vực này là của Y. Meyer và các đồng nghiệp. Hầu hết các thuật toán chính ngày nay đang sử dụng đều dựa trên công trình của Stephane Mallat 1988 và kể từ đó lý thuyết wavelet trở thành lý thuyết cả thế giới quan tâm. Ở Mỹ, một nhóm các nhà khoa học có nhiều công trình liên quan đến lý thuyết wavelet, có thể kể đến như Ingrid Daubechies, Ronald Coifman, và Victor Wickerhauser.

Lý thuyết wavelet được phát triển rất nhanh chóng, các bài báo toán học và ứng dụng về lý thuyết này được xuất bản hàng tháng. Đã có toolbox wavelet của phần mềm MATLAB, có trang web riêng theo địa chỉ <http://www.wavelet.org/> và có Hội wavelet quốc tế.

2.1 HAAR WEVELET

Chuỗi Fourier lượng giác là một công cụ cực mạnh được sử dụng trong cả hai trường hợp rời rạc và liên tục nhưng cũng có nhược điểm đáng kể, đó là: Các hàm cơ bản

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

xác định và liên tục trên toàn đoạn $[-\pi; \pi]$, do đó không thích nghi tốt với các tín hiệu được địa phương hóa, trong đó ý nghĩa của dữ liệu chỉ tập trung trong miền tương đối nhỏ. Thật vậy, ví dụ trường hợp hàm Dirac $\delta(t)$ có giá trị tập trung tại $t = 0$. Do đó ta có các hệ số Fourier

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \tag{2.1}$$

và chuỗi Fourier tương ứng

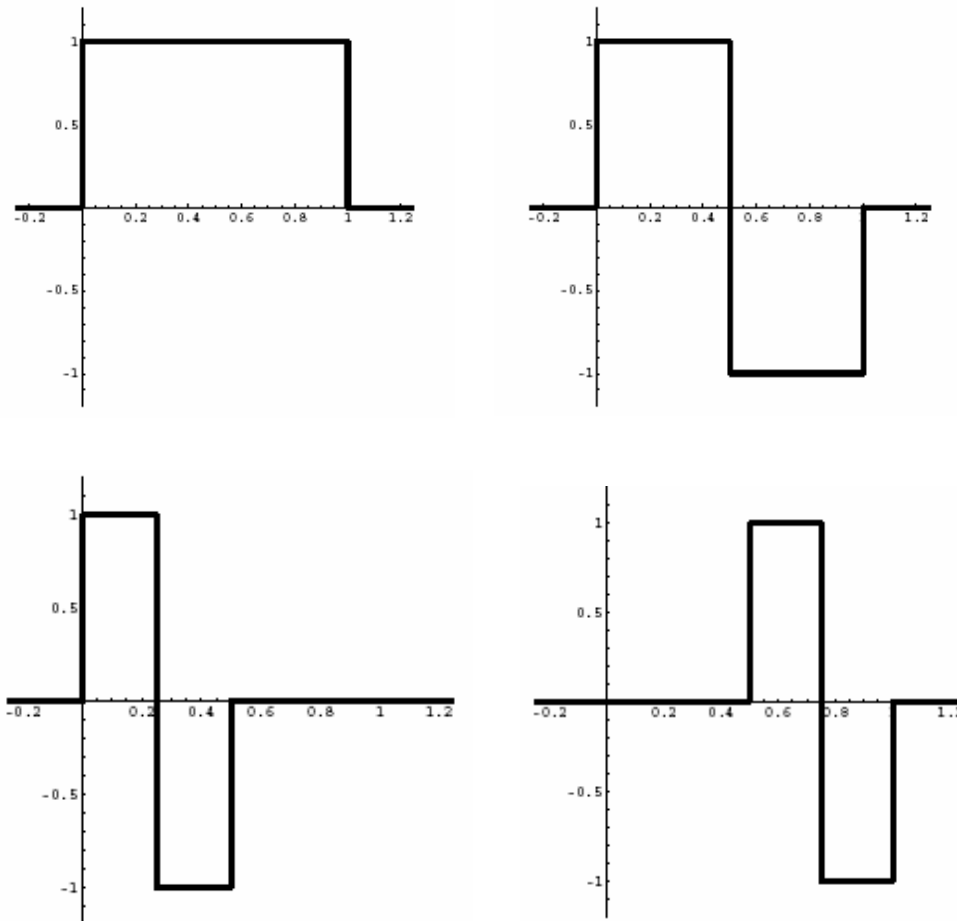
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} (\dots + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + \dots) \quad (2.2)$$

làm mất hoàn toàn tính chất địa phương chỉ tập trung giá trị tại $x = 0$ của hàm Dirac.

Vì vậy cần xây dựng một hệ các hàm trực giao có đủ các tính chất tốt như hệ các hàm lượng giác Fourier, đồng thời chuyển tải được tính chất địa phương hóa của các tín hiệu. Hệ các hàm cần tìm là các hàm wavelet.

Giống như các hàm lượng giác, các hàm wavelet có bản sao rời rạc nhận được bằng cách lấy mẫu. Phép biến đổi wavelet rời rạc có thể tính toán một cách nhanh chóng, do đó rất thuận lợi khi xử lý các tín hiệu phức tạp và các dữ liệu ảnh nhiều chiều.

Chúng ta bắt đầu với 4 hàm wavelet cơ bản được Alfréd Haar (nhà toán học Hungary) giới thiệu năm 1910.



Hình 2.1: Bốn hàm Haar wavelet

Hàm Haar wavelet thứ nhất gọi là *hàm scaling* (scaling function), xác định như sau

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \equiv 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.3)$$

Hàm Haar wavelet thứ hai gọi là *wavelet mẹ* (mother wavelet)

$$\varphi_2(t) = \omega(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Giá trị của hàm $\omega(t)$ tại những điểm rời rạc không quan trọng lắm, nhưng tương tự trường hợp khai triển Fourier ta quy ước cho $\omega(t) = 0$ tại các điểm $t = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Hàm Haar wavelet thứ ba và hàm Haar wavelet thứ tư là dạng nén của hàm wavelet mẹ, được gọi là các hàm wavelet con (daughter wavelet), xác định như sau

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/4 \\ -1 & 1/4 < t < 1/2 \\ 0 & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad \varphi_4(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1/2 \\ 1 & 1/2 < t < 3/4 \\ -1 & 3/4 < t < 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Hàm *scaling* $\varphi(t)$ và wavelet mẹ $\omega(t)$ được mở rộng lên toàn bộ tập số thực \mathbb{R} bằng cách cho nhận giá trị 0 bên ngoài khoảng cơ bản:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad \omega(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (2.6)$$

Khi đó ta có các biểu diễn khác

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t-1) \quad (2.7a)$$

$$\omega(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) = \eta(t) - 2\eta(t-1/2) + \eta(t-1) \quad (2.7b)$$

$$\varphi_3(t) = \omega(2t), \quad \varphi_4(t) = \omega(2t-1) \quad (2.7c)$$

Trong không gian các hàm xác định trong đoạn $[0,1]$ ta xét tích vô hướng L^2 xác định như sau

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt. \quad (2.8)$$

Với tích vô hướng này ta có thể kiểm tra được 4 hàm Haar wavelet trực giao nhau.

Hiển nhiên các hàm Haar wavelet có thể rời rạc hóa như sau. Nếu ta chia đoạn $[0,1]$ thành 4 khoảng:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right) \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \left(\frac{3}{4}, 1\right) \quad (2.9)$$

trên mỗi khoảng các hàm Haar wavelet nhận giá trị không đổi, do đó ta có thể biểu diễn mỗi hàm tương ứng với một véc tơ của \mathbb{R}^4 mà mỗi thành phần là giá trị của hàm Haar wavelet trong các khoảng này. Như vậy ta có 4 véc tơ wavelet mẫu

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1, -1) \quad (2.10)$$

Tạo thành một cơ sở trực giao wavelet của \mathbb{R}^4 với tích vô hướng trọng số trung bình $\frac{1}{4}$ xác định như sau:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4); \quad \frac{1}{4}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) \quad (2.11)$$

Nếu

$$x(t) \sim \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{và} \quad y(t) \sim \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

là hai hàm nhận giá trị hằng trong các khoảng trên, khi đó L^2 tích vô hướng của $x(t)$ và $y(t)$ và tích vô hướng trong \mathbb{R}^4 với trọng số trung bình $\frac{1}{4}$ của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ và $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ bằng nhau.

$$\langle x; y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt = \frac{1}{4}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) = \frac{1}{4}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (2.12)$$

Như vậy L^2 tích vô hướng (2.8) của hai hàm $x(t)$, $y(t)$ hằng trong các khoảng (2.9) bằng tích vô hướng trung bình trong \mathbb{R}^4 của véc tơ có các thành phần là mẫu của $x(t)$, $y(t)$.

Nói cách khác tương ứng: $x(t) \mapsto \mathbf{f} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là một ánh xạ đẳng cự giữa các hàm nhận giá trị hằng trong các khoảng dạng (2.9) và các véc tơ của \mathbb{R}^4 .

Từ tính chất biểu diễn duy nhất của véc tơ bất kỳ của \mathbb{R}^4 thành tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ trực giao (2.10) ta cũng có cách biểu diễn duy nhất tương ứng của các hàm nhận giá trị hằng trong các khoảng (2.9) theo cơ sở các hàm Haar wavelet:

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) + c_4\varphi_4(t)$$

Véc tơ mẫu tương ứng

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$$

Trong đó các hệ số được tính như sau

$$c_k = \frac{\langle x; \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{v}_k \rangle}{\|\mathbf{v}_k\|^2} \quad (2.12)$$

Áp dụng công thức (2.11) ta tính được

$$c_1 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad c_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \quad c_4 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$$

Định nghĩa 2.1: Giá của hàm $x(t)$ xác định trong miền I , ký hiệu $\text{supp } x$, là bao đóng của tập $\{t \in I : x(t) \neq 0\}$.

Nhận xét 2.1: Từ định nghĩa trên ta có thể suy ra các kết quả sau:

- 1) Nếu $x(a) \neq 0$ thì $a \in \text{supp } x$.
- 2) $a \in \text{supp } x$ khi và chỉ khi tồn tại dãy $t_n \rightarrow a$ và $x(t_n) \neq 0$.
- 3) $a \notin \text{supp } x$ khi và chỉ khi $x(t) \equiv 0$ trong một lân cận nào đó của a .

Một cách trực quan ta thấy rằng giá của hàm càng bé thì tính chất địa phương hóa càng cao. Chẳng hạn giá của hàm Haar wavelet mẹ:

$$\text{supp } \omega = [0, 1]$$

(mặc dù $\omega(t) = 0$ tại các điểm $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ nhưng có giới hạn khác 0 tại những điểm này)

Giá của các hàm Haar wavelet con $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$:

$$\text{supp } \varphi_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \text{supp } \varphi_4 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\text{supp } \varphi_3 \subset \text{supp } \omega, \quad \text{supp } \varphi_4 \subset \text{supp } \omega$$

Như vậy giá trị của hai hàm Haar wavelet con có tính chất địa phương hóa cao hơn hàm Haar wavelet mẹ.

Trường hợp đặc biệt hàm $\delta(t)$ có giá là một điểm trong khi đó giá của các hàm lượng giác Fourier là đoạn $[-\pi, \pi]$.

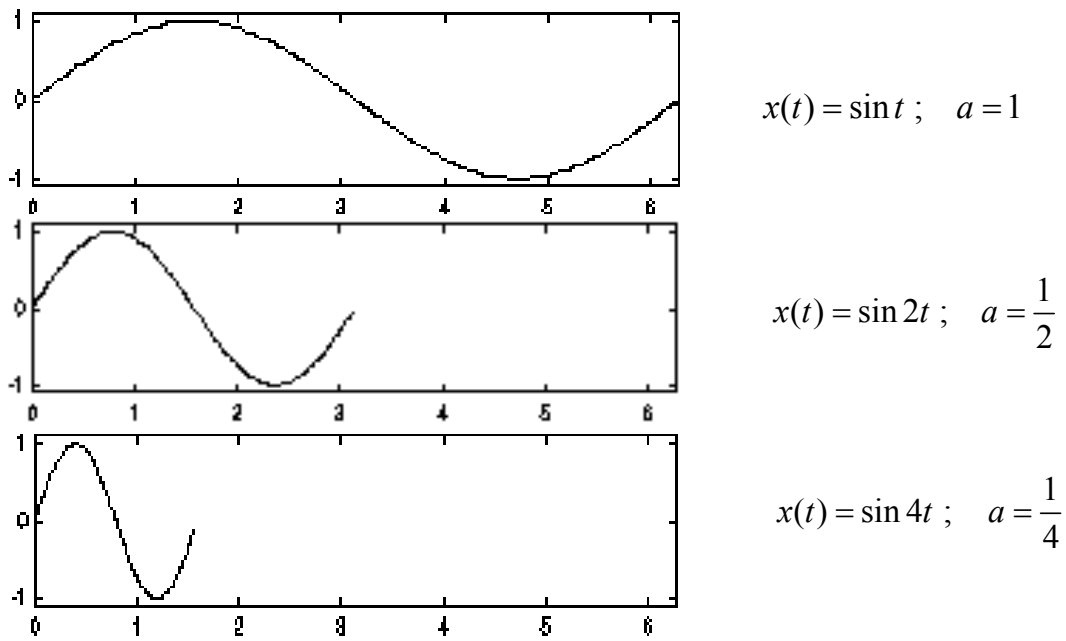
Chúng ta có thể tịnh tiến và phân bậc giá của các hàm theo cách sau:

$$\text{supp } x = [a, b] \Rightarrow \text{supp } y = \left[\frac{a + \delta}{r}, \frac{b + \delta}{r}\right] \text{ với } y(t) = x(rt - \delta) \quad (2.13)$$

Như vậy nếu phân bậc giá trị đối số t theo hệ số r thì giá của hàm bị nén theo hệ số $\frac{1}{r}$.

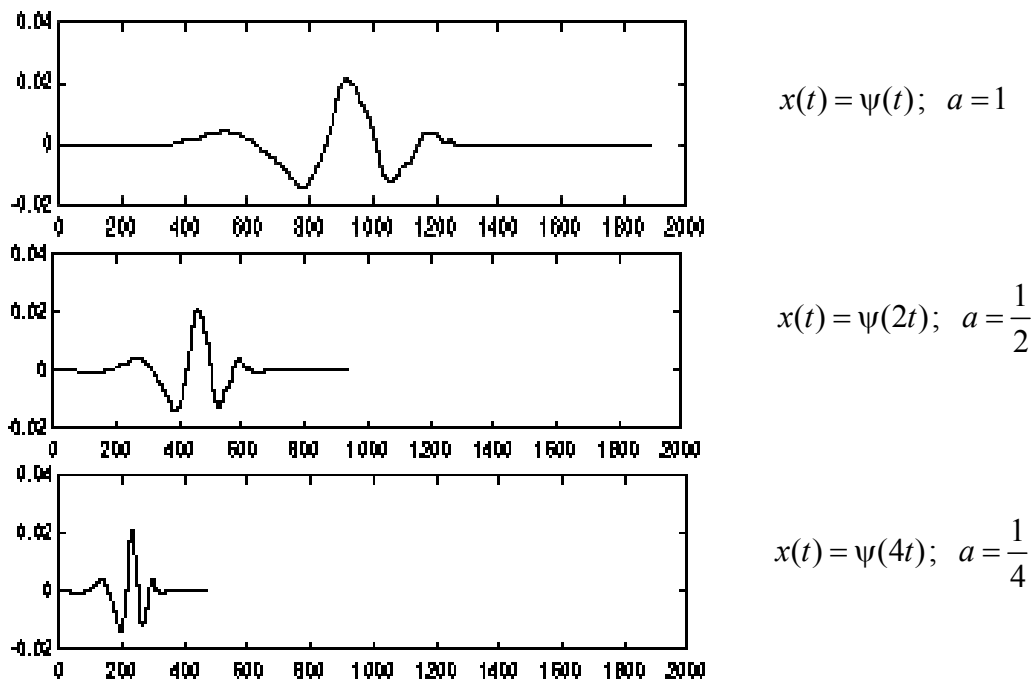
Sự phân bậc (scaling)

Sự phân bậc của hàm wavelet được hiểu một cách đơn giản là sự kéo dài hoặc nén lại.



Hình 2.2: Đồ thị của hàm $x(t) = \sin t$ ứng với các hệ số phân bậc $a = 1, a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$

Hệ số phân bậc càng nhỏ thì hàm càng được nén nhiều hơn.

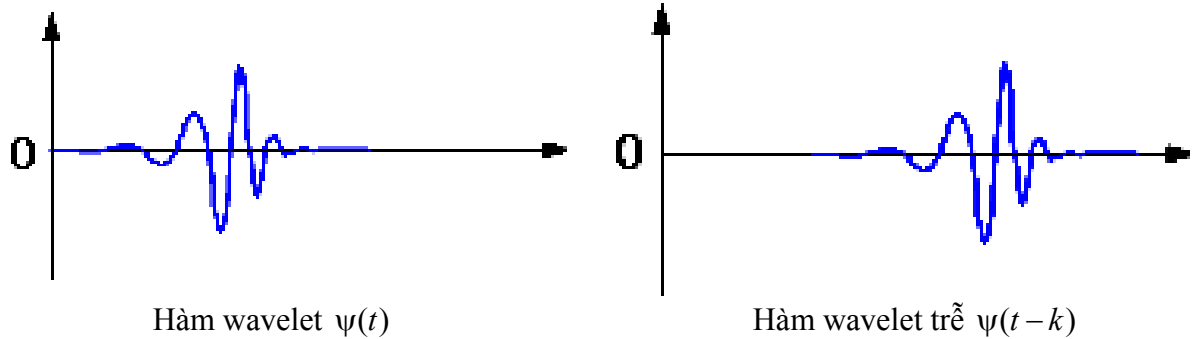


Hình 2.3: Đồ thị của hàm $x(t) = \psi(t)$ ứng với các hệ số phân bậc $a = 1, a = \frac{1}{2}$,

Đối với hàm $\sin \omega t$ hệ số phân bậc là nghịch đảo của tần số góc ω . Đối với hàm wavelet hệ số phân bậc liên quan đến tần số của tín hiệu.

Sự tịnh tiến theo thời gian (shifting)

Sự tịnh tiến theo thời gian của các hàm wavelet được hiểu một cách đơn giản là trễ hoặc đến sớm của tín hiệu.



Hình 2.4

Đòi hỏi then chốt của một cơ sở wavelet là phải chứa các hàm với giá bé tùy ý. Cơ sở các hàm Haar wavelet đầy đủ như thế có thể nhận được từ hàm Haar wavelet mẹ bằng phép tịnh tiến và phân bậc giá.

Chúng ta bắt đầu từ hàm *scaling* $\varphi(t)$.

Với mỗi số tự nhiên $j \geq 0$, trước hết ta nén hàm Haar wavelet mẹ sao cho giá của nó là khoảng có độ dài bằng 2^{-j} :

$$\omega_{j,0}(t) = \omega(2^j t), \text{ có giá } \text{supp } \omega_{j,0} = [0, 2^{-j}].$$

Tiếp tục dịch chuyển $\omega_{j,0}$ để lấp đầy đoạn $[0,1]$ bởi 2^j đoạn con mà mỗi đoạn có độ dài 2^{-j} , bằng cách xác định

$$\omega_{j,k}(t) = \omega_{j,0}(t-k) = \omega(2^j t - k), \text{ trong đó } k = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \quad (2.14)$$

Áp dụng công thức (2.13) ta có

$$\text{supp } \omega_{j,k} = [2^{-j} k, 2^{-j} (k+1)], \text{ do đó } \bigcup_{k=0}^{2^j-1} \text{supp } \omega_{j,k} = [0, 1] \quad (2.15)$$

Trường hợp $j = 0$ các hàm xác định theo công thức (2.14) chỉ bao gồm hàm Haar wavelet mẹ

$$\omega_{0,0}(t) = \omega(t).$$

Trường hợp $j = 1$ công thức (2.14) xác định hai hàm Haar wavelet con $\varphi_3(x)$ và $\varphi_4(x)$

$$\omega_{1,0}(t) = \omega(2t), \quad \omega_{1,1}(t) = \omega(2t-1).$$

Trường hợp $j = 2$ công thức (2.14) xác định bốn cơ sở:

$$\omega_{2,0}(t) = \omega(4t), \omega_{2,1}(t) = \omega(4t-1), \omega_{2,2}(t) = \omega(4t-2), \omega_{2,3}(t) = \omega(4t-3).$$

Tám hàm Haar wavelet $\varphi, \omega_{0,0}, \omega_{1,0}, \omega_{1,1}, \omega_{2,0}, \omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \omega_{2,3}$ nhận giá trị hằng trên 8 khoảng có độ dài $\frac{1}{8}$, với giá trị mẫu tương ứng là các cột của ma trận

$$W_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Có thể kiểm tra được các cột của ma trận W_8 tạo thành hệ véc tơ trực giao của không gian \mathbb{R}^8 .

Định lý 2.1: Hàm Haar wavelet $\varphi(t)$ và các hàm $\omega_{j,k}(t)$ tạo thành hệ trực giao theo tích vô hướng (2.8).

Chứng minh: Theo công thức (2.8) hàm $\omega_{j,k}(t)$ nhận giá trị 1 trong khoảng có độ dài 2^{-j-1} và nhận giá trị -1 trong khoảng cũng có độ dài 2^{-j-1} . Vậy

$$\langle \omega_{j,k}; \varphi \rangle = \int_0^1 \omega_{j,k}(t) dt = 0 \quad (2.16)$$

Với hai hàm $\omega_{j,k}(t), \omega_{l,m}(t)$, giả sử $j \leq l$, khi đó giá của chúng hoặc rời nhau hoặc giá của $\omega_{l,m}(t)$ chứa trong giá của $\omega_{j,k}(t)$.

Trường hợp giá rời nhau thì $\omega_{j,k}(t)\omega_{l,m}(t) \equiv 0$ do đó

$$\langle \omega_{j,k}; \omega_{l,m} \rangle = \int_0^1 \omega_{j,k}(t)\omega_{l,m}(t) dt = 0.$$

Trường hợp giá của $\omega_{l,m}(t)$ chứa trong giá của $\omega_{j,k}(t)$ thì giá của $\omega_{l,m}(t)$ chứa trong khoảng mà $\omega_{j,k}(t)$ nhận giá trị 1 hoặc -1 , vì vậy $\omega_{j,k}(t)\omega_{l,m}(t) = \pm\omega_{l,m}(t)$.

Theo công thức (2.16) ta có

$$\langle \omega_{j,k}; \omega_{l,m} \rangle = \int_0^1 \omega_{j,k}(t)\omega_{l,m}(t) dt = \pm \int_0^1 \omega_{l,m}(t) dt = 0$$

Hơn nữa ta có

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 dt = 1, \quad \|\omega_{j,k}\|^2 = \int_0^1 \omega_{j,k}(t)^2 dt = 2^{-j} \quad (2.17)$$

Trên cơ sở hệ trực giao $\varphi(t)$ và các hàm $\omega_{j,k}(t)$ ta có thể định nghĩa chuỗi wavelet của tín hiệu $x(t)$:

$$x(t) \sim c_0\varphi(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}\omega_{j,k}(t) \quad (2.18)$$

Các hệ số được tính theo công thức sau:

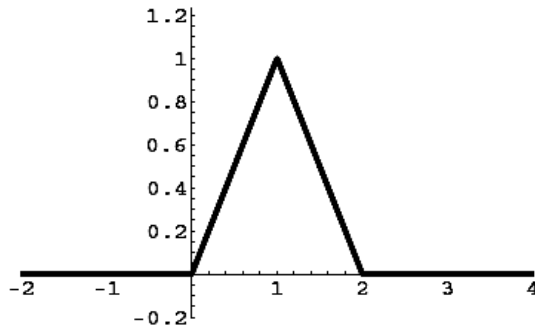
$$c_0 = \frac{\langle x; \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} = \int_0^1 x(t)dt, \quad c_{j,k} = \frac{\langle x; \omega_{j,k} \rangle}{\|\omega_{j,k}\|^2} = 2^j \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}k+2^{-j-1}} x(t)dt - 2^j \int_{2^{-j}k+2^{-j-1}}^{2^{-j}(k+1)} x(t)dt \quad (2.19)$$

2.2 DAUBECHIES WAVELET

Hệ các hàm Haar wavelet là các hàm hằng trong các đoạn, vì vậy khi sử dụng chúng để biểu diễn các tín hiệu liên tục sẽ gặp trở ngại lớn, đây là một yếu điểm của phương pháp này. Chẳng hạn với hàm tuyến tính đơn giản $x = at + b$ cũng đòi hỏi cần nhiều giá trị mẫu, vì vậy cần số lượng lớn các hàm Haar wavelet để biểu diễn. Đặc biệt thuật toán nén và khử nhiễu trên cơ sở hàm Haar wavelet hoặc thiếu chính xác hoặc kém hiệu quả, do đó ít được sử dụng trong thực tế.

Trong một thời gian dài người ta nghĩ rằng đòi hỏi cùng lúc về tính địa phương hóa cao, tính trực giao và biểu diễn chính xác các tín hiệu của các hàm đơn giản là không thể đồng thời thỏa mãn. Tuy nhiên đến năm 1988 trong luận án của mình nhà toán học Bỉ, Ingrid Daubechies đã giới thiệu ví dụ thứ nhất của các hàm wavelet cơ sở thỏa mãn đồng thời ba tiêu chuẩn trên. Trong những năm sau đó, các hàm wavelet đã được phát triển và áp dụng trong ngành công nghiệp công nghệ cao.

Một số ứng dụng có ý nghĩa của các hàm wavelet hiện đại có thể kể đến là nén các dữ liệu vân tay của FBI, format ảnh kiểu mới JPEG2000 không giống với chuẩn JPEG đã sử dụng phương pháp Fourier. Công nghệ wavelet còn được kết hợp chặt chẽ với kỹ thuật nén và khôi phục ảnh.



Hình 2.5: Hàm "hat"

Trong mục này chúng ta trình bày một cách ngắn gọn ý tưởng cơ bản theo cách xây dựng các hàm của Daubechies.

Lược đồ chung xây dựng một hệ các hàm wavelet bất kỳ đều bắt nguồn từ hai hàm cơ bản là hàm scaling và hàm wavelet mẹ, sau đó tiếp tục theo dạng công thức (2.7b) (2.15). Vì vậy chỉ cần tập trung vào tính chất của hàm scaling. Hàm scaling phải thỏa mãn phương trình giản có dạng

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^p c_k \varphi(2t - k) = c_0 \varphi(2t) + c_1 \varphi(2t - 1) + \dots + c_p \varphi(2t - p) \quad (2.20)$$

Từ tính chất trực giao và địa phương hóa có thể suy ra giá trị các hằng số c_0, c_1, \dots, c_p .

Ví dụ 2.1: Hàm Haar scaling theo công thức (2.6) thỏa mãn công thức (2.20) với $c_0 = c_1 = 1$, cụ thể

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1) \quad (2.21)$$

Hàm “hat”, hình 9.2, có công thức xác định ảnh

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (2.22)$$

Có thể kiểm tra được, hàm “hat” thỏa mãn phương trình (2.20) với các hệ số $c_0 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, tức là

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \varphi(2t) + \varphi(2t - 1) + \frac{1}{2} \varphi(2t - 2) \quad (2.23)$$

Cần chú ý rằng phương trình giản (2.20) là phương trình hàm, việc giải phương trình dạng này hoàn toàn không đơn giản, ngay cả chứng minh tồn tại nghiệm cũng rất khó khăn.

Từ một nghiệm của phương trình giản, ta xây dựng wavelet mẹ dưới dạng mở rộng công thức (2.7a) của hàm Haar wavelet như sau

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^p (-1)^k c_{p-k} \varphi(2t - k) = c_p \varphi(2t) - c_{p-1} \varphi(2t - 1) + c_{p-2} \varphi(2t - 2) + \dots \pm c_0 \varphi(2t - p) \quad (2.24)$$

Các wavelet con có được bằng cách phân bậc và tịnh tiến của hàm wavelet mẹ theo công thức (2.15)

$$\omega_{j,k}(t) = \omega(2^j t - k) \quad (2.25)$$

Trong mô hình tổng quát, chúng ta không cần phải hạn chế xét trong khoảng $[0, 1]$ vì vậy với mỗi $j \geq 0$ thì k trong công thức (2.25) là số nguyên tùy ý.

Tính chất địa phương hóa của wavelet đòi hỏi hàm scaling có giá bị chặn, nghĩa là $\varphi(t) \equiv 0$ với mọi giá trị t ngoài đoạn $[a, b]$ nào đó. Tích phân hai vế của công thức (2.20) ta được

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^p c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) dt \quad (2.26)$$

Đổi biến số $u = 2t - k$ trong các tích phân cuối, ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi(u) du \quad (2.27)$$

Từ (2.26), (2.27) nhận được

$$c_0 + c_1 + \dots + c_p = 2 \quad (2.28)$$

Ví dụ 2.2: Áp công thức (2.28) vào phương trình giản đơn giản nhất ta được

$$\varphi(t) = 2\varphi(2t) \quad (2.30)$$

trong đó chỉ có duy nhất hệ số khác 0 là $c_0 = 2$. Với sai khác một hằng số nhân, phương trình (2.30) có nghiệm duy nhất với giá bị chặn là hàm $\delta(t)$. Các nghiệm khác, chẳng hạn $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, có giá không bị chặn, không phải là hàm địa phương hóa. Vì vậy không được dùng để xây dựng các hàm wavelet.

Điều kiện trực giao được xét với L^2 tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

Có thể chứng minh được rằng tính chất trực giao của hệ các hàm wavelet mẹ (2.24) và các wavelet con (2.25) xây dựng từ hàm scaling thỏa mãn phương trình giản (2.20) được suy ra từ tính chất trực giao của hàm scaling khi tịnh tiến đối số theo mọi số nguyên tùy ý

$$\langle \varphi(t); \varphi(t - m) \rangle = 0 \quad \text{với mọi } m \neq 0 \quad (2.31)$$

Thay điều kiện (2.31) vào các phương trình (2.20)-(2.24)-(2.25) ta suy ra

$$\sum_{0 \leq k \leq p-2m} c_{2m+k} c_k = \begin{cases} 2 & \text{nếu } m = 0 \\ 0 & \text{nếu } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Phương trình (2.28) và (2.32) là đòi hỏi cơ bản để xác định cơ sở các wavelet trực giao.

Chẳng hạn, phương trình (2.28) và (2.32) với hai hệ số khác không c_0, c_1 tương ứng là

$$c_0 + c_1 = 2, \quad c_0^2 + c_1^2 = 2.$$

Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm duy nhất $c_0 = c_1 = 1$, dẫn đến phương trình giản Haar (2.7b).

Trường hợp có ba hệ số khác không c_0, c_1, c_2 phương trình (2.28) và (2.32) trở thành

$$c_0 + c_1 + c_2 = 2, \quad c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 2, \quad c_0 c_2 = 0.$$

Hệ phương trình có nghiệm hoặc $c_0 = c_1 = 1, c_2 = 0$ hoặc $c_0 = 0, c_1 = c_2 = 1$, cả hai kết quả này đều suy ra phương trình giản Haar (2.7b).

Đặc biệt hàm “hat” (2.22) không sinh ra hệ wavelet trực giao (không thỏa mãn điều kiện (2.31)).

Phương trình (2.28) và (2.32) với bốn hệ số khác không c_0, c_1, c_2, c_3

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2, \quad c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2, \quad c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0.$$

Daubechies đã tìm được nghiệm không tầm thường của hệ phương trình trên là

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \quad (2.33)$$

Phương trình giản Daubechies tương ứng

$$\varphi(t) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-3) \quad (2.34)$$

Giải phương trình giản

Ta tìm nghiệm của phương trình giản (2.20) bằng cách tìm điểm bất động $\varphi = F(\varphi)$ của toán tử F trong không gian vô hạn chiều của các hàm số.

Để tìm điểm bất động $\varphi = F(\varphi)$ ta xuất phát từ hàm Haar scaling (hàm hộp)

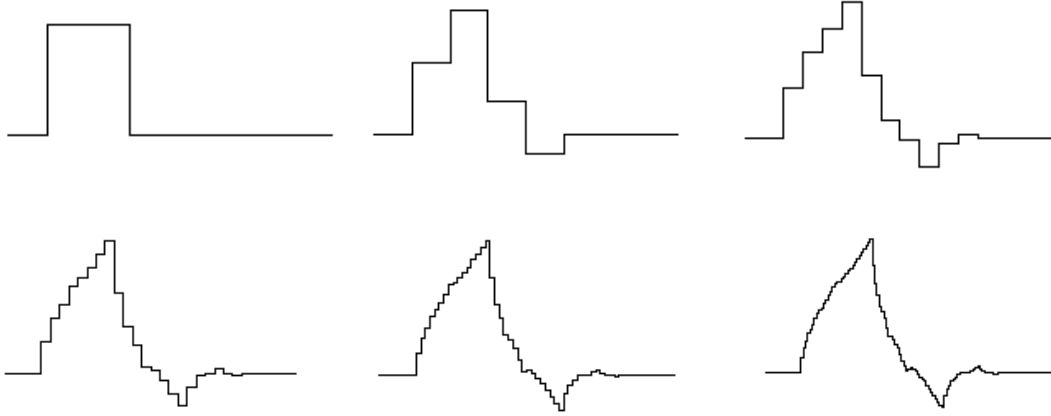
$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta được

$$\varphi_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^p c_k \varphi_n(2t-k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Định lý 2.2: Dãy hàm $\varphi_n(t)$ xác định bởi (2.35) hội tụ đều về hàm $\varphi(t)$ thỏa mãn phương trình (2.20) và được gọi là hàm scaling Daubechies.

Hình sau là đồ thị của 6 hàm $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_5(t)$ xác định bởi (2.35) với các hệ số thỏa mãn (2.33).



Hình 2.6: Đồ thị của các hàm $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_5(t)$

Tính chất trực giao của hệ các hàm Daubechies wavelet (hàm scaling thỏa mãn phương trình giản (2.20), wavelet mẹ (2.24) và các wavelet con $\omega_{j,k} = \omega(2^j t - k)$, $j \geq 0$) với các hệ số c_k thỏa mãn phương trình (2.28) và (2.32) được suy ra từ tính chất trực giao tịnh tiến nguyên của hàm Daubechies scaling (2.31).

Mặt khác theo cách tìm hàm Daubechies scaling $\varphi(t)$ theo Định lý 2.1 ta lại thấy:

- Hàm Haar scaling $\varphi_0(t)$ thỏa mãn trực giao tịnh tiến nguyên

$$\langle \varphi_0(t); \varphi_0(t-k) \rangle = 0 \text{ với mọi } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Bằng quy nạp ta cũng có $\langle \varphi_{n+1}(t); \varphi_{n+1}(t-k) \rangle = 0$ với mọi $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\|\varphi_0\|^2 = 1 \text{ và } \|\varphi_{n+1}\|^2 = \|\varphi_n\|^2$$

Suy ra hàm Daubechies scaling $\langle \varphi(t); \varphi(t-k) \rangle = 0$ với mọi $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ và $\|\varphi\|^2 = 1$.

Từ công thức (2.25) ta cũng có $\|\omega_{j,k}\|^2 = 2^{-j}$.

Hàm Daubechies wavelet mẹ tương ứng với các hệ số (2.33) và hàm scaling (2.34)

$$\omega(t) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t) - \frac{3-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-1) + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-2) - \frac{1+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-3) \quad (2.36)$$

Giá của hàm Daubechies scaling $\varphi(t)$ và wavelet mẹ $\omega(t)$

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } \omega = [0, 3].$$

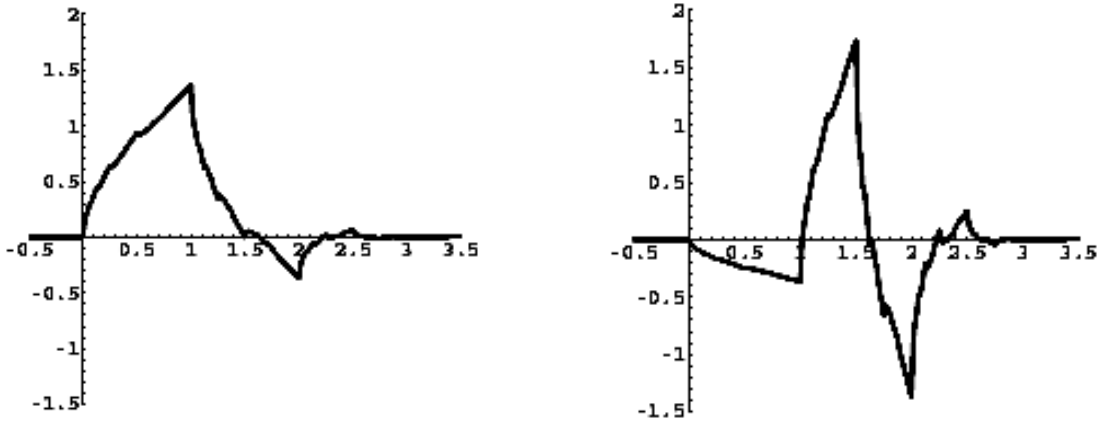
Khai triển Daubechies wavelet của hàm có giá chứa trong khoảng $[0, 3]$ có dạng

$$x(t) \sim c_0 \varphi(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \omega_{j,k}(t) \quad (2.37)$$

Các hệ số $c_0, c_{j,k}$ được tính dựa vào tính chất trực giao của hệ các hàm Daubechies wavelet,

$$c_0 = \langle x; \varphi \rangle = \int_0^3 x(t)\varphi(t)dt, \quad (2.38a)$$

$$c_{j,k} = \langle x; \omega_{j,k} \rangle = 2^j \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+3)} x(t)\omega_{j,k}(t)dt = \int_0^3 x(2^{-j}(t+k))\omega_{j,k}(t)dt \quad (2.38b)$$



Hình 2.7: Đồ thị của hàm Daubechies scaling $\varphi(t)$ và wavelet mẹ $\omega(t)$

Trong trường hợp hàm cần khai triển có giá lớn hơn khoảng $[0,3]$, người ta thêm vào khai triển các số hạng tương ứng bằng cách tịnh tiến các wavelet có giá chứa giá của hàm cần khai triển. Hoặc theo cách ngược lại, người ta đổi biến để đưa giá của hàm cần khai triển chứa trong khoảng $[0,3]$.

2.3 PHÉP BIẾN ĐỔI WAVELET

Phép biến đổi Wavelet được Morlet và cộng sự giới thiệu từ những năm 80 của thế kỷ 20, trong đó ông ta đã sử dụng phép biến đổi Wavelet để đánh giá các dữ liệu địa chấn. Kể từ đây nhiều dạng khác nhau của phép biến đổi Wavelet được phát triển và có nhiều ứng dụng. Phép biến đổi Wavelet thời gian liên tục còn được gọi là phép biến đổi Wavelet tích phân (integral wavelet transform, viết tắt IWT), đã được ứng dụng trong phân tích dữ liệu. Tuy nhiên, dạng thông dụng nhất là phép biến đổi Wavelet rời rạc (discrete wavelet transform, viết tắt DWT), được sử dụng trong lĩnh vực kỹ thuật bao gồm nén ảnh, khử nhiễu, tính tích phân số, và nhận dạng.

2.3.1 Phép biến đổi Wavelet thời gian liên tục

Biến đổi Wavelet $W_x(b, a)$ của tín hiệu thời gian liên tục $x(t)$ được định nghĩa theo công thức sau

$$W_x(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2.39)$$

trong đó $\psi(t)$ là wavelet.

Nếu $\psi(t)$ là đáp ứng xung băng thông thì phân tích Wavelet được xem là phân tích băng thông. Sự thay đổi của tham số a kéo theo sự thay đổi tần số trung tâm và độ rộng băng thông. Sự biến thiên của b mang ý nghĩa sự chuyển dịch theo thời gian, vì vậy với mỗi a cố định công thức (2.39) có thể xem là tích chập của $x(t)$ với nghịch đảo thời gian và hàm wavelet được chỉnh lại:

$$W_x(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} x(t) * \Psi_a(t), \quad \Psi_a(t) = \overline{\Psi\left(\frac{-t}{a}\right)}.$$

Nhân tử $\frac{1}{\sqrt{a}}$ được đưa vào công thức trên là để đảm bảo cho mọi hàm được chỉnh $\frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\Psi\left(\frac{t}{a}\right)}$

với $a \in \mathbb{R}$ có cùng năng lượng.

Khác với phép biến đổi Fourier thời gian ngắn (short-time Fourier transform viết tắt STFT) gọi là phân tích thời gian – tần số, phân tích wavelet được gọi là phân tích thời gian – phân bậc, vì hàm wavelet có tính phân bậc.

Tương tự phép biến đổi Fourier và phép biến đổi Laplace ta cần tìm điều kiện để phép biến đổi Wavelet có biến đổi ngược. Người ta chứng minh được rằng điều kiện để có biến đổi Wavelet ngược là

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty \quad (2.40)$$

trong đó $\widehat{\Psi}(f)$ là biến đổi Fourier của wavelet $\psi(t)$.

Dĩ nhiên để thỏa mãn điều kiện (2.40) hàm wavelet phải thỏa mãn

$$\widehat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.41)$$

2.3.2 Tính biến đổi Wavelet dựa vào biến đổi Fourier

Ký hiệu

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.42)$$

Phép biến đổi Wavelet của hàm $x(t)$ trong công thức (2.39) có thể viết dưới dạng tích vô hướng

$$W_x(b, a) = \langle x(t); \psi_{b,a}(t) \rangle \quad (2.43)$$

Áp dụng đẳng thức Parseval ta được

$$W_x(b, a) = \left\langle \widehat{X}(f); \widehat{\Psi}_{b,a}(f) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) \overline{\widehat{\Psi}_{b,a}(f)} df = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} e^{i2\pi bf} df \quad (2.44)$$

2.3.3 Các wavelet phân tích thời gian – phân bậc

Phân tích thời gian – phân bậc là một trong những mục đích mà phép biến đổi Wavelet có lợi thế. Các wavelet giải tích là đặc biệt phù hợp cho mục đích này. Cũng giống như phân tích tín hiệu, chỉ chứa các tần số dương. Nói cách khác biến đổi Fourier của các wavelet giải tích $\psi_{b,a}(t)$ thỏa mãn

$$\widehat{\Psi}_{b,a}(f) \text{ với mọi } f \leq 0 \quad (2.45)$$

Xét tín hiệu $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ có biến đổi Fourier tương ứng

$$x(t) = \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \quad (2.46)$$

Theo công thức (2.44) ta có

$$\begin{aligned} W_x(b, a) &= \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} e^{i2\pi bf} df = \frac{1}{2} \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \overline{\widehat{\Psi}(af)} e^{i2\pi bf} df \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|a|} \left[\overline{\widehat{\Psi}(af_0)} e^{i2\pi bf_0} + \overline{\widehat{\Psi}(-af_0)} e^{-i2\pi bf_0} \right] \end{aligned}$$

Vậy với wavelet giải tích ta có

$$W_x(b, a) = \frac{1}{2} \sqrt{|a|} \overline{\widehat{\Psi}(af_0)} e^{i2\pi bf_0} \quad (2.47)$$

Vì đối số của hàm mũ trong công thức (2.47) chỉ phụ thuộc b , tần số của $x(t)$ có thể suy ra từ pha của $W_x(b, a)$. Cường độ của $W_x(b, a)$ độc lập với b , do đó biên độ của $x(t)$ có thể xem là độc lập với thời gian. Điều này có nghĩa là cường độ của $W_x(b, a)$ biểu diễn trực tiếp phân bố thời gian – tần số của năng lượng tín hiệu.

Wavelet Morlet

Wavelet phức có dạng cải tiến từ hàm Gauss như sau được gọi là Wavelet Morlet

$$\psi(t) = e^{i2\pi f_0 t} e^{-\beta^2 t^2 / 2} \quad (2.48)$$

Chú ý rằng Wavelet Morlet không thỏa mãn điều kiện tồn tại phép biến đổi Wavelet ngược (2.40) mà chỉ thỏa mãn dưới dạng xấp xỉ. Tuy nhiên bằng cách chọn các tham số f_0 và β trong công thức (2.48) thì điều kiện (2.40) của wavelet Morlet có thể chấp nhận được. Chẳng hạn, ta có phép biến đổi Fourier của Wavelet Morlet

$$\widehat{\Psi}(f) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{-2\pi^2 (f-f_0)^2 / \beta^2} > 0, \text{ với mọi } f \quad (2.49)$$

Bằng cách chọn $f_0 \geq \beta$ ta có $\widehat{\Psi}(f) \leq 2,7 \cdot 10^{-9}$ với mọi $f \leq 0$.

2.3.4 Công thức phép biến đổi Wavelet ngược

Để tìm công thức phép biến đổi Wavelet ngược, trước hết ta xác định công thức tích vô hướng của hai tín hiệu $x(t)$ và $y(t)$ theo biến đổi Wavelet

$$\langle x; y \rangle = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(b, a) \overline{W_y(b, a)} \frac{dadb}{a^2} \quad (2.50)$$

trong đó C_Ψ thỏa mãn điều kiện (2.40).

Ký hiệu
$$p_a(b) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \widehat{X}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} \right\}$$

Từ công thức (2.44) ta có

$$W_x(b, a) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} e^{i2\pi bf} df = \sqrt{|a|} p_a(b)$$

Tương tự, ký hiệu
$$q_a(b) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \widehat{Y}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} \right\}$$

Ta được
$$W_y(b, a) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Y}(f) \overline{\widehat{\Psi}(af)} e^{i2\pi bf} df = \sqrt{|a|} q_a(b)$$

Thay vào vế phải của công thức (2.50) ta được

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(b, a) \overline{W_y(b, a)} \frac{dadb}{a^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} p_a(b) \overline{q_a(b)} db da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \langle p_a; q_a \rangle da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \langle \widehat{P}_a; \widehat{Q}_a \rangle da = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(v); \overline{\widehat{Y}(v)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(av)|^2}{|a|} dadv \end{aligned}$$

Đổi biến số $f = av$ ta có
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(av)|^2}{|a|} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{|f|} df = C_\Psi.$$

Thay vào công thức trên ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(b, a) \overline{W_y(b, a)} \frac{dadb}{a^2} = C_\Psi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(v) \overline{\widehat{Y}(v)} dv = C_\Psi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = C_\Psi \langle x; y \rangle.$$

Như vậy ta đã chứng minh xong công thức (2.50).

Xét trường hợp đặc biệt $y(t') = \delta(t' - t) = \delta_t(t')$

$$\langle x; \delta_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t'-t) = x(t) \quad (2.51)$$

Thay vào công thức (2.50) ta được

$$\langle x; \delta_t \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(b, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'-t) \psi\left(\frac{t'-b}{a}\right) dt' \frac{da db}{a^2} \quad (2.52)$$

Từ (2.51) và (2.52) ta được

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(b, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \quad (2.53)$$

CHƯƠNG 3: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Nhiều vấn đề trong kỹ thuật, trong điện tử viễn thông, trong lý thuyết mạch ..., đưa về giải các phương trình, hệ phương trình chứa đạo hàm, tích phân của các hàm nào đó, nghĩa là phải giải các phương trình vi phân, tích phân hay phương trình đạo hàm riêng. Việc giải trực tiếp các phương trình này nói chung rất khó. Kỹ sư Heaviside là người đầu tiên đã vận dụng phép biến đổi Laplace để giải quyết các bài toán liên quan đến mạch điện.

Phép biến đổi Laplace có vai trò quan trọng trong lý thuyết điều khiển, phân tích các hệ tuyến tính, điện tử và trong nhiều lãnh vực khác của khoa học và kỹ thuật.

Phép biến đổi Laplace biến mỗi hàm gốc theo biến t thành hàm ảnh theo biến s . Với phép biến đổi này việc tìm hàm gốc thoả mãn các biểu thức chứa đạo hàm, tích phân (nghiệm của phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng...) được quy về tính toán các biểu thức đại số trên các hàm ảnh. Khi biết hàm ảnh, ta sử dụng phép biến đổi ngược để tìm hàm gốc cần tìm.

Trong mục ta này giải quyết hai bài toán cơ bản của phép biến đổi Laplace là tìm biến đổi thuận, biến đổi nghịch và một vài ứng dụng của nó.

Các hàm số trong chương này được ký hiệu là $x(t)$, $y(t)$,... thay cho $f(x)$, $g(x)$,... , vì $x(t)$, $y(t)$ được ký hiệu cho các tín hiệu phụ thuộc vào thời gian t .

3.1 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE THUẬN

3.1.1 Định nghĩa biến đổi Laplace

Định nghĩa 3.1: Giả sử $x(t)$ là hàm số thực xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được định nghĩa và ký hiệu:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (3.1)$$

Trong công thức (3.1) $x(t)$ được gọi là hàm gốc, $X(s)$ được gọi là hàm ảnh của phép biến đổi.

Phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được gọi là tồn tại nếu tích phân (3.1) hội tụ với giá trị s trong miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ không tồn tại.

Phép biến đổi Laplace là thực hay phức nếu biến số s của hàm ảnh $X(s)$ là thực hay phức.

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các hàm gốc bằng các chữ bé $x(t), y(t), \dots$ còn các biến đổi của nó bằng các chữ in hoa $X(s), Y(s), \dots$. Đôi khi cũng được ký hiệu bởi $\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \dots$.

3.1.2 Điều kiện tồn tại

Định nghĩa 3.2: Hàm biến thực $x(t)$ được gọi là hàm gốc nếu thoả mãn 3 điều kiện sau:

1. $x(t) = 0$ với mọi $t < 0$.
2. $x(t)$ liên tục từng khúc trong miền $t \geq 0$.

Nghĩa là với mọi khoảng $[a; b]$ trên nửa trục thực $t \geq 0$ hàm $x(t)$ chỉ gián đoạn loại 1 nhiều nhất tại một số hữu hạn các điểm. Tại các điểm gián đoạn, hàm có giới hạn trái và giới hạn phải hữu hạn.

3. $x(t)$ không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \rightarrow \infty$. Nghĩa là tồn tại $M > 0, \alpha_0 \geq 0$ sao cho

$$|x(t)| \leq Me^{\alpha_0 t}, \forall t > 0. \quad (3.2)$$

α_0 được gọi là chỉ số tăng của $x(t)$.

Rõ ràng α_0 là chỉ số tăng thì mọi số $\alpha_1 > \alpha_0$ cũng là chỉ số tăng.

Ví dụ 3.1: Hàm bước nhảy đơn vị (Unit step function)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$, không tăng hơn ở mũ với chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$.

Ví dụ 3.2: Các hàm sơ cấp cơ bản $x(t)$ đều liên tục và không tăng nhanh hơn hàm mũ. Nhưng vẫn chưa phải là hàm gốc vì không thoả mãn điều kiện 1. của định nghĩa 3.2. Tuy nhiên hàm số sau:

$$x(t)\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ x(t) & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

là một hàm gốc.

Định lý 3.1: Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì tồn tại biến đổi Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

xác định với mọi số phức $s = \alpha + i\beta$ sao cho $\alpha > \alpha_0$ và $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} X(s) = 0$.

Hơn nữa hàm ảnh $X(s)$ giải tích trong miền $\text{Re}(s) > \alpha_0$ với đạo hàm

$$X'(s) = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} x(t) dt \quad (3.5)$$

Chứng minh: Với mọi $s = \alpha + i\beta$ sao cho $\alpha > \alpha_0$, ta có:

$$\left| x(t) e^{-st} \right| \leq M e^{(\alpha_0 - \alpha)t} \text{ mà } \int_0^{\infty} e^{(\alpha_0 - \alpha)t} dt \text{ hội tụ. Vậy tích phân } \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \text{ hội tụ tuyệt}$$

đối nên hội tụ. Vì vậy tồn tại biến đổi Laplace $X(s)$ và

$$\begin{aligned} |X(s)| &\leq \int_0^{\infty} \left| x(t) e^{-st} \right| dt = \int_0^{\infty} \left| x(t) e^{-\alpha t} e^{-i\beta t} \right| dt = \int_0^{\infty} \left| x(t) e^{-\alpha t} \right| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} M e^{(\alpha_0 - \alpha)t} dt = \frac{M e^{(\alpha_0 - \alpha)t}}{\alpha_0 - \alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\alpha - \alpha_0}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{M}{\alpha - \alpha_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} X(s) = 0.$$

$$\text{Vì tích phân } \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \text{ hội tụ và tích phân } \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (x(t) e^{-st}) dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} (-t) dt \text{ hội}$$

tụ đều trong miền $\{s | \text{Re}(s) \geq \alpha_1\}$ với mọi $\alpha_1, \alpha_1 > \alpha_0$ (theo định lý Weierstrass), suy ra hàm

ảnh có đạo hàm $X'(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (x(t) e^{-st}) dt$ tại mọi s thuộc mọi miền trên. Do đó $X(s)$ giải

tích trong miền $\text{Re}(s) > \alpha_0$.

Nhận xét 3.1:

1. Theo định lý 3.1 thì mọi hàm gốc đều có ảnh qua phép biến đổi Laplace. Tên gọi "hàm gốc" là do vai trò của nó trong phép biến đổi này.

2. Định lý 3.1 chỉ là điều kiện đủ chứ không cần. Chẳng hạn hàm $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ không phải là hàm

gốc vì $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = \infty$, nhưng tích phân $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt$ tồn tại với

mọi s thỏa mãn $\text{Re}(s) > 0$.

3. Từ ví dụ 3.2, công thức (3.4) suy ra rằng mọi hàm sơ cấp cơ bản $x(t)$ đều có biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{x(t)\eta(t)\}$. Tuy nhiên, để đơn giản thay vì viết đúng $\mathcal{L}\{x(t)\eta(t)\}$ thì ta viết tắt $\mathcal{L}\{x(t)\}$. Chẳng hạn ta viết $\mathcal{L}\{\sin t\}$ thay cho $\mathcal{L}\{\eta(t)\sin t\}$, $\mathcal{L}\{1\}$ thay cho $\mathcal{L}\{\eta(t)\}$.

4. Ta quy ước các hàm gốc liên tục phải tại 0. Nghĩa là $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x(0)$.

Ví dụ 3.3: Vì hàm $\eta(t)$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

với mọi s , $\text{Re}(s) > 0$.

Ví dụ 3.4: Hàm $\sin t$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi $\mathcal{L}\{\sin t\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt$

tồn tại với mọi s , $\text{Re}(s) > 0$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$X(s) = -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} s e^{-st} \cos t dt = 1 - \left(s e^{-st} \sin t \Big|_0^{\infty} \right) - s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt$$

$$\Rightarrow (1 + s^2)X(s) = 1 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{1 + s^2}.$$

3.1.3 Các tính chất của phép biến đổi Laplace

3.1.3.1 Tính tuyến tính

Định lý 3.2: Nếu $x(t)$, $y(t)$ có biến đổi Laplace thì với mọi hằng số A, B , $Ax(t) + By(t)$ cũng có biến đổi Laplace và

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + By(t)\} = A\mathcal{L}\{x(t)\} + B\mathcal{L}\{y(t)\}. \quad (3.6)$$

Chứng minh: Nếu hai tích phân của vế phải của đẳng thức sau tồn tại thì tích phân của vế trái cũng tồn tại và có đẳng thức.

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + By(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (Ax(t) + By(t)) dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt + B \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt.$$

Ví dụ 3.5: $\mathcal{L}\{5 + 4 \sin t\} = 5\mathcal{L}\{1\} + 4\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{5}{s} + \frac{4}{s^2 + 1}.$

3.1.3.2 Tính đồng dạng

Định lý 3.3: Nếu $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right). \quad (3.7)$$

Chứng minh: Đổi biến số $u = at$ ta được:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(at) dt = \int_0^{\infty} e^{-s \frac{u}{a}} x(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

Ví dụ 3.6: $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$

3.1.3.3 Tính dịch chuyển ảnh

Định lý 3.4: Nếu $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{at} x(t)\} = X(s - a). \quad (3.8)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\{e^{at} x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} x(t) dt = X(s - a).$$

Ví dụ 3.7: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot 1\} = \frac{1}{s - a}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\text{ch } \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\text{sh } \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

Ví dụ 3.8: $\mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}.$

3.1.3.4 Tính trễ

Định lý 3.5: Nếu $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a \in \mathbb{R}$,

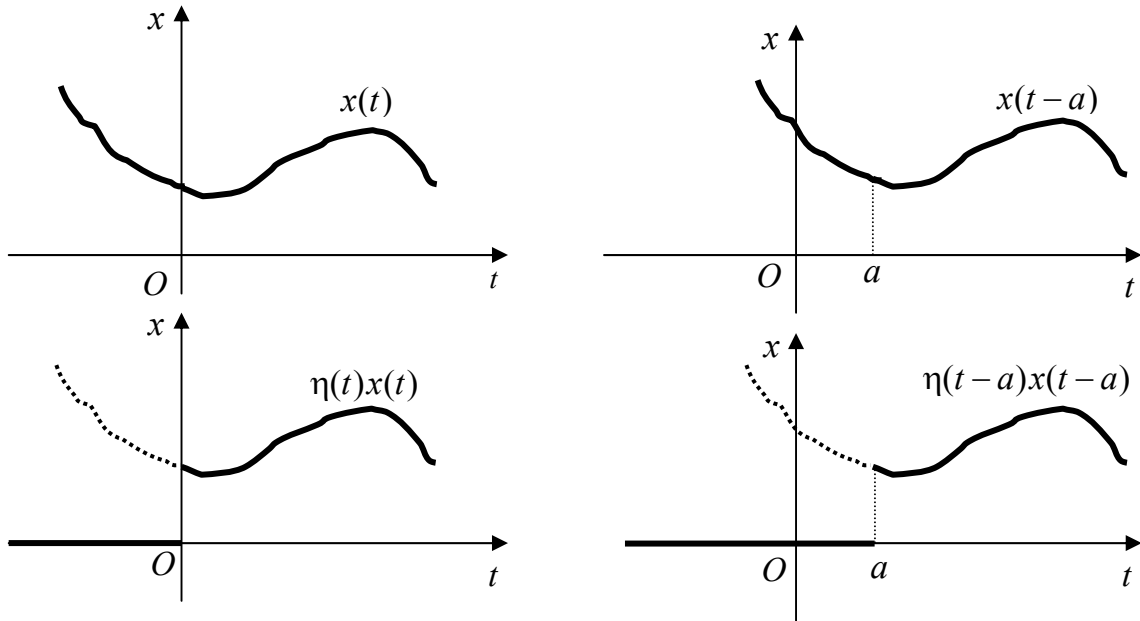
$$\mathcal{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\} = e^{-sa}X(s). \quad (3.9)$$

Chứng minh: $\mathcal{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\eta(t-a)x(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st}x(t-a) dt.$

Đổi biến số $u = t - a$, ta được

$$\mathcal{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\} = \int_a^{\infty} e^{-st}x(t-a) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)}x(u) du = e^{-as}X(s).$$

Đồ thị của hàm $\eta(t-a)x(t-a)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của $\eta(t)x(t)$ dọc theo trục hoành một đoạn bằng a . Nếu $x(t)$ biểu diễn tín hiệu theo thời gian t thì $x(t-a)$ biểu diễn trễ a đơn vị thời gian của quá trình trên.



Ví dụ 3.9: $\mathcal{L}\{\eta(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$

Ví dụ 3.10: Hàm xung (Impulse) là hàm chỉ khác không trong một khoảng thời gian nào đó.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ \varphi(t) & \text{nếu } a < t < b \\ 0 & \text{nếu } t > b \end{cases} \quad (3.10)$$

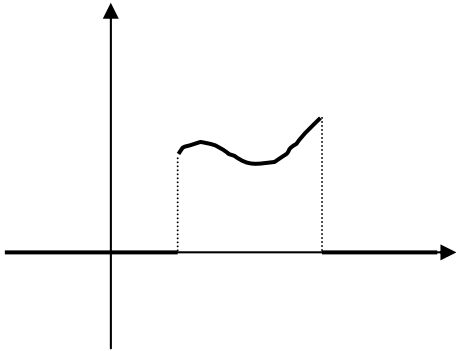
Hàm xung đơn vị trên đoạn $[a; b]$:

$$\eta_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } a < t < b = \eta(t-a) - \eta(t-b) \\ 0 & \text{nếu } t > b \end{cases} \quad (3.11)$$

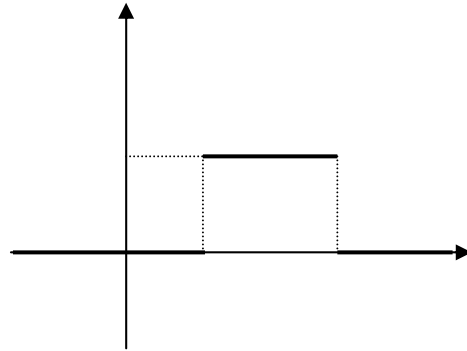
Hàm xung bất kỳ (3.10) có thể biểu diễn qua hàm xung đơn vị

$$x(t) = \eta(t-a)\varphi(t) - \eta(t-b)\varphi(t) = \eta_{a,b}(t)\varphi(t) \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}\{\eta_{a,b}(t)\} = \mathcal{L}\{\eta(t-a)\} - \mathcal{L}\{\eta(t-b)\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$



Đồ thị xung công thức (1.10)



Đồ thị xung $\eta_{a,b}(t)$ công thức (1.11)

Ví dụ 3.11: Tìm biến đổi Laplace của hàm xung $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ \sin t & \text{nếu } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } t > \pi \end{cases}$

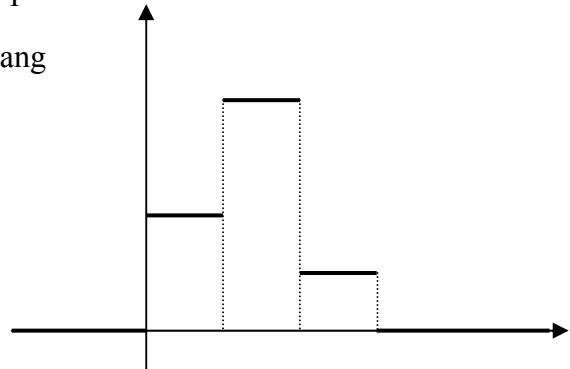
Theo công thức (3.12) ta có thể viết

$$x(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t-\pi)\sin t = \eta(t)\sin t + \eta(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

Vậy
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Ví dụ 3.12: Tìm biến đổi Laplace của hàm bậc thang

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \text{ hoặc } t > 3 \\ 2 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 4 & \text{nếu } 1 < t < 2 \\ 1 & \text{nếu } 2 < t < 3 \end{cases}$$



$$x(t) = 2\eta_{0,1}(t) + 4\eta_{1,2}(t) + \eta_{2,3}(t)$$

$$= 2[\eta(t) - \eta(t-1)] + 4[2\eta(t-1) - \eta(t-1)] + [\eta(t-2) - \eta(t-3)]$$

$$= 2\eta(t) + 2\eta(t-1) - 3\eta(t-2) - \eta(t-3).$$

Do đó $\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2 + 2e^{-s} - 3e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$.

3.1.3.5 Biến đổi của đạo hàm

Định lý 3.6: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc, nếu $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0). \quad (3.13)$$

Tổng quát hơn, nếu $x(t)$ có đạo hàm đến cấp n cũng là hàm gốc thì

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0). \quad (3.14)$$

Chứng minh: Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x'(t) dt = e^{-st} x(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} s e^{-st} x(t) dt = sX(s) - x(0).$$

Công thức (3.14) được chứng minh quy nạp từ công thức (3.13).

Ví dụ 3.13: $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)'\right\} = \frac{1}{\omega} \cdot s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin 0 = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

Hệ quả: Với giả thiết của định lý 3.6 thì $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} sX(s) = x(0)$.

Chứng minh: Áp dụng định lý 3.1 cho đạo hàm $x'(t)$ ta có $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} sX(s) - x(0) = 0$.

3.1.3.6 Biến đổi Laplace của tích phân

Định lý 3.7: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì hàm số $\varphi(t) = \int_0^t x(u) du$ cũng là hàm gốc và

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u) du\right\} = \frac{X(s)}{s}. \quad (3.15)$$

Chứng minh: Hàm $\varphi(t)$ có đạo hàm là $x(t)$ liên tục từng khúc nên cũng liên tục từng khúc.

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t x(u) du \right| \leq \int_0^t |x(u)| du \leq \int_0^t M e^{\alpha_0 u} du = \frac{M e^{\alpha_0 u}}{\alpha_0} \Big|_0^t \leq \frac{M e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0}.$$

Vậy $\varphi(t)$ là hàm gốc có cùng chỉ số tăng với $x(t)$.

Từ công thức (3.13) ta có $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \frac{X(s)}{s}$.

3.1.3.7 Đạo hàm ảnh

Định lý 3.8: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc có $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s). \quad (3.16)$$

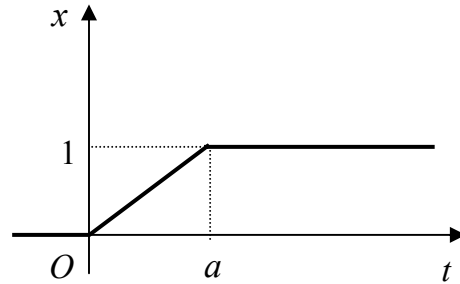
Chứng minh: Theo định lý 3.1 hàm $X(s)$ giải tích trong miền $\text{Re}(s) > \alpha_0$ nên có đạo hàm mọi cấp trong miền này. Từ công thức (3.5) ta có $\mathcal{L}\{tx(t)\} = -X'(s)$.

Áp dụng liên tiếp công thức này ta được công thức (3.16).

Ví dụ 3.14: $\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Ví dụ 3.15: Hàm dốc trên đoạn $[0; a]$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ \frac{t}{a} & \text{nếu } 0 \leq t \leq a \\ a & \text{nếu } t \geq a \end{cases}$$

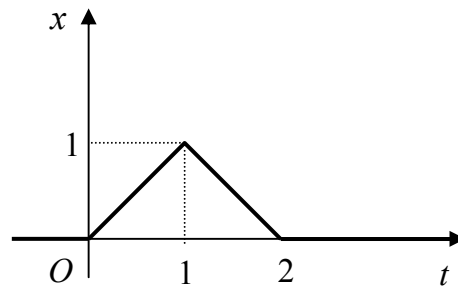


$$x(t) = \frac{t}{a} \eta_{0a}(t) + \eta(t-a) = \frac{t}{a} \eta(t) - \frac{t}{a} \eta(t-a) + \eta(t-a) = \frac{t}{a} \eta(t) - \frac{t-a}{a} \eta(t-a).$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as^2} = \frac{1-e^{-as}}{as^2}.$$

Ví dụ 3.16: Hàm hình mũ (Hat function)

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{nếu } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= t[\eta(t) - \eta(t-1)] + (2-t)[\eta(t-1) - \eta(t-2)] \\ &= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\Lambda(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(e^{-s} - 1)^2}{s^2}.$$

3.1.3.8 Tích phân ảnh

Định lý 3.9: Giả sử $\frac{x(t)}{t}$ là một hàm gốc (chẳng hạn $x(t)$ là một hàm gốc và tồn tại.

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x(t)}{t}$ hữu hạn). Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $s \in \mathbb{R}$ thì

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u) du. \quad (3.17)$$

Chứng minh: Đặt $Y(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}$, $s \in \mathbb{R}$. Từ công thức (3.15) ta có $\mathcal{L}\{x(t)\} = -Y'(s)$. Mặt

khác $\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0 \Rightarrow Y(s) = -\int_s^{\infty} Y'(u) du = \int_s^{\infty} X(u) du$.

Ví dụ 3.17: Vì $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$ và $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \arctg u \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg s = \operatorname{arctg} s.$$

Hàm Sin tích phân: $S_i t = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$, $t > 0$ có biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{\operatorname{arctg} s}{s}$.

3.1.3.9 Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Định lý 3.10: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ thì

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} x(t) dt}{1 - e^{-sT}}. \quad (3.18)$$

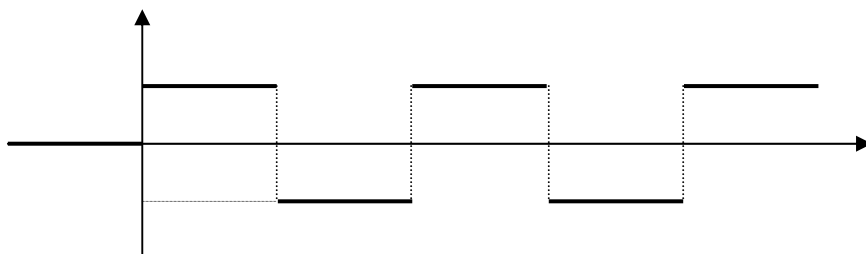
Chứng minh: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = \int_0^T e^{-st} x(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} x(t) dt$.

Đổi biến số $t = T + u$ đối với tích phân thứ hai của vế phải ta có

$$\int_T^{\infty} e^{-st} x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(T+u)} x(T+u) du = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} x(u) du$$

$$\text{Do đó } X(s) = \int_0^T e^{-st} x(t) dt + e^{-sT} X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} x(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

Ví dụ 3.18: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $2a > 0$ sau:



$$\int_0^{2a} e^{-st} x(t) dt = \int_0^a e^{-st} dt - \int_a^{2a} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^a - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_a^{2a} = \frac{(e^{-as} - 1)^2}{s}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{(e^{-as} - 1)^2}{s(1 - e^{-2as})} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}}}{e^{\frac{as}{2}} + e^{-\frac{as}{2}}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\text{sh} \frac{as}{2}}{\text{ch} \frac{as}{2}} = \frac{1}{s} \cdot \text{th} \frac{as}{2}$$

3.1.3.10 Ảnh của tích chập

Định nghĩa 3.3: Tích chập của hai hàm số $x(t), y(t); t \geq 0$ là hàm số được ký hiệu và xác định bởi công thức

$$x(t) * y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du \tag{3.19}$$

Tính chất:

- ◆ $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ (tích chập có tính giao hoán)
- ◆ Nếu $x(t), y(t)$ là hai hàm gốc thì tích chập của chúng $x(t) * y(t)$ cũng là hàm gốc.

Chứng minh:

- ◆ Đổi biến số $v = t - u$

$$x(t) * y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du = -\int_t^0 x(t-v)y(v)dv = \int_0^t x(t-v)y(v)dv = y(t) * x(t).$$

Giả sử $|x(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t}$, $|y(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}$. Đặt $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\forall u \in [0; t]$:

$$|x(u)y(t-u)| \leq M_1 e^{\alpha_0 u} M_2 e^{\alpha_0(t-u)} = M_1 M_2 e^{\alpha_0 t}$$

$$\left| \int_0^t x(u)y(t-u)du \right| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{\alpha_0 t} du = M_1 M_2 t e^{\alpha_0 t} \leq M_1 M_2 e^{(\alpha_0+1)t}.$$

Định lý 3.11: Nếu $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ thì

$$\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s) \quad (3.20)$$

Ngoài ra nếu $x'(t)$, $y'(t)$ cũng là hàm gốc thì ta có công thức Duhamel:

$$\mathcal{L}\{x(0)y(t) + x'(t) * y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)y(0) + x(t) * y'(t)\} = sX(s)Y(s) \quad (3.21)$$

Chứng minh: Bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

$$\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t x(u)y(t-u)du \right) dt$$

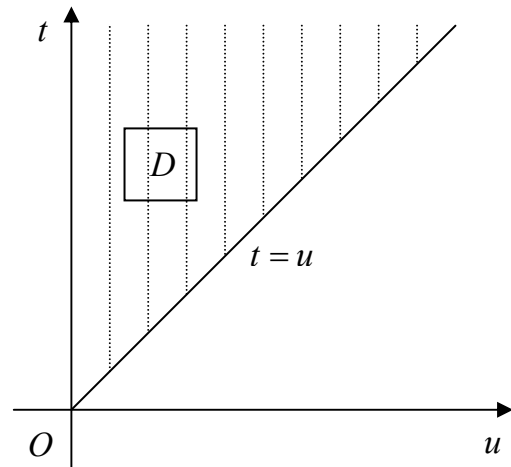
$$= \iint_D e^{-st} x(u)y(t-u) dt du$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-st} x(u)y(t-u) dt \right) du$$

Đặt $v = t - u \Rightarrow dv = dt$

$$\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(v+u)} x(u)y(v) du \right) dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} x(u) du \int_0^\infty e^{-sv} y(v) dv = X(s)Y(s).$$



Để chứng minh công thức (3.21) ta sử dụng công thức (3.6), (3.13) và (3.20)

Ví dụ 3.19: $\mathcal{L}\{t * \sin t\} = \mathcal{L}\{t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$

$$= \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{t - \sin t\}.$$

Do tính duy nhất của biến đổi ngược (định lý 3.12) ta suy ra: $t * \sin t = t - \sin t$.

Ví dụ 3.20: Tìm biến đổi Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, với $x(t) = \int_0^t u^4 \cos 3(t-u) du$

Vì $x(t) = t^4 * \cos 3t$, do đó $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{t^4\} \mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{24}{s^5} \frac{s}{s^2 + 9} = \frac{24}{s^4(s^2 + 9)}$.

3.2 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Từ ví dụ 3.18 cho thấy cần thiết phải giải bài toán ngược: Cho hàm ảnh, tìm hàm gốc. Trong mục này ta sẽ chỉ ra những điều kiện để một hàm nào đó là hàm ảnh, nghĩa là tồn tại hàm gốc của nó, đồng thời cũng chỉ ra rằng hàm gốc nếu tồn tại là duy nhất.

Định nghĩa 3.4: Cho hàm $X(s)$, nếu tồn tại $x(t)$ sao cho $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ thì ta nói $x(t)$ là biến đổi ngược của $X(s)$, ký hiệu $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

3.2.1 Tính duy nhất của biến đổi ngược

Định lý 3.12: Nếu $x(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ thì tại mọi điểm liên tục t của hàm $x(t)$ ta có:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} X(s) ds \quad (3.22)$$

trong đó tích phân ở vế phải được lấy trên đường thẳng $\text{Re}(s) = \alpha$ theo hướng từ dưới lên, với α là số thực bất kỳ lớn hơn α_0 .

Công thức (3.22) được gọi là công thức tích phân Bromwich.

Công thức Bromwich cho thấy biến đổi Laplace ngược nếu tồn tại thì duy nhất.

3.2.2 Điều kiện đủ để một hàm có biến đổi ngược

Định lý 3.1 cho thấy không phải mọi hàm phức giải tích nào cũng có biến đổi ngược. Chẳng hạn hàm $X(s) = s^2$ không thể là ảnh của hàm gốc nào vì $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} X(s) = \infty$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để hàm giải tích có biến đổi ngược

Định lý 3.13: Giả sử hàm phức $X(s)$ thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- i. $X(s)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\text{Re}(s) > \alpha_0$,
- ii. $|X(s)| \leq M_R$ với mọi s thuộc đường tròn $|s| = M_R$ và $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$,

iii. Tích phân $\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} X(s) ds$ hội tụ tuyệt đối.

Khi đó $X(s)$ có biến đổi ngược là hàm gốc $x(t)$ cho bởi công thức (3.22).

Độc giả có thể tìm hiểu chứng minh định lý 3.12, định lý 3.13 trong Phụ lục C của [2] hoặc Định lý 3.1 trang 29 của [5].

3.2.3 Một vài phương pháp tìm hàm ngược

3.2.3.1 Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược

Từ tính duy nhất của biến đổi ngược, ta suy ra rằng tương ứng giữa hàm gốc và hàm ảnh là tương ứng 1-1. Vì vậy ta có thể áp dụng các tính chất đã biết của phép biến đổi thuận để tìm hàm ngược.

Ví dụ 3.21: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^6}\right\} = e^{-4t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = e^{-4t} \frac{t^5}{5!}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{5-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5 e^{-4(t-3)} \frac{(t-3)^5}{5!} \eta(t-3).$$

3.2.3.2 Khai triển thành chuỗi lũy thừa

Nếu $X(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \frac{a_4}{s^5} + \dots$ thì

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \dots \quad (3.23)$$

Ví dụ 3.22:

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} - \frac{1}{3!s^3} + \frac{1}{4!s^4} - \dots \right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!s^3} - \frac{1}{3!s^4} + \frac{1}{4!s^5} - \dots$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}\right\} = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \dots$$

$$= 1 - \frac{(2\sqrt{t})^2}{2^2} + \frac{(2\sqrt{t})^4}{2^2 4^2} - \frac{(2\sqrt{t})^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{(2\sqrt{t})^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \dots = J_0(2\sqrt{t})$$

trong đó J_0 là hàm Bessel bậc 0 (xem chương III).

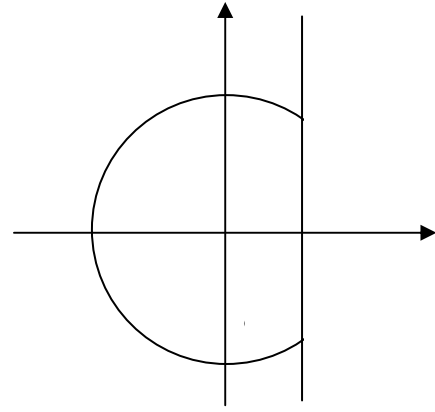
3.2.3.3 Sử dụng thặng dư của tích phân phức

Với điều kiện của định lý 3.13 thì $X(s)$ có biến đổi ngược $x(t)$ xác định bởi công thức Bromwich (3.22).

Mặt khác giả sử hàm $X(s)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập a_1, a_2, \dots, a_n

trong nửa mặt phẳng $\text{Re}(s) < \alpha$ với α nào đó $> \alpha_0$.

Chọn R đủ lớn sao cho các điểm bất thường này đều nằm trong phần của mặt phẳng được giới hạn bởi đường tròn C_R tâm O bán kính R và đường thẳng $\text{Re}(s) = \alpha$.



Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{BAB'}} e^{st} X(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{B'} e^{st} X(s) ds = \sum_{k=1}^n [\text{Res } e^{st} X(s); a_k]. \quad (3.24)$$

Bổ đề:

1. Nếu trên cung $\widehat{BAB'}$ của đường tròn C_R hàm $X(s)$ thỏa mãn điều kiện $|X(s)| < \frac{M}{R^k}$

$$\text{thì } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{BAB'}} e^{st} X(s) ds = 0, \quad \forall t > 0.$$

2. Hàm phân thức $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức

$P(s)$ thì $X(s)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Độc giả có thể tìm hiểu chứng minh của bổ đề trong [4] (Bổ đề 1 trang 40).

Lấy giới hạn của đẳng thức (3.24) khi $R \rightarrow \infty$, áp dụng bổ đề và định lý 3.12 ta được:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \sum_{k=1}^n [\text{Res } e^{st} X(s); a_k] \quad (3.25)$$

Đặc biệt nếu $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$.

Giả sử $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là a_1, a_2, \dots, a_n vì chúng không phải là không điểm của $P(s)$ thì ta có công thức Heaviside:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \quad (3.26)$$

Ví dụ 3.23: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 3s + 5}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ có các cực điểm đơn là $1, -2, -3$.

$$\left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=1} = \frac{3}{4}, \quad \left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=-2} = -1, \quad \left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=-3} = \frac{5}{4} \Rightarrow x(t) = \frac{3}{4}e^t - e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-3t}.$$

Ví dụ 3.24: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s^2 + 4s + 8)} \right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s^2 + 4s + 8)}$ có các cực điểm đơn là $2, -2 + 2i, -2 - 2i$.

$$\left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=2} = 1, \quad \left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=-2+2i} = 1 + \frac{i}{4}, \quad \left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s=-2-2i} = \overline{\left(\frac{P(-2+2i)}{Q'(-2+2i)} \right)} = \overline{1 + \frac{i}{4}} = 1 - \frac{i}{4}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= e^{2t} + \left(1 + \frac{i}{4}\right)e^{-2t+2it} + \left(1 - \frac{i}{4}\right)e^{-2t-2it} \\ &= e^{2t} + e^{-2t} \left(e^{2it} + e^{-2it} \right) + \frac{i}{4}e^{-2t} \left(e^{2it} - e^{-2it} \right) = e^{2t} + e^{-2t} \left(2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right). \end{aligned}$$

3.2.3.4 Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ

Mọi phân thức hữu tỉ có dạng $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của $Q(s)$ lớn hơn bậc của $P(s)$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II.

♦ Các phân thức hữu tỉ loại I: $\frac{1}{s-a}$ hay $\frac{1}{(s-a)^n}$, $a \in \mathbb{R}$ có hàm gốc:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^n} \right\} = e^{at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (3.27)$$

♦ Các phân thức hữu tỉ loại II: $\frac{Ms + N}{((s+a)^2 + \omega^2)^n}$, $M, N, a, \omega \in \mathbb{R}$.

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau:

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^n} \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^n} \quad (3.28)$$

▪ Trường hợp $n = 1$, từ ví dụ 3.6 và ví dụ 3.12 ta có:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos \omega t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (3.29)$$

Áp dụng công thức đạo hàm hàm ảnh (3.16) liên tiếp vào (3.29), (3.30), ... ta suy ra các trường hợp sau

- Trường hợp $n = 2$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3} \quad (3.30)$$

- Trường hợp $n = 3$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3}\right\} = \frac{t \sin \omega t - \omega t^2 \cos \omega t}{8\omega^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^3}\right\} = \frac{(3 - \omega^2 t^2) \sin \omega t - 3\omega t \cos \omega t}{8\omega^3} \quad (3.31)$$

Ví dụ 3.25: Hàm ảnh ở ví dụ 3.24. $X(s) = \frac{3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s^2 + 4s + 8)}$ có thể phân tích thành tổng các

phân thức tối giản

$$X(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2s+3}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{s-2} + \frac{2(s+2)}{(s+2)^2 + 4} - \frac{1}{(s+2)^2 + 4}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s^2 + 4s + 8)}\right\} = e^{2t} + 2e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-2t} \sin 2t.$$

Ví dụ 3.26: $X(s) = \frac{3s-4}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \frac{3(s-1)}{((s-1)^2 + 1)^2} - \frac{1}{((s-1)^2 + 1)^2}$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{(s^2 - 2s + 2)^2}\right\} = 3e^t \frac{t \sin t}{2} - \frac{e^t}{2}(\sin t - t \cos t) = \frac{e^t}{2}(3t \sin t - \sin t + t \cos t)$$

Ví dụ 3.27: Tìm hàm gốc của $X(s) = \frac{2s^3 + 10s^2 + 9s + 45}{s^2(s^2 + 9)}$.

$$\text{Vi } \frac{1}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 9}\right)$$

$$\mathcal{L}\{a_n x^{(n)}(t)\} = a_n (s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \dots - sx_{n-2} - x_{n-1}).$$

Thay vào (3.32) ta được

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s) &= Y(s) + x_0 (a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1) \\ &\quad + x_1 (a_n s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \dots + a_2) + \dots + x_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Vậy phương trình ảnh có dạng: $A(s)X(s) = Y(s) + B(s) \Rightarrow X(s) = \frac{Y(s) + B(s)}{A(s)}$.

Ảnh ngược $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 3.29: Tìm nghiệm của phương trình: $x'' - 2x' + 2x = 2e^t \cos t$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = 0$.

Giải: $\mathcal{L}\{2e^t \cos t\} = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2 + 1}$. Áp dụng công thức (3.34) với điều kiện đầu của bài toán ta có phương trình ảnh:

$$(s^2 - 2s + 2)X(s) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2 + 1} \Rightarrow X(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2 + 1)^2}$$

Áp dụng công thức (3.30) ta có nghiệm $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 2e^t \frac{t \sin t}{2} = te^t \sin t$.

Ví dụ 3.30: Tìm nghiệm của phương trình: $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$.

Giải: Phương trình ảnh: $(s^4 + 2s^2 + 1)X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^3}$.

Áp dụng công thức (3.31) ta có nghiệm $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{(3-t^2)\sin t - 3t \cos t}{8}$.

Ví dụ 3.31: Tìm nghiệm của phương trình: $x'' + x = e^t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

Giải: Bằng cách đặt $u = t - 1$ ta đưa điều kiện đầu $t = 1$ về điều kiện đầu $u = 0$.

Đặt $y(u) = x(u + 1) = x(t)$. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dx}{dt}, \text{ tương tự } \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Do đó phương trình đã cho có thể viết lại tương ứng: $y''(u) + y(u) = e^{u+1}$

với điều kiện đầu $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Đặt $Y(s) = \mathcal{L}\{y(u)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{y''(u)\} = s^2Y(s) - s$.

Phương trình ảnh: $(s^2 + 1)Y(s) = \frac{e}{s-1} + s \Rightarrow Y(s) = \frac{e}{(s-1)(s^2 + 1)} + \frac{s}{s^2 + 1}$.

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{e}{2}}{(s-1)} + \left(1 - \frac{e}{2}\right) \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{\frac{e}{2}}{s^2 + 1} \Rightarrow y(u) = \frac{e}{2}e^u + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos u + \frac{e}{2}\sin u$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos(t-1) + \frac{e}{2}\sin(t-1)$.

B. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 3.32: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases} \text{ với điều kiện đầu } \begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = sX - 8, \mathcal{L}\{y(t)\} = sY - 3$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} sX - 8 = 2X - 3Y \\ sY - 3 = Y - 2X \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (s-2)X + 3Y = 8 \\ 2X + (s-1)Y = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4} \\ Y = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}.$$

Ví dụ 3.33: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin 2t \end{cases} \text{ với điều kiện đầu } \begin{cases} x(0) = 35, x'(0) = -48 \\ y(0) = 27, y'(0) = -55 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ thay vào ta được hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} s^2 X - 35s + 48 + sY - 27 + 3X = \frac{15}{s+1} \\ s^2 Y - 27s + 55 - 4sX + 140 + 3Y = \frac{30}{s^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s^2+3)X + sY = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \\ -4sX + (s^2+3)Y = 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$D_X = \begin{vmatrix} 35s - 21 + \frac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}, \quad D_Y = \begin{vmatrix} s^2+3 & 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \\ -4s & 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow X = \frac{D_X}{D} = \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$Y = \frac{D_Y}{D} = \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

Hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x(t) = 30 \cos t - 15 \sin 3t + 3e^t + 2 \cos 2t \\ y(t) = 30 \cos 3t - 60 \sin t - 3e^t + \sin 2t \end{cases}.$$

C. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên

Ví dụ 3.34: Giải phương trình $tx'' + x' + 4tx = 0$

Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì $\mathcal{L}\{4tx(t)\} = -4 \frac{dX}{ds}$, $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX - x(0)$.

$$\mathcal{L}\{tx''(t)\} = \frac{d}{ds}(s^2 X - sx(0) - x'(0)) = -2sX - s^2 \frac{dX}{ds} + x(0).$$

Phương trình ảnh: $-2sX - s^2 \frac{dX}{ds} + x(0) + sX - x(0) - 4 \frac{dX}{ds} = 0.$

Hay $(s^2+4) \frac{dX}{ds} = sX \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{s}{s^2+4} ds.$

Giải phương trình này ta được: $X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 4}}$.

Nghiệm của phương trình là hàm gốc $x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C}{\sqrt{s^2 + 4}} \right\} = CJ_0(2t)$.

Để xác định C ta thay $t = 0$ vào 2 vế của đẳng thức trên: $x(0) = CJ_0(0) = C$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = x(0)J_0(2t)$.

3.3.2 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình tích phân

Xét phương trình tích phân dạng tích chập

$$Ax(t) + B \int_0^t x(u)k(t-u) du = C f(t) \quad (3.35)$$

A, B, C là các hằng số, $f(t), k(t)$ là các hàm gốc.

Giải phương trình (3.39) là tìm tất cả các hàm thực $x(t)$ thỏa mãn đẳng thức với mọi t thuộc một miền nào đó.

Giả sử $x(t)$ là hàm gốc. Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\}$.

Phương trình ảnh $AX(s) + BX(s)K(s) = CF(s) \Rightarrow X(s) = \frac{CF(s)}{A + BK(s)}$.

Ví dụ 3.35: Giải phương trình tích phân:

$$x(t) - \int_0^t x(u) \sin(t-u) du = t^2.$$

Giải: Phương trình ảnh $X(s) - X(s) \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{s^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{s^2 + 1}} = \frac{2(s^2 + 1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \Rightarrow x(t) = t^2 + \frac{1}{12}t^4.$$

Ví dụ 3.36: Giải phương trình tích phân Abel:

$$\int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^\alpha} du = f(t); \quad 0 < \alpha < 1.$$

Giải: Ta có $A = 0, B = C = 1$; $K(s) = \mathcal{L}\{t^{-\alpha}\} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$.

Do đó $X(s) = \frac{F(s)}{K(s)} = \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} F(s)$. Nghiệm của phương trình $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

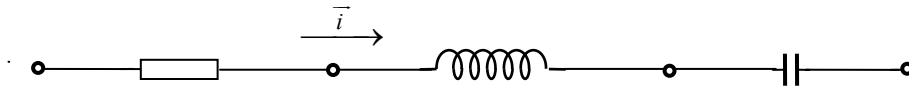
Chẳng hạn $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(t) = 1+t+t^2$ thì $\Gamma(1-\alpha) = \sqrt{\pi}$, $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow X(s) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}} \right) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3\pi\sqrt{t}} (3 + 6t + 8t^2).$$

3.3.3 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

Một số bài toán về tính toán các mạch điện được đưa về giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hoặc phương trình đạo hàm riêng... Vì vậy, nếu chuyển qua ảnh của biến đổi Laplace thì việc giải các bài toán sẽ đơn giản hơn.

Giả sử trên một đoạn mạch có điện trở R , một cuộn dây có hệ số tự cảm L và một tụ điện có điện dung C .



Gọi $u(t)$ là hiệu điện thế của hai đầu đoạn mạch, $i(t)$ là cường độ dòng điện của mạch tại thời điểm t . $u(t)$ và $i(t)$ thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$u(t) = u_2 - u_1 = Ri(t); \quad u_3 - u_2 = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u_4 - u_3 = \frac{1}{C} \left(\int_0^t i(t) dt + q_0 \right). \quad (3.36)$$

Đặt $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ thì

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{di(t)}{dt} \right\} = sI - i(0), \quad \mathcal{L}\left\{ \int_0^t i(t) dt + q_0 \right\} = \frac{I}{s} + \frac{q_0}{s}.$$

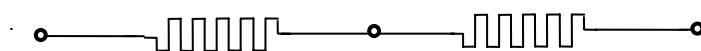
Trong đó q_0 là điện lượng ban đầu ($t = 0$) trên các thành tụ điện. Trong các bài toán đóng mạch các điều kiện ban đầu đều bằng 0: $q_0 = 0, i(0) = 0$. Lúc đó tỉ số giữa điện thế ảnh và cường độ ảnh gọi là trở kháng ảnh $Z = \frac{U}{I}$. Như vậy các trở kháng ảnh của điện trở R , cuộn dây có hệ số tự cảm L và tụ điện có điện dung C tương ứng là:

$$Z = R ; Z = Ls ; Z = \frac{1}{Cs} \quad (3.37)$$

Khi tính toán một mạng gồm nhiều mạch điện kín ta áp dụng định luật thứ nhất của Kirchoff (kiểu-sóp) cho từng nút và định luật thứ hai cho từng mạch kín, sau đó chuyển các phương trình tìm được sang phương trình ảnh.

Áp dụng hai định luật Kirchoff ta có thể tìm trở kháng ảnh tương đương của mạch mắc nối tiếp và mạch song song cơ bản sau:

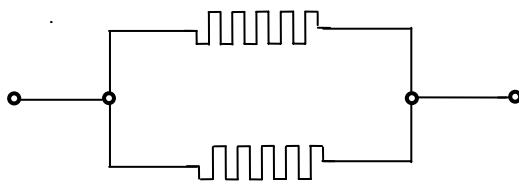
- Trở kháng ảnh tương đương Z của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc nối tiếp bằng tổng hai trở kháng này.



Gọi u_1, u_2, u lần lượt là hiệu điện thế giữa A, B; B, C và A, C. theo định luật 1 Kirchoff ta có $u = u_1 + u_2$. Chuyển qua ảnh $U = U_1 + U_2 \Rightarrow ZI = Z_1I + Z_2I$. Vậy

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (3.38)$$

- Nghịch đảo của trở kháng ảnh tương đương của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc song song bằng tổng nghịch đảo hai trở kháng này.



Gọi I_1, I_2, I lần lượt là cường độ ảnh trong mạch 1, mạch 2 và mạch chính. U là điện thế ảnh giữa A và B.

Áp dụng định luật 2 Kirchoff tại nút A ta có $I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{U}{Z} = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2}$. Vậy:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (3.39)$$

Ví dụ 3.37: Một tụ điện có điện dung C được nạp điện có điện lượng q_0 . Khi $t = 0$, ta mắc nó vào 2 mút của 1 cuộn dây có điện cảm L . Tìm điện lượng $q(t)$ của tụ điện và cường độ $i(t)$ của dòng điện trong mạch tại thời điểm t .

Giải: Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng ta có:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \left(\int_0^t i dt + q_0 \right) = 0.$$

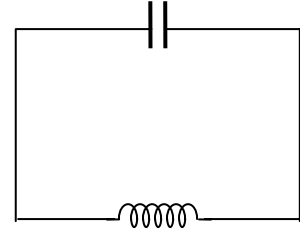
Vì $i(t) = \frac{dq}{dt}$ nên phương trình trên trở thành

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\int_0^t \frac{dq}{dt} dt + q_0 \right) = 0 \Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Đặt $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$, vì $q(0) = q_0$, $q'(0) = i(0) = 0$. Do đó ta có phương trình ảnh:

$$L(s^2Q - sq_0) + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow Q = q_0 \frac{s}{s^2 + \frac{1}{CL}}$$

Vậy $q(t) = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{CL}}$; $i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\sqrt{CL}} \sin \frac{t}{\sqrt{CL}}$.



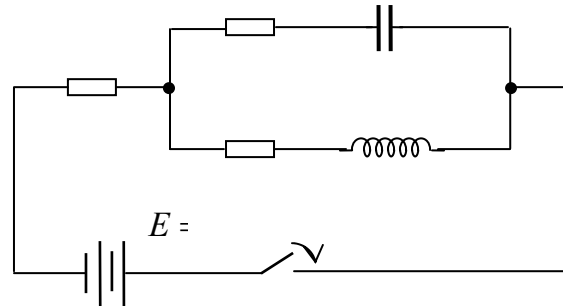
Ví dụ 3.38: Xét một mạch điện như hình vẽ. Suất điện động $E(t) = E_0 = \text{hằng số}$. Lúc $t = 0$ mạch đóng lại. Hãy tìm cường độ $i_1(t)$.

Gọi I_1 là cường độ ảnh của mạch $R_1 - C$.

I_2 là cường độ ảnh của mạch $R_2 - L$.

Z_1 là trở kháng ảnh của mạch $R_1 - C$.

Z_2 là trở kháng ảnh của mạch $R_2 - L$.



$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{Cs}; \quad Z_2 = R_2 + Ls$$

Z là trở kháng ảnh tương đương của hai đoạn mạch $R_1 - C$ và $R_2 - L$ mắc song song.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \text{ hay } Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow \frac{Z}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (*)$$

Hiệu điện thế ảnh giữa hai đầu A, B của đoạn mạch:

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2 = I Z \Rightarrow I_1 = \frac{Z}{Z_1} I \quad (**)$$

Áp dụng định luật Kirchoff cho mạch vòng ta có

$$(R + Z)I = \frac{E_0}{s} \quad (***)$$

Từ (*)-(***) suy ra
$$I_1 = \frac{Z}{Z_1} \frac{E_0}{s} \frac{1}{R + Z} = \frac{Z_2 E_0}{s(R(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2)}.$$

Thay Z_1, Z_2 vào kết quả trên ta được

$$I_1 = \frac{Z_2(R_2 + Ls)}{s^2(RL + R_1L) + s\left(RR_1 + RR_2 + R_1R_2 + \frac{L}{C}\right) + \frac{R}{C} + \frac{R_2}{C}}.$$

Đặt $\alpha = RL + R_1L$; $2\beta = RR_1 + RR_2 + R_1R_2 + \frac{L}{C}$; $\gamma = \frac{R}{C} + \frac{R_2}{C}$.

➤ Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$, gọi s_1, s_2 là 2 nghiệm phân biệt của tam thức

$$\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0 \quad \text{và} \quad s_1, s_2 \neq -\frac{R_2}{L}.$$

Khi đó từ công thức Heavyside ta có

hàm gốc
$$i_1(t) = \frac{E_0}{2} \left(\frac{R_2 + Ls_1}{\alpha s_1 + \beta} e^{s_1 t} + \frac{R_2 + Ls_2}{\alpha s_2 + \beta} e^{s_2 t} \right).$$

➤ Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma = 0$, tam thức $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ có nghiệm kép $s = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Ta có hàm gốc
$$i_1(t) = \frac{E_0}{2} \left[L + t \left(R_2 - \frac{\beta}{\alpha} L \right) \right] e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}.$$

Ví dụ 3.39: Cho một dây dẫn nằm dọc theo trục \overline{Ox} từ O đến l . Gọi C, R, L, G lần lượt là điện dung, điện trở, điện cảm, hệ số hao phí điện ứng với một đơn vị dài sợi dây. Khi có dòng điện chạy trong dây, xung quanh nó tạo nên một từ trường làm thay đổi cường độ dòng điện và điện thế. Tìm cường độ $i(x, t)$ và điện thế $u(x, t)$ dòng điện ở vị trí x thời điểm t với điều kiện đầu và điều kiện biên:

$$\begin{cases} i(x, 0) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} u(0, t) = \varphi_1(t) \\ u(l, t) = \varphi_2(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Theo các định luật vật lý ta suy ra rằng giữa chúng liên hệ với nhau bởi hệ phương trình.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\text{Đặt} \quad F_1(s) = \mathcal{L}\{\varphi_1(t)\} ; \quad F_2(s) = \mathcal{L}\{\varphi_2(t)\} . \quad (3.42)$$

$$U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt ; \quad I(x,s) = \mathcal{L}\{i(x,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} i(x,t) dt \quad (3.43)$$

Dựa vào tính hội tụ đều của tích phân suy rộng (3.43) ta chứng minh được:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial x}\right\} = \frac{\partial I}{\partial x} \quad (3.44)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0) ; \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial t}\right\} = sI(x,s) - si(x,0) \quad (3.45)$$

Áp dụng các công thức (3.42)-(3.44) vào (3.41) ta có hệ phương trình ảnh, các điều kiện biên ảnh.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + RI + LsI = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial x} + GU + CsU = 0 \end{cases} ; \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} U(0,s) = F_1(s) \\ U(l,s) = F_2(s) \end{cases} . \quad (3.47)$$

Để giải hệ phương trình này ta khử đi một ẩn hàm, chẳng hạn khử I . Lấy đạo hàm riêng theo x phương trình thứ nhất (3.46) ta có:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R \frac{\partial I}{\partial x} + Ls \frac{\partial I}{\partial x} = 0 . \quad (3.48)$$

Thay $\frac{\partial I}{\partial x} = -(GU + CsU)$ vào phương trình trên ta được:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (R + Ls)(G + Cs)U = 0 . \quad (3.49)$$

Giải phương trình (3.49) theo biến x ta có nghiệm tổng quát:

$$U(x,s) = Ae^{kx} + Be^{-kx} , \quad \text{với } k = \sqrt{(Ls + R)(Cs + G)} . \quad (3.50)$$

$$I(x,s) = \frac{1}{R + Ls} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-k}{R + Ls} (Ae^{kx} - Be^{-kx}) = -\sqrt{\frac{Cs + G}{Ls + R}} (Ae^{kx} - Be^{-kx}) . \quad (3.51)$$

Thay điều kiện biên (3.46) ta tìm được A, B xong lấy ảnh ngược ta sẽ có $u(x,t)$, $i(x,t)$ cần tìm.

Tuy nhiên nói chung không có một công thức tổng quát để tìm hàm gốc từ hàm ảnh có dạng trên. Ta tìm hàm gốc trong một vài trường hợp cụ thể sau.

Ví dụ 3.40: Giả sử dây dẫn khá dài và ảnh hưởng của quá trình dao động điện không đáng kể. Khi đó, về mặt lý thuyết ta có thể xem x biến thiên từ 0 đến $+\infty$. Trong trường hợp này, điều kiện biên thứ hai phải được thay đổi bằng điều kiện buộc $u(x, t)$, $i(x, t)$ bị chặn khi $x \rightarrow +\infty$.

Chọn $k = \sqrt{(Ls + R)(Cs + G)}$ sao cho $\operatorname{Re} k > 0$. Điều kiện $u(x, t)$, $i(x, t)$ bị chặn khi $x \rightarrow +\infty$ suy ra $U(x, s)$, $I(x, s)$ cũng bị chặn khi $x \rightarrow +\infty$, do đó $A = 0$.

$$\text{Vậy } U(x, s) = B e^{-kx}.$$

Thay điều kiện biên $U(0, s) = F_1(s)$ ta được $B = F_1(s)$. Vậy

$$U(x, s) = F_1(s) e^{-kx}; \quad I(x, s) = \sqrt{\frac{Cs + G}{Ls + R}} U(x, s).$$

Các trường hợp đặc biệt:

➤ Truyền điện trên dây không bị hao điện ($R = 0$, $G = 0$). Khi đó:

$$U(x, s) = F_1(s) e^{-sx\sqrt{LC}}; \quad I(x, s) = \sqrt{\frac{C}{L}} U(x, s).$$

Hàm gốc

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi_1(t - x\sqrt{LC}) & \text{nếu } t > x\sqrt{LC} \\ 0 & \text{nếu } t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} u(x, t).$$

➤ Truyền sóng không méo mó: $RC = LG$.

Khi đó: $(Ls + R)(Cs + G) = (s\sqrt{LC} + \sqrt{RG})^2$, $\sqrt{\frac{Cs + G}{Ls + R}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$.

$$U(x, s) = e^{-x\sqrt{RG}} F_1(s) e^{-sx\sqrt{LC}}; \quad I(x, s) = \sqrt{\frac{C}{L}} U(x, s).$$

Hàm gốc

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}} \varphi_1(t - x\sqrt{LC}) & \text{nếu } t > x\sqrt{LC} \\ 0 & \text{nếu } t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} u(x, t).$$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN, CHUỖI MARKOV

GIỚI THIỆU

Hầu hết các hiện tượng xảy ra trong tự nhiên và xã hội đều có tính chất ngẫu nhiên, đó là sự phản ánh của các mối ràng buộc phức tạp mà ta không biết trước được. Trong giáo trình Xác suất Thống kê chúng ta đã tìm hiểu khái niệm biến ngẫu nhiên, véc tơ ngẫu nhiên, đó là các biến nhận giá trị nào đó phụ thuộc vào các yếu tố ngẫu nhiên. Khi họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc vào thời gian ta có quá trình ngẫu nhiên.

Lý thuyết quá trình ngẫu nhiên lần đầu tiên được nghiên cứu liên quan đến bài toán dao động và nhiễu của các hệ vật lý. Quá trình ngẫu nhiên là một mô hình toán học của quá trình thực nghiệm mà sự phát triển bị chi phối bởi các quy luật xác suất. Quá trình ngẫu nhiên cung cấp những mô hình hữu ích để nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như vật lý thống kê, viễn thông, điều khiển, phân tích chuỗi thời gian, sự tăng trưởng dân số và các ngành khoa học quản lý.

Các tín hiệu video, tín hiệu thoại, dữ liệu máy tính, nhiễu của một hệ thống viễn thông, nhiễu điện trong các thiết bị điện, số khách hàng đến một điểm phục vụ, chỉ số chứng khoán trong thị trường chứng khoán... là các quá trình ngẫu nhiên.

Quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong viễn thông là quá trình Markov (quá trình không nhớ, memoryless) và quá trình dừng.

Chuỗi Markov là một quá trình Markov có không gian trạng thái rời rạc, thời gian rời rạc và thuần nhất. Chuỗi Markov thường gặp trong bài toán chuyển mạch của hệ thống viễn thông.

Quá trình Poisson là một ví dụ về chuỗi Markov với thời gian liên tục. Quá trình Poisson $X(t)$ mô tả quá trình đếm số lần xuất hiện một biến cố A nào đó cho đến thời điểm t . Quá trình Poisson được ứng dụng nhiều trong viễn thông, liên quan đến bài toán truyền tín hiệu, các hệ phục vụ, bài toán chuyển mạch ... Quá trình Poisson được xét trong chương 6.

Tín hiệu viễn thông, nhiễu không có tính Markov. Các quá trình này quá khứ của nó có ảnh hưởng lớn đến sự tiến triển của quá trình trong tương lai. Tuy nhiên hàm trung bình không thay đổi và hàm tương quan thuần nhất theo thời gian, đó là quá trình dừng. Khi các quá trình dừng biểu diễn các tín hiệu hoặc nhiễu thì biến đổi Fourier của hàm tương quan của quá trình là hàm mật độ phổ công suất của tín hiệu hoặc nhiễu này.

Một trong những bài toán quan trọng của lý thuyết chuyển mạch là vấn đề xung đột thông tin, nghẽn mạch hoặc rút cuộc gọi. Lý thuyết quá trình sắp hàng (Queueing theory) xác định và tìm các phương án tối ưu để hệ thống phục vụ tốt nhất, sẽ xét trong chương 7.

Trong chương này ta chỉ nghiên cứu một cách khái quát khái niệm quá trình ngẫu nhiên và chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất.

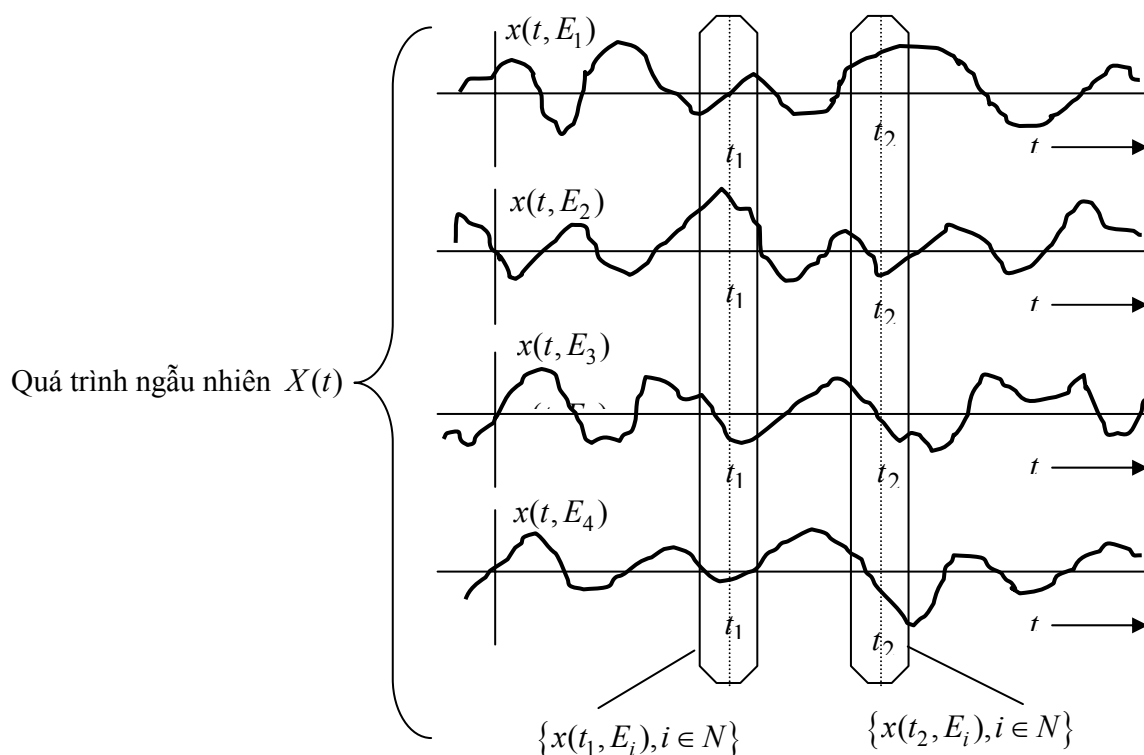
Để học tốt chương này học viên cần nắm vững khái niệm xác suất, xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ, biến ngẫu nhiên và các kiến thức đại số tuyến tính như ma trận, hệ phương trình tuyến tính.

4.1 KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.1 Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Các tín hiệu của các hệ thống thông tin là các tín hiệu ngẫu nhiên vì ngoài thành phần mang tin còn có sự tác động của giao thoa ngẫu nhiên và nhiễu của thiết bị.

Giả sử một tín hiệu nào đó mà tại mỗi thời điểm t nhận các giá trị phụ thuộc hệ các biến cố $\{E_i, i \in N\}$ của phép thử. Tín hiệu này nhận giá trị là $x(t, E_i)$ tại thời điểm t và khi biến cố E_i xảy ra. Như vậy $\{x(t, E_i)\}$ là một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ vừa phụ thuộc thời gian t , vừa phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên E_i .



Hình 4.1: Mô hình quá trình ngẫu nhiên

Một cách tổng quát một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\{X(t, \omega); t \in T\}$ xác định trong cùng một phép thử. Các quá trình này vừa phụ thuộc vào thời gian t và khi cố định tham số t thì $X(t, \omega)$ là biến ngẫu nhiên theo ω . Các giá trị nhận được theo thời gian t được gọi là **hàm mẫu** hoặc một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên. Tập chỉ số T thường biểu diễn tham số thời gian.

Do tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nên một tín hiệu $\{X(t, \omega); t \in T\}$ được truyền đi là một quá trình ngẫu nhiên. Tín hiệu cụ thể nhận được là hàm mẫu (một thể hiện) của quá trình ngẫu nhiên $\{X(t, \omega); t \in T\}$.

Để đơn giản trong cách viết người ta ký hiệu quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in T\}$ thay cho $\{X(t, \omega); t \in T\}$, hàm mẫu tương ứng được ký hiệu $\{x(t); t \in T\}$.

4.1.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên

Có thể phân loại các quá trình ngẫu nhiên theo các đặc trưng sau:

- Không gian trạng thái,
- Tập chỉ số thời gian T ,
- Quan hệ độc lập, quy luật phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên $X(t)$.

4.1.2.1 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập trạng thái E

Ta ký hiệu E là tập các giá trị của $X(t)$ và gọi là không gian trạng thái của quá trình, mỗi giá trị của $X(t)$ được gọi là một trạng thái.

- ◆ Nếu E là tập đếm được thì $\{X(t); t \in T\}$ gọi là quá trình có trạng thái rời rạc.
- ◆ Nếu E là 1 khoảng của tập số thực \mathbb{R} thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình thực hoặc quá trình trạng thái liên tục.
- ◆ Nếu E tập con của tập số phức \mathbb{C} thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái phức.
- ◆ Nếu $E \subset \mathbb{R}^k$ thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái k-véc tơ.

4.1.2.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập các chỉ số T

- ❖ Nếu $T \subset \mathbb{Z}$ thì quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian rời rạc hoặc tham số rời rạc. Trường hợp này ta ký hiệu X_n thay cho $X(t)$ và gọi là một dãy ngẫu nhiên.
- ❖ Nếu $T = [0; \infty)$ hoặc $T = \mathbb{R}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian liên tục.

4.1.2.3 Phân loại theo các tính chất xác suất của quá trình ngẫu nhiên

Quá trình ngẫu nhiên trở thành biến ngẫu nhiên khi thời gian cố định tại thời điểm nào đó. Mỗi biến ngẫu nhiên có các đặc trưng thống kê như kỳ vọng, phương sai, các moment ... các đặc trưng này nhận được từ hàm phân bố xác suất. Các hàm phân bố xác suất được xác định từ hàm mật độ xác suất (trường hợp liên tục), hoặc hàm khối lượng xác suất (trường hợp rời rạc). Hai biến ngẫu nhiên nhận được tại hai thời điểm của quá trình có các đặc trưng (kỳ vọng, phương sai, hiệp phương sai ...) xác định từ hàm phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên này. Tổng quát hơn, biến ngẫu nhiên N chiều nhận được tại N thời điểm có các đặc trưng xác định từ hàm phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên này.

a) *Quá trình độc lập:*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình độc lập nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ thì các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n) \quad (4.1)$$

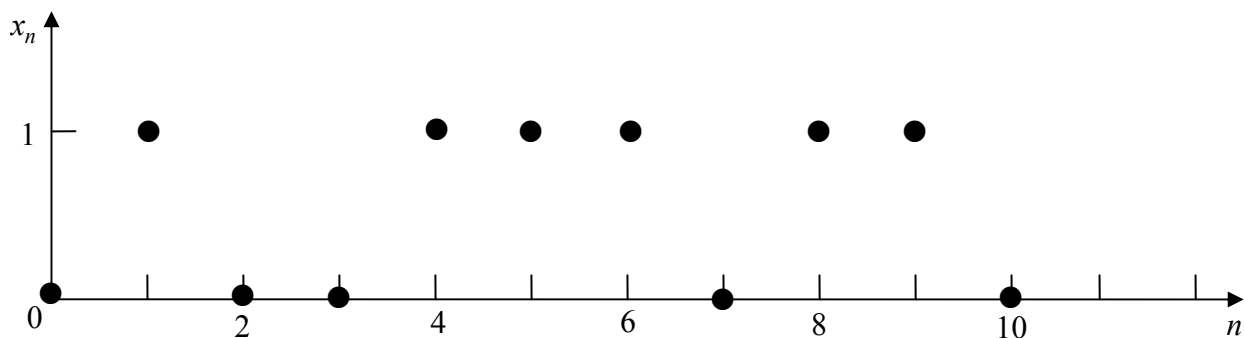
Ví dụ 4.1: Giả sử X_1, X_2, \dots là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Bernoulli với xác suất $P\{X_n = 1\} = p$, $P\{X_n = 0\} = q = 1 - p$ với mọi n . Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một quá trình ngẫu nhiên gọi là quá trình Bernoulli.

Quá trình Bernoulli là quá trình độc lập có không gian trạng thái rời rạc $E = \{0, 1\}$, thời gian rời rạc $T = \{1, 2, \dots\}$.

Một ví dụ về dãy mẫu của quá trình Bernoulli có thể nhận được bằng cách gieo đồng xu liên tiếp. Nếu mặt sấp xuất hiện ta gán giá trị 1, nếu mặt ngửa xuất hiện ta gán giá trị 0. Chẳng hạn

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Mặt xuất hiện	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	...
x_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	...

Dãy mẫu $\{x_n, n \geq 1\}$ nhận được ở trên được minh họa trong hình sau



Hình 4.2: Hàm mẫu của quá trình Bernoulli

b) *Quá trình có gia số độc lập:*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập nếu các gia số của quá trình trong các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tức là với mọi cách chọn $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ thì các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}). \quad (4.2)$$

Đặc biệt với quá trình thời gian rời rạc $\{X_n\}$ thì tính chất gia số độc lập dẫn đến dãy các biến ngẫu nhiên $Z_0 = X_0, Z_i = X_i - X_{i-1}; i = 1, 2, \dots$ là độc lập. Ngoài ra nếu ta biết luật phân bố của từng biến ngẫu nhiên Z_0, Z_1, \dots thì ta biết được luật phân bố của mọi $X_i, i = 0, 1, \dots$.

Thật vậy, điều này được suy từ cách tìm phân bố xác suất của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập và

$$X_i = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_i.$$

c) *Quá trình gia số độc lập dừng*

Quá trình gia số độc lập $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập dừng nếu

$$\forall s, t, s < t; \forall h \geq 0: X(t) - X(s) \text{ và } X(t+h) - X(s+h) \text{ có cùng phân bố} \quad (4.3)$$

Quá trình Poisson, quá trình Wiener là hai ví dụ của quá trình gia số độc lập dừng.

d) *Quá trình Martingal*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình Martingal nếu với bất kỳ $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ và a_1, a_2, \dots, a_n thì

$$E(X(t_{n+1}) | X(t_1) = a_1, \dots, X(t_n) = a_n) = a_n. \quad (4.4)$$

Martingal có thể xem như là mô hình mô tả trò chơi may rủi, trong đó $X(t)$ là số tiền của người chơi ở thời điểm t . Tính chất Martingal nói rằng *số tiền trung bình* của người chơi sẽ có ở thời điểm t_{n+1} bằng số tiền anh ta có ở thời điểm t_n và *không phụ thuộc vào những gì anh ta có trước đó trong quá khứ*.

Nếu $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình gia số độc lập với kỳ vọng bằng 0 thì $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Martingal với thời gian liên tục.

e) *Quá trình Markov:*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình Markov nếu:

Với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, với mọi giá trị a_1, a_2, \dots, a_n cho trước, với mọi thời điểm $t > t_n$ và với mọi a , ta có

$$P\{X(t) \leq a | X(t_1) = a_1, \dots, X(t_n) = a_n\} = P\{X(t) \leq a | X(t_n) = a_n\}. \quad (4.5)$$

Nghĩa là qui luật xác suất trong tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ. Nói cách khác *quá trình Markov mô tả các hệ không có trí nhớ* (memoryless).

Với mọi $t > s$; với mọi tập giá trị $A \subset \mathbb{R}$ và giá trị a ta ký hiệu

$$p(s, a; t, A) = P\{X(t) \in A | X(s) = a\} \quad (4.6)$$

và gọi là *hàm xác suất chuyển từ thời điểm s đến thời điểm t* .

Như vậy công thức (4.5) được viết lại

$$P\{X(t) \leq a | X(t_1) = a_1, \dots, X(t_n) = a_n\} = p(t_n, a_n; t, A), \text{ trong đó } A = (-\infty, a]. \quad (4.7)$$

Quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được gọi là chuỗi Markov (hay xích Markov, Markov chains). Chuỗi Markov với thời gian rời rạc và thuần nhất được xét trong mục tiếp theo.

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xét qua hàm khối lượng xác suất, vì vậy tính chất Markov – công thức (4.5) đối với chuỗi Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ với thời gian rời rạc được viết lại như sau

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}, \quad i_0, i_1, \dots, i, j \in E. \quad (4.8)$$

f) *Quá trình dừng (stationary)*

Xét quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in T\}$ có thời gian $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ hoặc \mathbb{N} .

Nói một cách khái quát một quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng nếu các tính chất thống kê của quá trình không phụ thuộc thời gian. Các tính chất thống kê của quá trình được xác định bởi các hàm phân bố đồng thời của quá trình tại các thời điểm. Các khái niệm dừng cụ thể phụ thuộc mức độ không phụ thuộc thời gian.

✦ *Quá trình dừng bậc nhất* nếu: với mọi h , với mọi $t_1 \in T$ hai biến ngẫu nhiên

$$X(t_1) \text{ và } X(t_1 + h)$$

có cùng phân bố xác suất.

Quá trình dừng bậc nhất có hàm trung bình là hàm hằng $E X(t) = \text{const}$.

✦ *Quá trình dừng bậc hai* nếu: với mọi h , với mọi $t_1, t_2 \in T$ hai véc tơ ngẫu nhiên

$$(X(t_1), X(t_2)) \text{ và } (X(t_1 + h), X(t_2 + h))$$

có cùng phân bố xác suất.

Hàm phân bố đồng thời của quá trình dừng bậc hai không phụ thuộc thời điểm mà chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa hai thời điểm (bằng cách chọn $h = -t_1$).

Quá trình dừng bậc hai cũng là quá trình dừng bậc nhất vì hàm phân bố thành phần được xác định từ hàm phân bố đồng thời. Do đó

$$E X(t) = \text{const}$$

$$E [X(t + \tau) \overline{X(t)}] \text{ chỉ phụ thuộc } \tau.$$

trong đó $\overline{X(t)}$ là số phức liên hợp của số phức $X(t)$

Dựa vào kết quả này, ta mở rộng khái niệm dừng bậc hai theo nghĩa rộng

✚ *Dừng theo nghĩa rộng hay dừng hiệp phương sai* (wide sense stationary or covariance stationary) nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $E X(t) = m = \text{const}$

ii) Với mọi $E [X(t + \tau)\overline{X(t)}]$ chỉ phụ thuộc τ .

Đặt

$$R_{XX}(\tau) = E [X(t + \tau)\overline{X(t)}] \quad (4.9)$$

gọi là *hàm tự tương quan* của quá trình $\{X(t); t \in T\}$.

Quá trình dừng bậc hai là quá trình dừng theo nghĩa rộng, nhưng điều ngược lại không đúng.

✚ *Quá trình dừng bậc N* nếu: với mọi h , với mọi $t_1, t_2, \dots, t_N \in T$ hai véc tơ ngẫu nhiên

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)) \text{ và } (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_N + h))$$

có cùng phân bố xác suất.

Quá trình dừng bậc N cũng là quá trình dừng bậc k , với mọi $k \leq N$.

✚ *Dừng theo nghĩa chặt* (strictly stationary) nếu quá trình dừng mọi bậc. Nghĩa là:

Với mọi $h > 0$, với mọi N , với mọi $t_1, t_2, \dots, t_N \in T$ hai véc tơ ngẫu nhiên

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)) \text{ và } (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_N + h))$$

có cùng phân bố xác suất.

Nói riêng mọi $X(t)$ có cùng phân bố.

4.2 CHUỖI MARKOV

Chuỗi Markov là quá trình Markov $\{X(t); t \in T\}$ có không gian trạng thái E đếm được.

Tùy theo tập chỉ số $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ hoặc $T = (0; \infty)$ ta có tương ứng chuỗi Markov với thời gian rời rạc hoặc liên tục.

Với chuỗi Markov công thức xác suất chuyển (4.6) được viết cụ thể

$$p(s, i; t, j) = P\{X(t) = j | X(s) = i\}, \quad t > s; i, j \in E. \quad (4.10)$$

Nếu xác suất chuyển (4.10) chỉ phụ thuộc vào $t - s$ nghĩa là

$$p(s, i; t, j) = p(s + h, i; t + h, j) \quad (4.11)$$

với mọi h , thì ta nói *quá trình là thuần nhất theo thời gian*.

4.2.1 Chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất

Định nghĩa 4.1. Quá trình $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ với thời gian rời rạc được gọi là chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

- i) Không gian trạng thái E của mọi X_n là tập đếm được.
- ii) Hàm xác suất chuyển là thuần nhất theo thời gian, tức là thỏa mãn (4.11).

Từ đây trở đi ta chỉ xét chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất và ta gọi tắt chuỗi Markov.

4.2.2 Ma trận xác suất chuyển

Giả sử $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ là chuỗi Markov thời gian rời rạc có không gian trạng thái E . Các phần tử của E được ký hiệu $i, j, k \dots$

Với mọi $i, j \in E$; đặt

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\} \quad (4.12)$$

không phụ thuộc vào n . Đó là xác suất để từ trạng thái i sau một bước sẽ chuyển thành trạng thái j .

Định nghĩa 4.2: Ma trận $P = [p_{ij}]$ với p_{ij} xác định theo (4.12) được gọi là ma trận xác suất chuyển hay ma trận xác suất chuyển sau 1 bước của chuỗi Markov $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Các phần tử p_{ij} của ma trận xác suất chuyển thỏa mãn điều kiện

$$p_{ij} \geq 0; \sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \forall i \in E \quad (4.13)$$

- ✚ Nếu tập trạng thái E vô hạn thì ma trận xác suất chuyển có vô số hàng, vô số cột và tổng thứ hai trong công thức (4.13) là tổng của một chuỗi số dương.
- ✚ Nếu tập trạng thái E hữu hạn, chẳng hạn $E = \{1, 2, \dots, m\}$ thì ma trận xác suất chuyển và công thức (4.13) được viết dưới dạng

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$p_{ij} \geq 0; \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, m \quad (4.15)$$

Ma trận vuông thỏa mãn điều kiện (4.15) được gọi là ma trận Markov hoặc ma trận ngẫu nhiên.

4.2.3 Ma trận xác suất chuyển bậc cao, Phương trình Chapman–Kolmogorov

Đặt

$$p_{ij}^{(k)} = P\{X_{n+k} = j | X_n = i\} = P\{X_k = j | X_0 = i\}. \quad (4.16)$$

Đó là xác suất sau k bước hệ sẽ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j .

Định nghĩa 4.3: Ma trận vuông $P^{(k)} = [p_{ij}^{(k)}]$ gọi là ma trận xác suất chuyển sau k bước.

Ký hiệu $P^{(0)} = I$, $P^{(1)} = P$, trong đó I là ma trận đơn vị.

Tương tự ma trận xác suất chuyển P , số hàng số cột của $P^{(k)}$ có thể vô hạn nếu không gian trạng thái E có vô số đếm được các phần tử. Nếu không gian trạng thái E hữu hạn thì ma trận xác suất chuyển sau k bước $P^{(k)}$ cũng là ma trận Markov (xem bài tập 4.8).

Định lý 4.1: Với mọi $n \geq 0$, ta có:

$$P^{(n+1)} = PP^{(n)} = P^{(n)}P \quad (4.17)$$

Từ đó suy ra

$$P^{(n)} = P^n \quad (4.18)$$

Chứng minh: Áp dụng công thức xác suất đầy đủ (1.19) ta có

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= P\{X_{n+1} = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k \in E} P\{X_{n+1} = j | X_0 = i, X_1 = k\} P\{X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k \in E} P\{X_{n+1} = j | X_1 = k\} P\{X_1 = k | X_0 = i\} = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P^{(n+1)} = PP^{(n)}.$$

Ta cũng có $p_{ij}^{(n+1)} = P\{X_{n+1} = j | X_0 = i\}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in E} P\{X_{n+1} = j | X_0 = i, X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k \in E} P\{X_{n+1} = j | X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(n)}P.$$

Từ (4.17) suy ra $P^{(2)} = PP = P^2$, bằng quy nạp ta có $P^{(n)} = P^n$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Từ công thức (4.18) và đẳng thức

$$P^{n+m} = P^n P^m, \quad \forall n, m \geq 0$$

ta có thể viết các phần tử tương ứng dưới dạng

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \quad (4.19)$$

Công thức (4.19) được gọi là *Phương trình Chapman-Kolmogorov*.

Phương trình Chapman-Kolmogorov giải thích quy luật chuyển trạng thái của chuỗi Markov như sau: hệ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j sau $n+m$ bước có thể đạt được bằng cách chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước (với xác suất $p_{ik}^{(n)}$) và tiếp tục chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước (với xác suất $p_{kj}^{(m)}$). Hơn nữa biến cố “chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước” và biến cố “chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước” là độc lập. Vậy xác suất chuyển từ i sang j sau $n+m$ bước qua i, k, j bằng $p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$. Cuối cùng xác suất chuyển từ i sang j có được bằng cách lấy tổng theo k , với k chạy trong không gian các trạng thái của chuỗi.

4.2.4 Phân bố xác suất của $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$

Giả sử không gian trạng thái có dạng $E = \{0, 1, 2, \dots\}$

Ma trận hàng

$$\mathbf{P}(n) = [p_0(n) \quad p_1(n) \quad p_2(n) \quad \dots]; \quad p_j(n) = P\{X_n = j\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

gọi là ma trận phân bố của hệ tại thời điểm n hoặc phân bố của X_n .

Các phần tử của ma trận hàng $\mathbf{P}(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$p_k(n) \geq 0; \quad \sum_k p_k(n) = 1$$

Khi $n = 0$, $\mathbf{P}(0) = [p_0(0) \quad p_1(0) \quad p_2(0) \quad \dots]$ được gọi là ma trận phân bố ban đầu.

Định lý 4.2: Với mọi $n \geq 0$, $m \geq 0$:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n)P \quad (4.22)$$

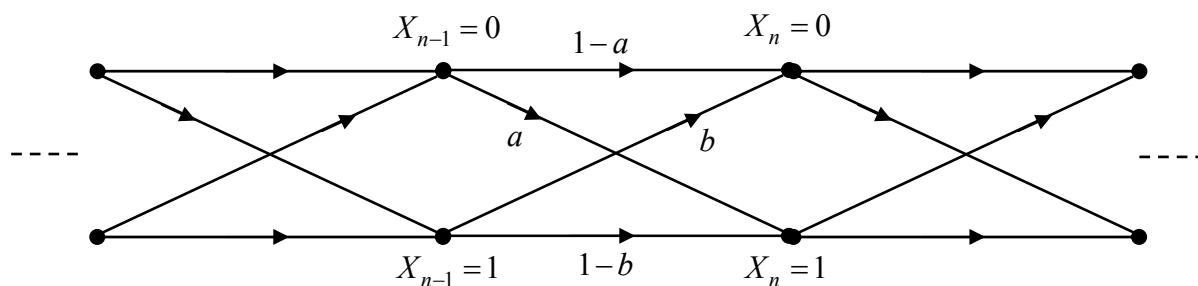
$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)P^{(m)}. \quad (4.23)$$

Chứng minh: Từ định lý 4.1 ta suy ra 3 điều trên là tương đương. Vì vậy để chứng minh định lý 4.2 ta chỉ cần chứng minh (4.23), và điều này có được bằng cách sử dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$p_j(n+m) = P\{X_{n+m} = j\} = \sum_{i \in E} P\{X_n = i\} P\{X_{n+m} = j | X_n = i\} = \sum_{i \in E} p_i(n) p_{ij}^{(m)}.$$

Vậy chuỗi Markov rời rạc thuần nhất hoàn toàn được xác định bởi ma trận xác suất chuyển một bước P và ma trận phân bố ban đầu $\mathbf{P}(0)$.

Ví dụ 4.2: Một mạng viễn thông gồm một dãy các trạm chuyển tiếp các kênh viễn thông nhị phân cho trong sơ đồ sau, trong đó X_n ký hiệu mã số nhị phân đầu ra của trạm thứ n và X_0 ký hiệu mã số nhị phân đầu vào của trạm đầu tiên.



Hình 4.3: Mạng viễn thông nhị phân

Đây là 1 mô hình chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0,1\}$, tập chỉ số $T = \{0,1,\dots,n,\dots\}$. Ma trận xác suất chuyển của mạng viễn thông này thường được gọi là ma trận kênh:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}; \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1.$$

Giả sử $a = 0,1$, $b = 0,2$ và phân bố xác suất đầu $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0,5$ (hai tín hiệu 0, 1 đồng khả năng).

- Tìm ma trận xác suất chuyển sau 2 bước,
- Tìm phân bố của trạm thứ hai X_2 .

Giải: a) $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(0)P^{(2)} = [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} = [0,585 \quad 0,415]$.

Như vậy có 58,5% tín hiệu 0 và 41,5% tín hiệu 1 ở đầu ra của trạm thứ hai, mặc dù đầu vào ở trạm đầu tiên hai tín hiệu này xuất hiện đồng khả năng.

Ví dụ 4.3: (Mô hình hòa nhập cộng đồng của các bệnh nhân tâm thần được xuất viện).

Các chuyên gia y tế thường tránh chuyển các bệnh nhân tâm thần lâu năm được xuất viện trực tiếp từ bệnh viện đến với cộng đồng. Chẳng hạn ở Billings, Montana, người ta thực hiện như sau: Trước hết người ta chuyển bệnh nhân đến ở tại khu vực được chăm sóc 24/24 giờ. Nếu tình trạng sức khỏe của bệnh nhân tiến triển tốt đáp ứng những tiêu chí đòi hỏi thì được chuyển đến nhóm 40 giờ, tức là được chăm sóc 5 ngày trong 1 tuần và 1 ngày 8 giờ. Nếu tình trạng bệnh nhân tiếp tục tiến triển

tốt hơn thì sẽ được đưa đến nhóm có sự tương tác giao tiếp cao hơn, ở đây bệnh nhân được luyện tập tự chủ hành vi của mình. Cuối cùng khi được coi là khỏi bệnh hoàn toàn thì được đưa về hòa nhập với cộng đồng.

Drachman (1981) đã phân tích các dữ liệu thu thập được ở Billings từ 1/1/1978 đến 31/5/1979 và nhận thấy rằng dữ liệu tuân theo mô hình chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển như sau:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} H & I & 24 & 40 & A & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ I \\ 24 \\ 40 \\ A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,7143 & 0,0714 & 0,0714 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1429 \\ 0,1177 & 0,0588 & 0,2941 & 0,1177 & 0,0000 & 0,4118 \\ 0,0109 & 0,0109 & 0,7283 & 0,0652 & 0,0000 & 0,1848 \\ 0,0213 & 0,0213 & 0,0213 & 0,7660 & 0,0426 & 0,1277 \\ 0,0000 & 0,0172 & 0,0172 & 0,0172 & 0,7931 & 0,1552 \\ 0,0136 & 0,0442 & 0,0578 & 0,0034 & 0,0272 & 0,8537 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

trong đó các trạng thái H (ở bệnh viện), I (bắt đầu chuyển khỏi bệnh viện), 24 (nhóm chăm sóc 24/24), 40 (nhóm chăm sóc 40 giờ/1 tuần), A (nhóm được tương tác giao tiếp) và C (nhóm được đưa về cộng đồng). Ở đây 12 tuần được quy tròn thành 3 tháng.

Áp dụng công thức (4.18) ta tính được

$$P^6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} H & I & 24 & 40 & A & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} H \\ I \\ 24 \\ 40 \\ A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,1723 & 0,0424 & 0,2002 & 0,0585 & 0,0372 & 0,4894 \\ 0,0678 & 0,0359 & 0,2032 & 0,1010 & 0,0600 & 0,5323 \\ 0,0454 & 0,0323 & 0,2539 & 0,1167 & 0,0507 & 0,5010 \\ 0,0548 & 0,0330 & 0,1256 & 0,2373 & 0,1046 & 0,4447 \\ 0,0282 & 0,0313 & 0,1180 & 0,0592 & 0,2870 & 0,4762 \\ 0,0489 & 0,0374 & 0,1758 & 0,0548 & 0,0758 & 0,6073 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dữ liệu ban đầu $O_1 = [1 \ 0 \ 15 \ 8 \ 10 \ 53]$ (biểu diễn theo tần số), áp dụng công thức (4.17) tính được

$$e_7 = O_1 P^6 = [4,17 \ 3,09 \ 15,51 \ 7,20 \ 8,52 \ 48,51],$$

ở đây 17 tháng được làm tròn thành 6 chu kỳ 12-tuần.

$$\text{Giá trị thức tế } O_7 = [5 \ 1 \ 15 \ 7 \ 8 \ 51].$$

Sử dụng phép thử “khi bình phương” để so sánh, người ta thấy rằng giá trị lý thuyết e_7 phù hợp với giá trị thức tế O_7 . Điều này chứng tỏ chuỗi Markov phù hợp với mô hình trên.

4.2.5 Một số mô hình chuỗi Markov quan trọng

4.2.5.1 Mô hình phục vụ đám đông

Xét mô hình phục vụ đám đông (lý thuyết sắp hàng). Khách đến sắp hàng chờ phục vụ theo nguyên tắc FIFO (first in first out) và trong mỗi chu kỳ cửa hàng chỉ phục vụ một khách. Số

khách đến trong chu kỳ thứ n là biến ngẫu nhiên ξ_n . Giả sử ξ_1, ξ_2, \dots là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố với biến ngẫu nhiên ξ có phân bố xác suất xác định như sau

$$P\{\xi = k\} = a_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad a_k \geq 0; \quad \sum_k a_k = 1. \quad (4.24)$$

Trạng thái của hệ (cửa hàng) là số khách xếp hàng chờ phục vụ tại thời điểm đầu của mỗi chu kỳ (khi một khách hàng vừa được phục vụ xong). Nếu hiện tại hệ ở trạng thái i và sau 1 chu kỳ hệ rơi vào trạng thái j thì

$$j = \begin{cases} i - 1 + \xi & \text{nếu } i \geq 1, \\ \xi & \text{nếu } i = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Ký hiệu X_n là số khách hàng tại thời điểm đầu của chu kỳ thứ n thì

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n, \quad \text{trong đó } X^+ = \max(0, X),$$

Từ (4.24)-(4.25) suy ra

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} P\{\xi_n = j + 1 - i\} & \text{nếu } i > 0 \\ P\{\xi_n = j\} & \text{nếu } i = 0 \end{cases} = \begin{cases} a_j & \text{nếu } i = 0, j \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } j + 1 < i \\ a_{j+1-i} & \text{nếu } j + 1 \geq i > 0 \end{cases}$$

Vì các quá trình đến ξ_n độc lập do đó xác suất chuyển $p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ thỏa mãn điều kiện (4.7), hơn nữa các biến ngẫu nhiên ξ_n có cùng phân bố do đó xác suất chuyển p_{ij} thuần nhất theo thời gian.

Vậy $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ là chuỗi Markov thuần nhất với ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.2.5.2 Mô hình kiểm kê (Inventory Model)

Giả thiết phải dự trữ trong kho một loại hàng nào đó để đáp ứng nhu cầu liên tục của khách hàng. Hàng được nhập kho tại cuối mỗi chu kỳ $n = 0, 1, 2, \dots$. Giả sử tổng số lượng hàng cần phải đáp ứng nhu cầu trong chu kỳ n là biến ngẫu nhiên ξ_n có phân bố độc lập với chu kỳ thời gian, nghĩa là dãy biến ngẫu nhiên $\{\xi_n\}$ độc lập có cùng phân bố với ξ .

$$P\{\xi = k\} = a_k; \quad a_k > 0 \quad \text{và} \quad \sum_k a_k = 1. \quad (4.27)$$

Mức hàng dự trữ được kiểm kê tại cuối mỗi chu kỳ. Cách nhập hàng căn cứ vào 2 chỉ số tiêu chuẩn s và S ($s < S$) như sau: Nếu ở cuối mỗi chu kỳ lượng hàng dự trữ $\leq s$ thì ngay tức khắc nhập hàng để có số hàng dự trữ bằng S ; Nếu hàng hiện có $> s$ thì không cần nhập hàng. Giả sử số nhu cầu trong mỗi chu kỳ không vượt quá S .

Ký hiệu X_n là lượng hàng hiện có tại cuối chu kỳ n và trước khi nhập hàng, như vậy

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1} & \text{nếu } s < X_n \leq S, \\ S - \xi_{n+1} & \text{nếu } X_n \leq s. \end{cases} \quad (4.28)$$

Các trạng thái của quá trình $\{X_n, n \geq 0\}$ là các số lượng hàng dự trữ:

$$S, S-1, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots$$

trong đó giá trị âm là nhu cầu chưa được phục vụ mà sẽ được đáp ứng ngay sau khi nhập hàng

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} P\{\xi_{n+1} = i - j\} & \text{nếu } s < i \leq S, \\ P\{\xi_{n+1} = S - j\} & \text{nếu } i \leq s. \end{cases} \quad (4.29)$$

Ví dụ 4.4: Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế, trong đó yêu cầu có thể là 0, 1 hoặc 2 đơn vị phụ tùng cần thay thế trong một chu kỳ bất kỳ với phân bố xác suất như sau

$$P\{\xi = 0\} = 0,5; \quad P\{\xi = 1\} = 0,4; \quad P\{\xi = 2\} = 0,1$$

và giả sử $s = 0; S = 2$.

Không gian trạng thái sẽ là $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.

$$\text{Ta có: } p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} P\{\xi = i - j\} & \text{nếu } 0 < i \leq 2, \\ P\{\xi = 2 - j\} & \text{nếu } i \leq 0. \end{cases}$$

$$p_{-1,-1} = P\{X_{n+1} = -1 | X_n = -1\} = P(\emptyset) = 0,$$

$$p_{-1,0} = P\{X_{n+1} = 0 | X_n = -1\} = P(\xi = 2) = 0,1,$$

$$p_{-1,1} = P\{X_{n+1} = 1 | X_n = -1\} = P(\xi = 1) = 0,4,$$

.....

Ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Mô hình di động ngẫu nhiên được xét trong mục 4.4.

4.2.6 Phân bố dừng, phân bố giới hạn, phân bố ergodic

Định nghĩa 4.4. $\mathbf{P}^* = [p_1 \ p_2 \ \dots]$ được gọi là phân bố dừng của chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển P nếu thoả mãn 2 điều kiện:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P & (a) \\ p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1 & (b) \end{cases} \quad (4.30)$$

Từ (4.30-a) suy ra

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P = \mathbf{P}^* P^2 = \dots = \mathbf{P}^* P^n ; \forall n .$$

Do đó nếu lấy \mathbf{P}^* làm phân bố đầu của chuỗi Markov thì $\mathbf{P}^*(n) = \mathbf{P}^*$, $\forall n$. Như vậy nếu chuỗi Markov có phân bố dừng tại thời điểm n_0 nào đó thì hệ sẽ có phân bố xác suất ổn định sau mọi bước chuyển kể từ thời điểm n_0 .

Điều kiện (4.30-a) có thể viết lại dưới dạng

$$P^t \mathbf{P}^{*t} = \mathbf{P}^{*t} \quad (4.31)$$

trong đó ma trận cột \mathbf{P}^{*t} là ma trận chuyển vị của \mathbf{P}^* .

Công thức (4.31) cho thấy phân bố dừng \mathbf{P}^* là véc tơ riêng với giá trị riêng bằng 1 của ma trận P^t .

Định nghĩa 4.5: Ta nói rằng chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển P có phân bố giới hạn là $[p_1 \ p_2 \ \dots]$ nếu thoả mãn 2 điều kiện:

$$1) \text{ Với mọi } j \text{ tồn tại giới hạn } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j \text{ không phụ thuộc } i, \quad (4.32)$$

$$2) \sum_j p_j = 1, \quad p_j \geq 0, \quad (4.33)$$

Nếu điều kiện (4.33) được thay bởi

$$3) \sum_j p_j = 1, \quad p_j > 0 \quad (4.34)$$

thì chuỗi Markov được gọi là có tính ergodic và $[p_1 \ p_2 \ \dots]$ là phân bố ergodic.

Nhận xét 4.1:

➤ Nếu phân bố của X_{n_0} (ở thời điểm thứ n_0) của chuỗi là phân bố dừng thì từ thời điểm này trở đi phân bố của chuỗi không thay đổi; nghĩa là với mọi $m \geq n_0$, X_m và X_{n_0} có cùng phân bố.

➤ Phân bố giới hạn là phân bố hệ sẽ đạt được khi thời gian tiến đến vô cùng. Phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển, không phụ thuộc phân bố đầu (ví dụ 4.6). Trong thực

tế có thể đến thời điểm nào đó trở đi chuỗi sẽ đạt được phân bố giới hạn. Ví dụ 4.5 sau đây chứng tỏ với $n = 20$ thì chuỗi đạt được phân bố giới hạn.

➤ Phân bố ergodic là phân bố giới hạn với xác suất dương tại mọi trạng thái của chuỗi.

Ví dụ 4.5: Có 3 mạng điện thoại di động A, B, C cùng khai thác thị trường. Tỷ lệ chiếm lĩnh thị trường hiện tại tương ứng là 40%, 30% và 30%. Theo thống kê người ta thấy xác suất thay đổi mạng của khách hàng trong mỗi tháng như sau:

$$P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{array} \right] \end{array}$$

Áp dụng công thức (4.18) và (4.21) ta tính được phân bố tại thời điểm thứ n : $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)}$ trong các trường hợp sau.

$$n = 0 \quad \mathbf{P}(0) = [0,4 \quad 0,3 \quad 0,3],$$

$$n = 1 \quad P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)P = [0,35 \quad 0,43 \quad 0,22],$$

$$n = 6 \quad P^6 = \begin{bmatrix} 0,2125 & 0,5492 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5648 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5181 & 0,2853 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(6) = \mathbf{P}(0)P^6 = [0,2047 \quad 0,5476 \quad 0,2477],$$

$$n = 12 \quad P^{12} = \begin{bmatrix} 0,2002 & 0,5503 & 0,2495 \\ 0,2000 & 0,5506 & 0,2495 \\ 0,2000 & 0,5484 & 0,2516 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(12) = \mathbf{P}(0)P^{12} = [0,2001 \quad 0,550 \quad 0,2499],$$

$$n = 18 \quad P^{18} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5499 & 0,2501 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(18) = \mathbf{P}(0)P^{18} = [0,2000 \quad 0,550 \quad 0,2500].$$

$$n = 20 \quad P^{20} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(20) = \mathbf{P}(0)P^{20} = [0,20 \quad 0,55 \quad 0,25].$$

Ta thấy rằng khi n càng lớn xác suất trên mỗi cột càng gần bằng nhau và đạt được phân bố giới hạn khi $n = 20$.

Vậy thị trường đạt trạng thái ổn định với tỷ lệ tương ứng 20%, 55% và 25%. Phân bố giới hạn này chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển và không phụ thuộc phân bố ban đầu.

Ví dụ sau đây cũng minh họa thêm về điều đó.

Ví dụ 4.6: Về sự bình đẳng trong giáo dục giữa các nhóm chủng tộc.

Trên cơ sở báo cáo điều tra dân số của văn phòng điều tra dân số Hoa kỳ năm 1960, hai tác giả Lieberson và Fuguitt (1967) đã xác định được ma trận chuyển trình độ học vấn giữa hai thế hệ khi so sánh tình trạng học vấn của nhóm thanh niên độ tuổi 20-24 với trình độ học vấn của bố của họ:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Dưới ĐH} & \text{ĐH} & \text{Trên ĐH} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Dưới ĐH} \\ \text{ĐH} \\ \text{Trên ĐH} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,43 & 0,34 & 0,23 \\ 0,10 & 0,36 & 0,54 \\ 0,05 & 0,15 & 0,80 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Hai tác giả đồng ý rằng có hai loại bất lợi đối với các nhóm chủng tộc và dân tộc. Loại bất lợi thứ nhất bắt nguồn từ nguồn gốc chủng tộc và dân tộc mà kết quả là có sự khác nhau giữa ma trận chuyển của nhóm người da trắng và nhóm người da màu. Ngay cả khi sự phân biệt chủng tộc bị loại bỏ thì vẫn còn loại bất lợi thứ hai đó là vị trí xã hội và thu nhập của người da màu thấp hơn nhiều so với người da trắng. Nói cách khác ngay cả khi ma trận chuyển về học vấn giữa hai thế hệ P (ma trận xác suất chuyển) được xem là như nhau giữa hai nhóm thì điều kiện ban đầu $P(0)$ (phân bố đầu) cũng khác nhau.

Bảng kết quả sau được giả định rằng ma trận chuyển P giữa hai nhóm da trắng và da màu là như nhau nhưng có xuất phát điểm khác nhau. Chỉ số khác nhau trong bảng là tỷ lệ % khoảng cách mà hai nhóm cần phải thay đổi để đạt được phân bố trình độ học vấn bằng nhau.

		% Dưới ĐH	% ĐH	% Trên ĐH	Chỉ số % khác nhau
P(1) (1960)	Da trắng	46	31	23	29
	Da màu	75	16	09	
P(2)	Da trắng	24	30	46	13
	Da màu	34	33	33	
P(3)	Da trắng	16	26	58	6
	Da màu	20	28	52	
P(4)	Da trắng	12	23	64	3
	Da màu	14	25	61	
P(5)	Da trắng	11	22	68	1
	Da màu	11	23	66	
P(6)	Da trắng	10	22	68	1
	Da màu	11	22	67	
P(7)	Da trắng	10	21	69	1
	Da màu	10	22	68	
P(8)	Da trắng	10	21	69	0
	Da màu	10	21	69	

Như vậy không phụ thuộc vào xuất phát điểm, sau 8 thế hệ các nhóm người trong cộng đồng đều có trình độ học vấn như nhau theo tỷ lệ 10% dưới ĐH, 21% ĐH và 69% trên ĐH.

Định lý 4.3: Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì đó là phân bố dừng duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $[p_1 \ p_2 \ \dots]$ là phân bố giới hạn, khi đó với mọi j ta có:

$$p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj} \right) = \sum_k p_k p_{kj}$$

$\Rightarrow [p_1 \ p_2 \ \dots] = [p_1 \ p_2 \ \dots]P$. Do đó $[p_1 \ p_2 \ \dots]$ là một phân bố dừng.

Ngược lại giả sử $[\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \dots]$ là một phân bố dừng bất kỳ của chuỗi Markov này thì

$$\bar{p}_j = \sum_k \bar{p}_k p_{kj} = \sum_k \bar{p}_k p_{kj}^{(2)} = \dots = \sum_k \bar{p}_k p_{kj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \bar{p}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_k \bar{p}_k p_{kj}^{(n)} \right) = \sum_k \bar{p}_k p_j = \bar{p}_j.$$

Nghĩa là phân bố giới hạn là phân bố dừng duy nhất.

Định lý 4.4: Nếu chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn thì chuỗi này là ergodic khi và chỉ khi tồn tại n_0 sao cho $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$.

Nhận xét 4.2: Từ định lý 4.3 và 4.4 ta thấy rằng nếu chuỗi Markov có ma trận xác suất chuyển $P = [p_{ij}]$ thỏa mãn điều kiện tồn tại n_0 sao cho $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$ thì chuỗi này là ergodic. Phân bố ergodic cũng là phân bố dừng duy nhất, đó là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} [x_1 \ x_2 \ \dots] = [x_1 \ x_2 \ \dots]P \\ x_j > 0, \sum_j x_j = 1. \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} P^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ x_j > 0, \sum_j x_j = 1. \end{cases} \quad (4.35)$$

Giải hệ phương trình (4.35) cho trường hợp ví dụ 4.6 ta cũng thu được phân bố dừng tương ứng $\mathbf{P}^* = [0,20 \ 0,550 \ 0,25]$.

Ví dụ 4.7: Xét chuỗi Markov ở ví dụ 4.2, ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \quad 0 < a, b < 1$$

Theo định lý 4.4 chuỗi Markov có tính ergodic với phân bố ergodic là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b}{a+b} \\ x_2 = \frac{a}{a+b} \end{cases}$$

Mặt khác cũng có thể tính trực tiếp ma trận chuyển sau n bước

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\} \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}.$$

Do đó chuỗi tồn tại phân bố giới hạn.

Để chứng minh (4.36) ta có thể tính theo một trong các cách sau:

✚ Quy nạp theo n .

✚ Sử dụng công thức: nếu $AB = BA$ thì $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k}$ và bằng cách đặt

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = (-a-b)^{k-1} A$$

$$P^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^k = I + \sum_{k=1}^n C_n^k A^k = I + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k (-a-b)^{k-1} \right) A$$

$$= I + \frac{1}{-(a+b)} \left((1-a-b)^n - 1 \right) A = \frac{1}{a+b} \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\}.$$

Ví dụ 4.8: Trong một bài báo viết năm 1913 A. A. Markov đã chọn 1 dãy gồm 20.000 chữ cái trong trường ca Evghenhi Onheghin của A. X. Puskin và thấy rằng các chữ cái này chuyển đổi liên tiếp theo hai trạng thái nguyên âm (Na) và phụ âm (Pa) với ma trận xác suất chuyển là

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} Na & Pa \end{matrix} \\ \begin{matrix} Na \\ Pa \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,128 & 0,872 \\ 0,663 & 0,337 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Phân bố giới hạn (cũng là phân bố dừng) của chuỗi Markov này là

$$P(Na) = \frac{0,663}{0,872+0,663} = 0,423, \quad P(Pa) = \frac{0,872}{0,872+0,663} = 0,568.$$

Vậy có khoảng 42,3% nguyên âm và 56,8% phụ âm trong tác phẩm trên.

4.3 PHÂN LOẠI TRẠNG THÁI CHUỖI MARKOV

Định lý 4.4 cho ta dấu hiệu nhận biết một chuỗi Markov hữu hạn trạng thái tồn tại phân bố ergodic. Trong trường hợp tổng quát, bằng cách phân tích trạng thái của chuỗi Markov ta sẽ tìm điều kiện để chuỗi tồn tại phân bố dừng, phân bố giới hạn hoặc phân bố ergodic thỏa mãn các điều kiện (4.31)-(4.34).

4.3.1 Các trạng thái liên thông và sự phân lớp

Định nghĩa 4.6: Ta nói rằng trạng thái j đạt được (accessible) từ trạng thái i nếu tồn tại $n \geq 0$ sao cho $p_{ij}^{(n)} > 0$ (xác suất để sau n bước chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j lớn hơn 0). Ký hiệu $i \rightarrow j$.

Quy ước $p_{ii}^{(0)} = 1$ và $p_{ij}^{(0)} = 0$ khi $i \neq j$.

Hai trạng thái i và j được gọi là liên thông (communicate) với nhau nếu $i \rightarrow j$ và $j \rightarrow i$, lúc đó ta ký hiệu $i \leftrightarrow j$.

Có thể chứng minh được rằng \leftrightarrow là một quan hệ tương đương (có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu) trên tập các trạng thái. Do đó ta có thể phân hoạch không gian trạng thái thành các lớp tương đương. Các lớp tương đương này rời nhau, hai trạng thái bất kỳ cùng một lớp thì liên thông với nhau, còn hai trạng thái thuộc hai lớp khác nhau không thể liên thông với nhau.

Định nghĩa 4.7: Chuỗi Markov được gọi là tối giản (irreducible) nếu hai trạng thái bất kỳ của không gian trạng thái liên thông với nhau.

Như vậy chuỗi Markov tối giản chỉ có một lớp tương đương.

Ví dụ 4.9: Cho chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Không gian trạng thái $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ phân thành hai lớp $E_1 = \{1, 2\}$, $E_2 = \{3, 4, 5\}$. Có thể xem E_1, E_2 lần lượt là hai không gian trạng thái của hai chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển tương ứng là P_1 và P_2 , hai chuỗi Markov này tối giản.

Một cách tổng quát, giả sử không gian trạng thái được tách thành các lớp tương đương

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$$

Khi đó có thể xem mỗi E_k ($k = 1, 2, \dots$) là không gian trạng thái của chuỗi Markov tối giản với ma trận xác suất chuyển là ma trận con P_k ứng với phép phân hoạch tương ứng của không gian trạng thái. Vì thế E_1, E_2, \dots được gọi là các lớp tối giản của chuỗi.

4.3.2 Trạng thái tuần hoàn và không tuần hoàn

Định nghĩa 4.8: Ta định nghĩa chu kỳ của trạng thái i là

$$d(i) = UCLN \{ n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0 \} \quad (4.37)$$

trong đó $UCLN$ viết tắt của “ước chung lớn nhất”.

Nếu $p_{ii}^{(n)} = 0$ đối với mọi $n \geq 1$ thì đặt $d(i) = 0$.

Nếu $d(i) > 1$ thì trạng thái i được gọi là *trạng thái tuần hoàn* với chu kỳ $d(i)$.

Nếu $d(i) = 1$ thì trạng thái i được gọi là *trạng thái không tuần hoàn*. Rõ ràng nếu $p_{ii} > 0$ thì i là trạng thái không tuần hoàn.

4.3.3 Biểu đồ chuyển trạng thái của chuỗi Markov với hữu hạn trạng thái

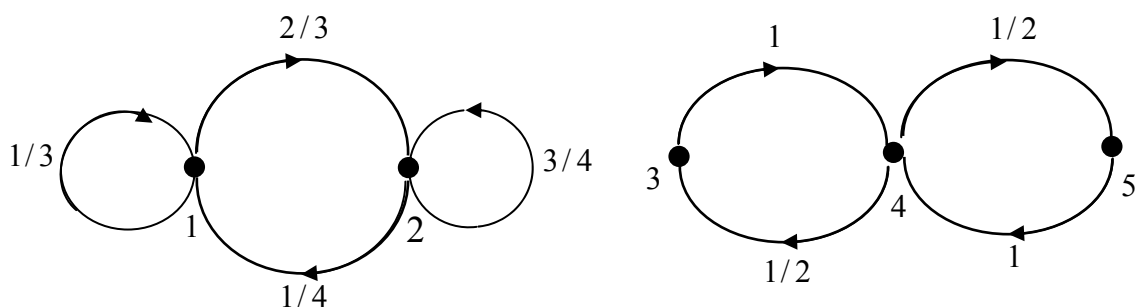
Biểu đồ chuyển trạng thái của một chuỗi Markov hữu hạn trạng thái là biểu đồ có:

- Các đỉnh tương ứng với các trạng thái,
- Các đường nối giữa hai đỉnh i, j có mũi tên theo hướng từ i đến j nếu $p_{ij} > 0$.

Trong biểu đồ này nếu có thể di chuyển theo chiều mũi tên từ i đến j thì $i \rightarrow j$.

Biểu đồ chuyển trạng thái rất hữu ích trong việc xác định chuỗi Markov có không gian trạng thái tối giản hay không hoặc kiểm tra tính chất tuần hoàn và tìm chu kỳ của trạng thái.

Chuỗi Markov ở ví dụ 4.9 có biểu đồ



Hình 4.4: Biểu đồ chuyển trạng thái

Các trạng thái có chu kỳ như sau

$$d(1) = d(2) = 1; d(3) = d(4) = d(5) = 2.$$

Ví dụ này cho thấy các trạng thái cùng lớp sẽ có chu kỳ bằng nhau. Định lý sau đây khẳng định điều đó.

Định lý 4.5: Nếu $i \leftrightarrow j$ thì $d(i) = d(j)$. Do đó các trạng thái thuộc cùng một lớp có cùng chu kỳ.

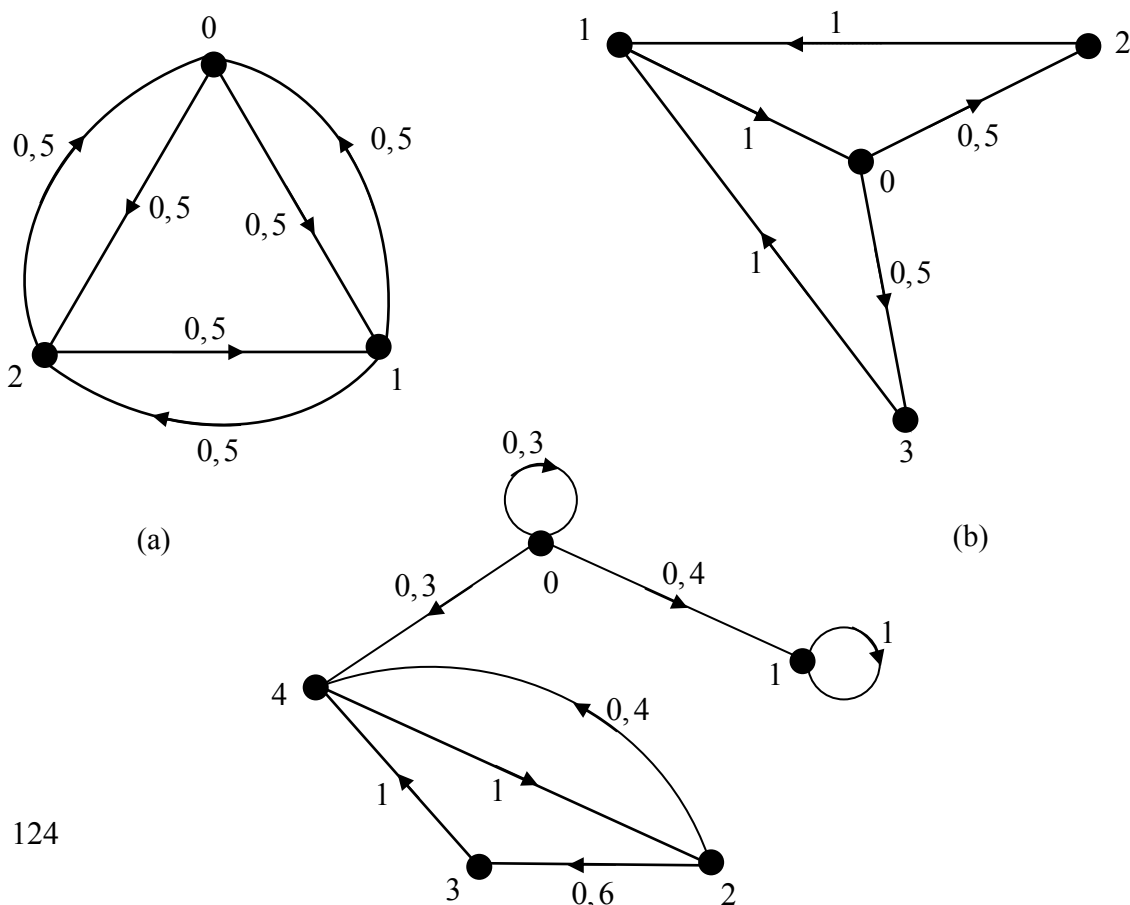
Ví dụ 4.10: Vẽ biểu đồ chuyển trạng thái và phân loại các trạng thái của các chuỗi Markov có ma trận xác suất chuyển sau

$$(a) P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải: a) Biểu đồ chuyển trạng thái của chuỗi Markov (a) là hình 4.5 (a). Không gian trạng thái tối giản và không tuần hoàn. Chẳng hạn có thể xuất phát từ 0 và sau hai bước sẽ quay lại 0 theo đường $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Tuy nhiên cũng có thể xuất phát từ 0 và sau ba bước quay lại 0 theo đường $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$. Vậy 0 là trạng thái không tuần hoàn, do đó các trạng thái 1, 2 cũng không tuần hoàn.

b) Biểu đồ chuyển trạng thái của chuỗi Markov (b) là hình 4.5 (b). Không gian trạng thái tối giản và tuần hoàn với chu kỳ 3.

c) Biểu đồ chuyển trạng thái của chuỗi Markov (c) là hình 4.5 (c). Không gian trạng thái không tối giản vì trạng thái 0 và 4 không liên thông. $d(0) = d(1) = d(2) = d(4) = d(3) = 1$.

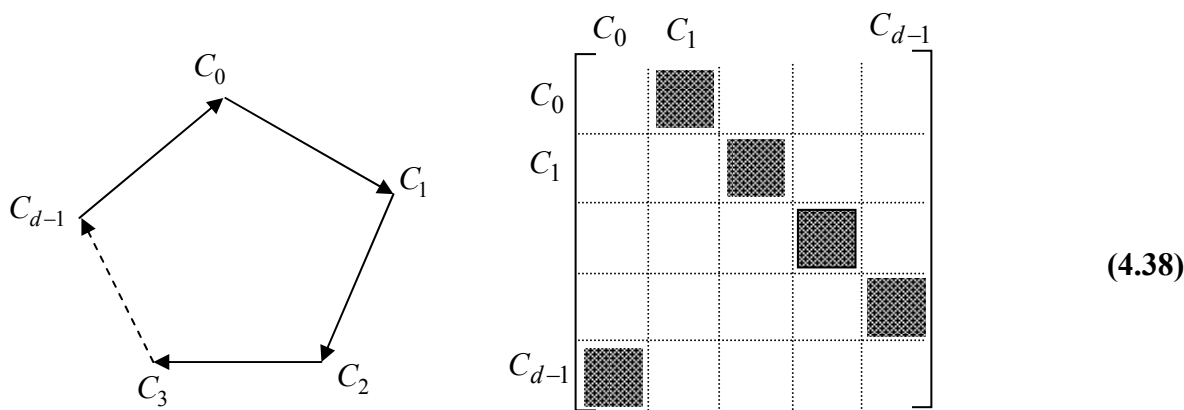


Trạng thái i được gọi là *trạng thái hấp thụ* (Absorbing state) nếu $p_{ii} = 1$, đó là trạng thái mà nếu hệ đạt đến trạng thái này thì không bao giờ rời đi. Trạng thái 1 của chuỗi Markov 4.3-(c) là trạng thái hấp thụ.

4.3.4 Dạng ma trận xác suất chuyển của chuỗi Markov tối giản

Đối với chuỗi Markov tối giản mọi trạng thái đều có cùng chu kỳ, ta gọi d là chu kỳ chung của các trạng thái của chuỗi.

- Nếu $d = 1$ (không tuần hoàn) thì ma trận xác suất chuyển P chỉ có 1 khối.
- Nếu $d > 1$ thì tập trạng thái E tách thành d lớp con: C_0, C_1, \dots, C_{d-1} . Trong trường hợp này sau một bước hệ xuất phát từ C_0 sẽ chuyển sang C_1 ; xuất phát từ C_1 sẽ chuyển sang C_2 ; v.v...; C_{d-1} sẽ chuyển sang C_0 . Ma trận xác suất chuyển P có dạng khối như sau:



Vì vậy mỗi lớp con C_k có thể lấy làm không gian trạng thái của chuỗi Markov mới với ma trận xác suất chuyển là $[p_{ij}^{(d)}]_{i,j \in C_k}$, chuỗi này tối giản có chu kỳ bằng 1. Như vậy ta có thể quy việc nghiên cứu chuỗi Markov tổng quát (đặc biệt là vấn đề tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$) về chuỗi Markov tối giản có chu kỳ 1.

4.3.5 Trạng thái hồi quy và trạng thái không hồi quy

Với mỗi trạng thái j ta gọi T_j là thời điểm (hoặc số các bước) lần đầu tiên hệ đến được trạng thái j sau thời điểm 0. Nếu hệ không bao giờ đến được trạng thái j ta đặt $T_j = \infty$. Vậy T_j là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị trong tập $\{1, 2, \dots, \infty\}$.

Với mỗi trạng thái i ta đặt:

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_j = n | X_0 = i\} = P\{X_n = j, X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j | X_0 = i\} \quad (4.39a)$$

$$f_{ij}^{(0)} = 0 \text{ vì } T_j \geq 1. \quad (4.39b)$$

Như vậy $f_{ij}^{(n)}$ là xác suất để hệ xuất phát từ i lần đầu tiên chuyển sang j tại bước thứ n .

Đặc biệt $f_{ii}^{(n)}$ là xác suất để hệ xuất phát từ i lần đầu tiên quay về i tại bước thứ n .

Các xác suất $f_{ij}^{(n)}$ có các tính chất sau:

$$f_{ij}^{(1)} = P\{T_j = 1 | X_0 = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\} = p_{ij}. \quad (4.40)$$

Từ tính Markov và công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}, \quad n \geq 2 \quad (4.41)$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \quad n \geq 1 \quad (4.42)$$

Xác suất để hệ xuất phát từ i chuyển đến trạng thái j tại thời điểm hữu hạn nào đó là

$$f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\{T_j < \infty | X_0 = i\} \quad (4.43)$$

Xác suất để hệ xuất phát từ i quay trở về trạng thái i tại thời điểm hữu hạn nào đó là

$$f_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = P\{T_i < \infty | X_0 = i\} \quad (4.44)$$

Định nghĩa 4.9:

- Nếu $f_{ii} = P\{T_i < \infty | X_0 = i\} = 1$ thì i được gọi là *trạng thái hồi quy* (recurrent).
- Nếu $f_{ii} = P\{T_i < \infty | X_0 = i\} < 1$ thì i được gọi là *trạng thái không hồi quy* (transient hoặc unrecurrent).

Như vậy trạng thái i hồi quy khi và chỉ khi hệ xuất phát từ i , với xác suất 1 hệ lại trở về i tại thời điểm hữu hạn nào đó. Đối với trạng thái i không hồi quy thì “biến cố hệ không bao giờ quay trở lại i ” có xác suất > 0 (xác suất $P\{T_i = \infty | X_0 = i\} > 0$).

Trường hợp trạng thái i hồi quy ($f_{ii} = 1$), khi đó kỳ vọng của $(T_i | X_0 = i)$ (thời điểm trung bình để lần đầu tiên hệ quay lại trạng thái i với điều kiện hệ xuất phát từ i tại thời điểm 0) được ký hiệu và tính theo công thức sau.

$$\mu_i = E[T_i | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \quad (4.45)$$

Định nghĩa 4.10: Giả sử i là trạng thái hồi quy, ta nói:

- i là trạng thái hồi quy dương (positive recurrent) nếu $\mu_i < \infty$.
- i là trạng thái hồi quy không (null recurrent) nếu $\mu_i = \infty$.

Như vậy không gian trạng thái E được phân loại như sau:

1. Các trạng thái hồi quy:
 - Trạng thái hồi quy dương,
 - Trạng thái hồi quy không.
2. Các trạng thái không hồi quy.

Ví dụ 4.11: Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \{0, 1\}$ có ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Ta có $f_{00}^{(1)} = p_{00} = 1$ $f_{10}^{(1)} = p_{10} = \frac{1}{2}$

$$f_{00}^{(2)} = p_{01} f_{10}^{(1)} = 0 \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$f_{00}^{(n)} = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Theo công thức (4.43)

$$f_{00} = P\{T_0 < \infty | X_0 = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$\mu_0 = E[T_0 | X_0 = 0] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 1$$

Như vậy 0 là trạng thái hồi quy dương.

Tương tự ta có $f_{11}^{(1)} = p_{11} = \frac{1}{2}$ $f_{01}^{(1)} = p_{01} = 0$

$$f_{11}^{(2)} = p_{10} f_{01}^{(1)} = \left(\frac{1}{2} \right) 0 = 0$$

$$f_{11}^{(n)} = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Theo công thức (4.43)

$$f_{11} = P\{T_1 < \infty | X_0 = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2} < 1$$

Như vậy 1 là trạng thái không hồi quy.

4.3.6 Tiêu chuẩn hồi quy và không hồi quy

Định lý 4.6: 1) Trạng thái i là hồi quy khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

2) Trạng thái i là không hồi quy khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

3) Nếu $i \rightarrow j$ và i hồi quy thì $j \rightarrow i$ và j cũng hồi quy.

4) Nếu $i \leftrightarrow j$ và j hồi quy thì $f_{ij} = 1$.

Định lý 4.7: Nếu j không hồi quy thì với mọi trạng thái i ta có $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$.

Đặc biệt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{với mọi } i \in E \quad (4.46)$$

4.3.7 Định lý giới hạn cơ bản của chuỗi Markov

Định lý 4.8: Giả sử j là trạng thái hồi quy không tuần hoàn ($d(j) = 1$). Khi đó:

1. Nếu i và j liên thông thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_j} & \text{đối với } j \text{ là trạng thái dương} \\ 0 & \text{đối với } j \text{ là trạng thái không} \end{cases} \quad (4.47)$$

2. Nếu i và j không liên thông thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{\mu_j} & \text{đối với } j \text{ là trạng thái dương} \\ 0 & \text{đối với } j \text{ là trạng thái không} \end{cases} \quad (4.48)$$

Định lý 4.9: Giả sử j là trạng thái hồi quy tuần hoàn chu kỳ $d(j) = d > 1$. Khi đó:

1. Nếu i và j liên thông; i thuộc vào lớp con C_r còn j thuộc vào lớp C_{r+a} thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+a)} = \frac{d}{\mu_j}, \quad (a = 0, 1, \dots, d-1) \quad (4.49)$$

2. Nếu i bất kỳ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+a)} = \left[\sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+a)} \right] \frac{d}{\mu_j}, \quad (a = 0, 1, \dots, d-1) \quad (4.50)$$

4.3.6. Sự tồn tại phân bố dừng và phân bố giới hạn

Định lý 4.10: Giả sử $\{X_n\}$ là chuỗi Markov với không gian trạng thái E . Khi đó phân bố dừng tồn tại và duy nhất khi và chỉ khi trong số các lớp tương đương của không gian trạng thái E có đúng một lớp hồi quy dương.

Giả sử lớp hồi quy dương là C , khi đó phân bố dừng có dạng

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{\mu_j} & \text{nếu } j \in C \\ 0 & \text{nếu } j \notin C. \end{cases} \quad (4.51)$$

Định lý 4.11: Điều kiện cần và đủ để tồn tại phân bố giới hạn là không gian trạng thái E có đúng một lớp hồi quy dương C không tuần hoàn ($d(C) = 1$) sao cho $f_{ij} = 1; \forall j \in C, \forall i \in E$.

Khi đó phân bố giới hạn cũng là phân bố dừng duy nhất thỏa mãn (4.51).

Định lý 4.12: Giả sử $\{X_n, n \geq 0\}$ là một chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn. Khi đó các điều sau là tương đương:

- (i) $\{X_n, n \geq 0\}$ tối giản, không tuần hoàn.
- (ii) $\{X_n, n \geq 0\}$ tối giản, không tuần hoàn và tất cả các trạng thái là hồi quy dương.
- (iii) $\{X_n, n \geq 0\}$ có tính ergodic, nghĩa là tồn tại phân bố ergodic (thỏa mãn 4.32, 4.34).
- (iv) Tồn tại n_0 sao cho $\min_{i,j} p_{ij}^{(n)} > 0$ với mọi $n \geq n_0$ (xem định lý 4.4).

4.4. DI ĐỘNG NGẪU NHIÊN TRÊN ĐƯỜNG THẲNG

4.4.1 Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng không có trạng thái hấp thụ

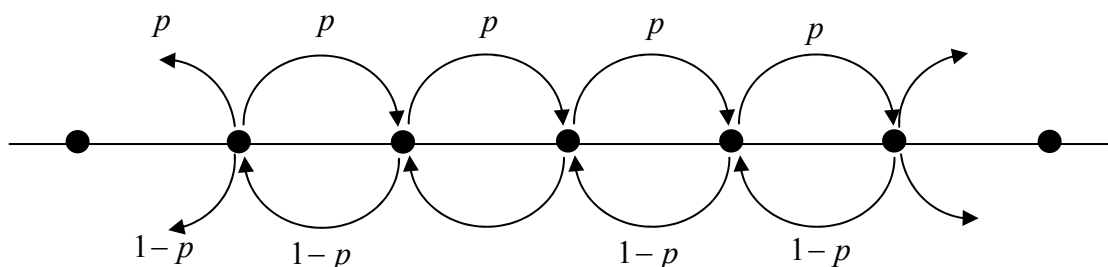
Giả sử $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố thỏa mãn:

$$P\{\varepsilon_n = 1\} = p, P\{\varepsilon_n = -1\} = 1 - p = q; \quad 0 < p < 1. \quad (4.52)$$

Đặt $X_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$, ($n = 1, 2, \dots$). Khi đó $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ lập thành chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển là

$$P = [p_{ij}] \text{ trong đó } p_{ij} = \begin{cases} p & \text{với } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{với } j = i - 1 \\ 0 & \text{với } j \neq i \pm 1 \end{cases} \quad (4.53)$$

Không gian trạng thái của chuỗi này là $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



Hình 4.6: Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng không có trạng thái hấp thụ

Chuỗi này dùng để mô tả di động ngẫu nhiên trên đường thẳng của hạt vật chất nào đó (có tài liệu gọi là du động ngẫu nhiên): Sau mỗi chu kỳ hạt dịch chuyển sang phải với xác suất p hoặc dịch sang trái với xác suất $1-p$.

Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng là chuỗi Markov tối giản, có chu kỳ $d = 2$.

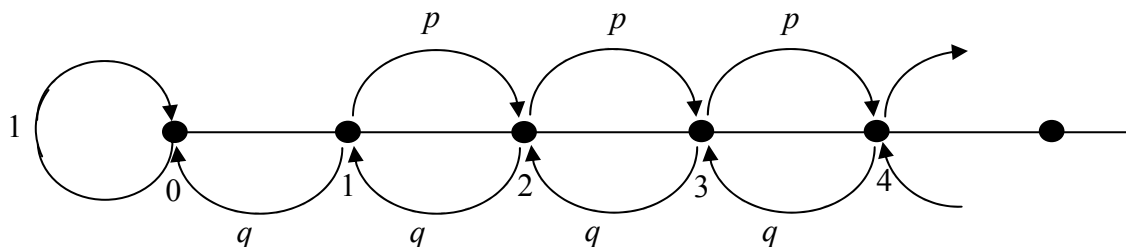
- Nếu $p = q = \frac{1}{2}$ thì mọi trạng thái là hồi quy không.
- Nếu $p \neq q$ thì mọi trạng thái là không hồi quy.

Theo định lý 4.10 chuỗi không tồn tại phân bố dừng và do đó không có tính ergodic.

4.4.2 Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có một trạng thái hấp thụ

Đó là di động của hạt vật chất với không gian trạng thái $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ và ma trận xác suất chuyển là

$$P = [p_{ij}], \text{ trong đó } p_{00} = 1, p_{ij} = \begin{cases} p & \text{với } j = i+1, i \neq 0, \\ 1-p & \text{với } j = i-1, i \neq 0, \\ 0 & \text{với } j \neq i \pm 1, i \neq 0, \end{cases} ; 0 < p < 1 \quad (4.54)$$



Hình 4.7: Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có một trạng thái hấp thụ

Lúc này $\{0\}$ lập thành lớp hồi quy dương duy nhất với chu kỳ $d = 1$: $E = \{0\} \cup \{1, 2, \dots\}$. Tất cả các trạng thái $1, 2, \dots$ là không hồi quy (vì nếu 1 hồi quy chẳng hạn thì do $1 \rightarrow 0$ nên $0 \rightarrow 1$, điều này không thể xảy ra). Vì vậy theo định lý 4.10 và công thức (4.51) tồn tại phân bố dừng duy nhất, đó là

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{với } j = 0, \\ 0 & \text{với } j \neq 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

Hơn nữa có thể chứng minh được rằng đối với mỗi $i \geq 1$ thì

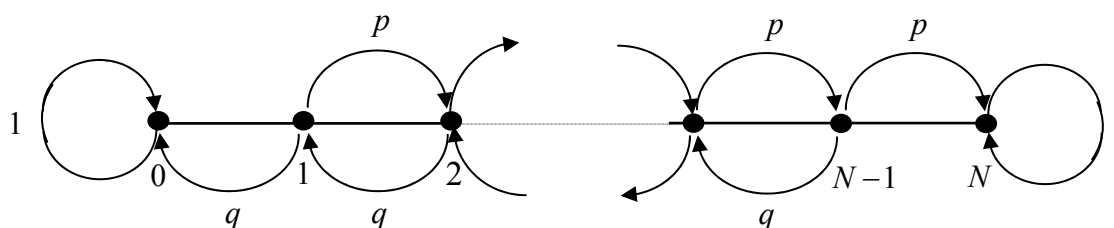
$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}^{(n)} = \begin{cases} (q/p)^i & \text{nếu } p > q, \\ 1 & \text{nếu } p \leq q; \quad q = 1 - p. \end{cases} \quad (4.56)$$

Vi vậy:

- Khi $p > q$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}^{(n)} = (q/p)^i$ phụ thuộc vào i , do đó không tồn tại phân bố giới hạn.
- Khi $p \leq q$ thì tồn tại phân bố giới hạn, đó là $p_j = \begin{cases} 1 & \text{với } j = 0, \\ 0 & \text{với } j \neq 0. \end{cases}$

4.4.3 Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có hai trạng thái hấp thụ

Đó là mô hình di động như hình vẽ



Hình 4.8: Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có hai trạng thái hấp thụ

Ma trận xác suất chuyển là ma trận vuông cấp $N+1$ có dạng

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp này có hai lớp hồi quy dương $\{0\}$ và $\{N\}$. Các trạng thái còn lại không hồi quy:

$$E = \{0\} \cup \{N\} \cup \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

0, N là hai trạng thái hấp thụ do đó hệ sẽ ngừng lại khi hạt rơi vào trạng thái 0 hoặc trạng thái N.

Vì vậy tồn tại vô số phân bố dừng $\mathbf{P}^* = [p_0, p_1, \dots, p_N]$, trong đó

$$p_0 = a, p_N = 1 - a, p_1 = p_2 = \dots = p_{N-1} = 0, \text{ với } 0 \leq a \leq 1. \quad (4.57)$$

Có thể chứng minh được rằng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}^{(n)} = \begin{cases} \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} & \text{nếu } p \neq q, \\ 1 - \frac{i}{N} & \text{nếu } p = q = 1/2. \end{cases}$$

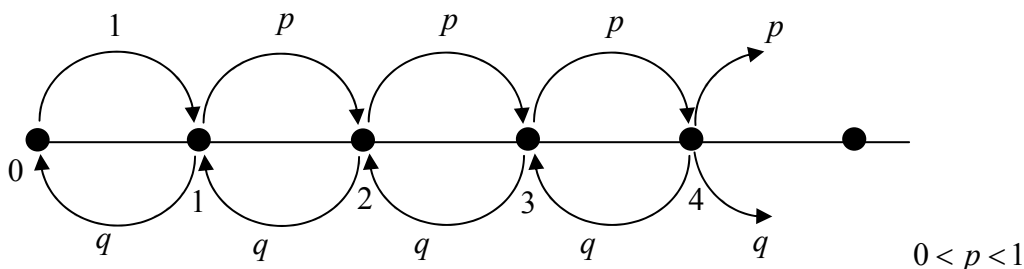
$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{iN}^{(n)} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}^{(n)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, N-1).$$

Vì vậy không tồn tại phân bố giới hạn.

4.4.4 Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có một trạng thái phản hồi

Đó là chuỗi Markov có dạng như hình vẽ



Hình 4.9: Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có một trạng thái phản hồi

Không gian trạng thái $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Chuỗi tối giản, có chu kỳ $d = 2$ do đó không tồn tại phân bố giới hạn.

Ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ 0 & 0 & q & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình xác định phân bố dừng (4.35) có dạng

$$\begin{cases} x_0 = x_1 q \\ x_1 = x_0 + x_2 q \\ x_2 = x_1 p + x_3 q \\ \dots \\ x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} x_0 = x_1 q \\ x_1 = x_1 q + x_2 q \\ x_2 = x_2 q + x_3 q \\ \dots \\ x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \end{cases} \quad (4.58)$$

Từ đó suy ra

$$x_1 = \frac{x_0}{q}, x_j = (p/q)x_{j-1} = \dots = (p/q)^{j-1} x_1, \forall j = 2, 3, \dots \quad (4.59)$$

- Khi $p > q$, hạt có xu hướng đi sang phải, tất cả các trạng thái không hồi quy. Nghiệm (4.59) không thỏa mãn điều kiện $\sum x_i = 1$. Chuỗi không tồn tại phân bố dừng.
- Khi $p = q = 1/2$, tất cả các trạng thái là hồi quy không. Nghiệm (4.59) không thỏa mãn điều kiện $\sum x_i = 1$. Không tồn tại phân bố dừng.
- Khi $p < q$, tất cả các trạng thái là hồi quy dương.

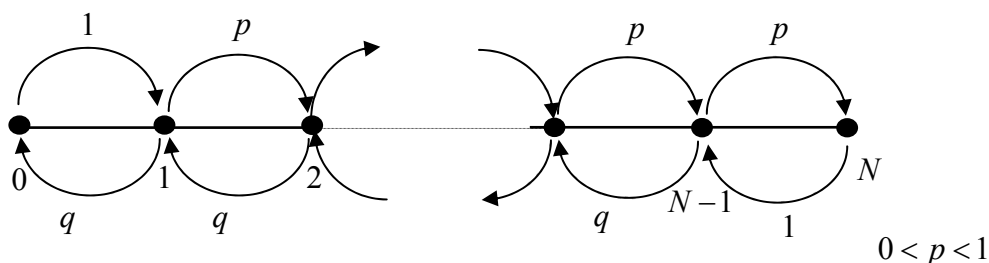
$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = x_0 + \frac{x_0}{q} \sum_{i=0}^{\infty} (p/q)^i = x_0 + \frac{x_0}{q-p} = \frac{2qx_0}{q-p}$$

Do đó chuỗi tồn tại phân bố dừng duy nhất.

$$p_0 = \frac{q-p}{2q}, p_1 = \frac{q-p}{2q^2}, \dots, p_j = \frac{q-p}{2q^2} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}; j \geq 2. \quad (4.60)$$

4.4.5 Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có hai trạng thái phản hồi

Đó là chuỗi Markov có dạng như hình vẽ



Hình 4.10: Di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có hai trạng thái phản hồi

Chuỗi tối giản, không gian trạng thái hữu hạn $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Tất cả các trạng thái của chuỗi là hồi quy dương, có chu kỳ $d = 2$ do đó không tồn tại phân bố giới hạn.

Ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Phân bố dừng là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (4.35)

$$\begin{cases} x_0 = x_1 q \\ x_1 = x_0 + x_2 q \\ x_2 = x_1 p + x_3 q \\ \dots \\ x_{N-1} = x_{N-2} p + x_N \\ x_N = x_{N-1} p \\ x_i \geq 0, \sum_{i=0}^N x_i = 1 \end{cases} \quad (4.61)$$

Từ đó suy ra phân bố dừng

$$p_0 = \frac{1}{1 + (p/q)^{N-1} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{N-1} (p/q)^{j-1}}; p_i = \frac{p_0}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}, 1 \leq i \leq N-1; p_N = p_0 \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1} \quad (4.62)$$

Chuỗi tồn tại phân bố dừng nhưng không tồn tại phân bố giới hạn.

BÀI TẬP

4.1 Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \{0, 1, 2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Biết phân bố ban đầu: $p_0 = P\{X_0 = 0\} = 0,3$; $p_1 = P\{X_0 = 1\} = 0,4$; $p_2 = P\{X_0 = 2\} = 0,3$.

Tính $P\{X_0 = 0, X_1 = 2, X_2 = 1\}$.

4.2 Giả sử $P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$ là một ma trận Markov, (là ma trận thỏa mãn điều kiện $p_{ij} \geq 0$; $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, m$).

Chứng minh rằng P^n cũng là ma trận Markov, với mọi số tự nhiên dương n .

4.3 Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \{0, 1, 2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

- Tính ma trận xác suất chuyển 2 bước.
 - Tính $P\{X_3 = 1 | X_1 = 0\}$; $P\{X_3 = 1 | X_0 = 0\}$.
 - Tìm phân bố dừng.
- 4.4** Xét bài toán truyền một bức điện gồm các tín hiệu 0, 1 thông qua kênh có nhiều trạm và mỗi trạm nhận sai tín hiệu với xác suất không đổi bằng $\alpha \in (0, 1)$. Giả sử X_0 là tín hiệu truyền đi và X_n là tín hiệu nhận được tại trạm n . Cho biết $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ lập thành chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

- Tính $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$.
 - Tính $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} + P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0\}$.
 - Tính $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.
- 4.5** Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \{a, b, c, d\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$$

- Tìm xác suất chuỗi đi theo đường đi: $b-a-b-c-b-a$.

b) Tính xác suất $P\{X_1 = a, X_3 = c, X_4 = b, X_5 = a | X_0 = b\}$.

c) Tính $P^{(5)}$.

d) Tính $P\{X_5 = a | X_0 = b\}$.

e) Tìm $\mathbf{P}(5)$ biết $\mathbf{P}(0) = [0,2 \quad 0,4 \quad 0,3 \quad 0,1]$.

4.6 Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \{0,1\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1.$$

Giả sử phân bố đầu $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0,5$.

a) Vẽ biểu đồ chuyển trạng thái.

b) Tìm phân bố dừng.

c) Tìm phân bố của X_n .

d) Tìm phân bố giới hạn khi $a + b \leq 1$.

4.7 Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế với $s = 0$ và $S = 3$ là các mức căn cứ để nhập hàng cùng với ξ_n là lượng hàng khách yêu cầu trong chu kỳ n . Biết rằng

$$P\{\xi_n = 0\} = 0,4; \quad P\{\xi_n = 1\} = 0,3; \quad P\{\xi_n = 2\} = 0,3 \quad \text{với mọi } n.$$

Xác định ma trận xác suất chuyển của chuỗi Markov $\{X_n\}$, trong đó X_n là số phụ tùng còn lại tại cuối chu kỳ n .

4.8 Hai công ti A và B cung cấp cho thị trường cùng một loại sản phẩm. Hiện tại công ti A chiếm 60% và công ti B chiếm 40% thị phần. Mỗi năm A mất $2/3$ thị phần của mình cho B và B mất $1/2$ thị phần cho A . Tìm tỉ lệ thị phần hai công ti chiếm được sau hai năm.

4.9 Mỗi một người dân của thị trấn N có một trong ba nghề (A, B, C). Con cái họ nối tiếp nghề của cha mình với xác suất tương ứng là $(3/5, 2/3, 1/4)$. Nếu không theo nghề của cha thì chúng chọn một trong hai nghề còn lại với xác suất như nhau. Hãy tìm:

a) Phân bố theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tiếp theo, nếu thế hệ hiện tại có tỉ lệ theo nghề nghiệp là 20% có nghề A , 30% có nghề B và 50% có nghề C .

b) Phân bố giới hạn theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tương lai xa.

4.10 Chứng minh rằng \leftrightarrow là một quan hệ tương đương trong tập các trạng thái.

4.11 Cho chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

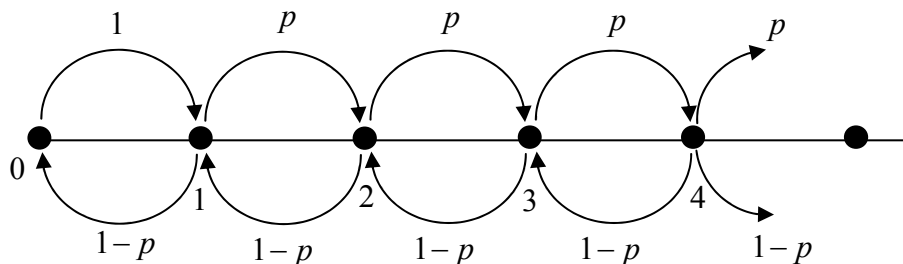
- a) Vẽ biểu đồ chuyển trạng thái.
- b) Tính $P^{(2n)}$, $P^{(2n+1)}$.
- c) Chứng tỏ rằng 0 là trạng thái tuần hoàn có chu kỳ 2.

4.12 Cho chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

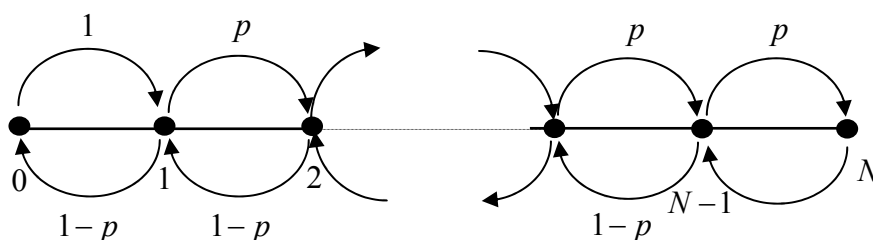
Tìm các lớp liên thông của không gian trạng thái. Vẽ biểu đồ trạng thái và tìm chu kỳ các trạng thái.

4.13 Xét di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có một trạng thái phản hồi có dạng như hình vẽ



Với $p = 0,4$. Tìm phân bố dừng.

4.14 Xét di động ngẫu nhiên trên đường thẳng có hai trạng thái phản hồi có dạng như hình vẽ



Với $N = 10$; $p = 0,6$. Tìm phân bố dừng.

CHƯƠNG V: QUÁ TRÌNH DỪNG

GIỚI THIỆU

Chuỗi Markov, quá trình Poisson nghiên cứu sự tiến triển theo thời gian của các hệ ngẫu nhiên mà trong đó tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ (tính Markov).

Ngoài những quá trình Markov, trong thực tế ta còn gặp các hệ ngẫu nhiên mà quá khứ của nó có ảnh hưởng lớn đến sự tiến triển của quá trình trong tương lai. Đặc biệt với quá trình mà hàm tự tương quan thuần nhất theo thời gian (quá trình dừng theo nghĩa rộng) có rất nhiều ứng dụng trong viễn thông. Các tín hiệu, nhiễu của một hệ thống viễn thông là các quá trình dừng. Khái niệm quá trình dừng được nhà toán học người Nga Khintchine đưa ra lần đầu tiên vào năm 1934. Ngày nay quá trình dừng đã trở thành một trong những lĩnh vực quan trọng và có nhiều ứng dụng của lý thuyết xác suất.

Các khái niệm quá trình dừng được xét trong chương 4. Trong chương này chủ yếu xét quá trình dừng theo nghĩa rộng, đó là quá trình ngẫu nhiên có kỳ vọng không phụ thuộc thời gian và hàm tự tương quan thuần nhất theo thời gian. Các tín hiệu viễn thông và nhiễu là các quá trình dừng. Các quá trình này được ký hiệu bằng chữ in hoa $X(t)$ còn các thể hiện tương ứng ký hiệu bằng chữ thường $x(t)$.

Áp dụng định lý Wiener-Khintchine đối với quá trình dừng biểu diễn các tín hiệu ta có thể tính công suất trung bình của tín hiệu thông qua phổ của quá trình dừng, đó là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan của quá trình.

Từ hàm mẫu ta có thể tính được các giá trị trung bình theo thời gian. Vì vậy trong thực tế ta chỉ có thể tính được trung bình theo giới gian (time average) của một quá trình ngẫu nhiên còn trung bình theo tập hợp (ensemble average) được tính toán thông qua lý thuyết. Do đó khi trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp thì việc nghiên cứu chúng sẽ thuận lợi hơn. Quá trình có trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp được gọi là quá trình ergodic. Chúng ta sẽ chỉ ra những tiêu chuẩn để nhận biết quá trình dừng là quá trình ergodic.

Để học tốt chương này học viên nên xem lại lý thuyết xác suất và phép biến đổi Fourier.

5.1. QUÁ TRÌNH DỪNG

5.1.1. Hàm hiệp phương sai và hàm tự tương quan của quá trình dừng

Giả sử $\{X(t); t \in I\}$ là quá trình dừng với giá trị trung bình m và hàm tự tương quan $K_X(\tau)$, nghĩa là:

- 1) $m(t) = E X(t) = m = \text{const}$,
- 2) *Hàm tự tương quan chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian giữa hai thời điểm*

$$R_{XX}(s-t) = E[X(s)\overline{X(t)}]; \forall s, t \in I. \quad (5.1)$$

Khi đó có thể chứng minh được rằng

$$\text{cov}(X(s), X(t)) = E[(X(s)-m)\overline{(X(t)-m)}] = E[X(s)\overline{X(t)}] - |m|^2 \quad (5.2)$$

cũng chỉ phụ thuộc vào $s-t$, nghĩa là tồn tại hàm ký hiệu $C_X(\tau)$, sao cho

$$C_{XX}(s-t) = \text{cov}(X(s), X(t)); \forall s, t \in I \quad (5.3)$$

$C_{XX}(\tau)$ được gọi là **hàm tự hiệp phương sai** của quá trình dừng $\{X(t); t \in I\}$.

Từ đẳng thức (5.2) ta có thể định nghĩa quá trình dừng theo nghĩa rộng là quá trình thỏa mãn hai điều kiện sau:

1') $m(t) = EX(t) = m = \text{const}$,

2') Hàm tự hiệp phương sai

$$C_{XX}(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t))$$

chỉ phụ thuộc vào $s-t$; $\forall s, t \in I$.

Rõ ràng rằng hai định nghĩa này trùng nhau khi $m(t) = EX(t) = 0, \forall t$.

Chú ý : Hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(s, t)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ cũng là hàm tự tương quan của quá trình quy tâm $\tilde{X}(t) = X(t) - EX(t)$.

Ví dụ 5.1: (a) Nếu $X(t) = Ae^{i\omega t}$ thì

$$R_{XX}(s-t) = E[Ae^{i\omega s}\overline{Ae^{i\omega t}}] = E|A|^2 e^{i\omega(s-t)}; \forall s, t \in I$$

(b) Giả sử các biến ngẫu nhiên A_k không tương quan có kỳ vọng bằng 0 và phương sai σ_k^2 .

Xét $X(t) = \sum_k A_k e^{i\omega_k t}$ thì $m(t) = EX(t) = 0$ và $R_{XX}(s-t) = \sum_k \sigma_k^2 e^{i\omega_k(s-t)}; \forall s, t \in I$.

Hàm tự tương quan có các tính chất sau.

Định lý 5.1:

1) $R_{XX}(-\tau) = \overline{R_{XX}(\tau)}$.

2) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

3) $R_{XX}(0) = E|X(t)|^2 = E|X(0)|^2, \forall t$.

Nếu $X(t)$ là một quá trình tín hiệu ngẫu nhiên thì $R_{XX}(0) = E|X(t)|^2$ được gọi là công suất trung bình của tín hiệu.

Quá trình dừng có một số tính chất khác (Xem Cooper, G.R. và C.D. McGillem (1971): Probabilistic Methods of Signal and Analysis, Holt, Rinchart and Winston, New York) .

4) Nếu $E[X(t)] = m \neq 0$ và $X(t)$ không có thành phần tuần hoàn thì

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = m^2$$

5) Nếu $X(t)$ có một thành phần tuần hoàn thì $R_{XX}(\tau)$ cũng có một thành phần tuần hoàn với cùng chu kỳ.

Ví dụ 5.2: Giả sử $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm trung bình $m(t) = 3$, hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = 9 + 4e^{-0.2\tau}$. Đặt $Z = X(3)$, $T = X(8)$. Tính kỳ vọng, phương sai và hiệp phương sai của Z và T .

Giải: $EZ = ET = 3$. $EZ^2 = ET^2 = R_{XX}(0) = 13 \Rightarrow \text{var } Z = \text{var } T = 13 - 3^2 = 4$.

$$E(ZT) = R_{XX}(8-3) = 9 + 4e^{-1}.$$

Ví dụ 5.3: Quá trình dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$.

Theo tính chất 4) ta có $m^2 = 25 \Rightarrow m = \pm 5$.

$$\text{var}[X(t)] = E[|X|^2(t)] - |E[X(t)]|^2$$

Ta có $E|X(t)|^2 = R_{XX}(0) = 25 + 4 = 29$, do đó $\text{var}[X(t)] = 29 - 25 = 4$.

Ví dụ 5.4: Giả sử A, B là hai biến ngẫu nhiên thoả mãn $E A = E B = 0$, $\text{cov}(A, B) = 0$, $\text{var } A = \text{var } B = \sigma^2$; ω_0 là một hằng số thì quá trình $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = \sigma^2 \cos \omega_0 \tau$.

Giải: $E X(t) = \cos(\omega_0 t) E A + \sin(\omega_0 t) E B = 0$.

$$\begin{aligned} R_{XX}(s, t) &= E[X(s)X(t)] = E[(A \cos(\omega_0 s) + B \sin(\omega_0 s))(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))] \\ &= E[A^2 \cos(\omega_0 s) \cos(\omega_0 t) + B^2 \sin(\omega_0 s) \sin(\omega_0 t) + AB(\cos(\omega_0 s) \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 s) \sin(\omega_0 t))] \\ &= \sigma^2 \cos(\omega_0(t-s)) \Rightarrow R_{XX}(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned}$$

Ví dụ 5.5: Quá trình ngẫu nhiên hình sin: $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, $E A = 0$, $\text{var } A = \sigma^2$, Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0; 2\pi]$, A, Θ độc lập.

Giải: Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0; 2\pi]$ với hàm mật độ

$$f_{\Theta}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{nếu } 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$E[\cos(\omega_0 t + \Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + u) f_{\Theta}(u) du = \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + u) \frac{1}{2\pi} du = 0$$

$$E X(t) = E[A \cos(\omega_0 t + \Theta)] = E[A] E[\cos(\omega_0 t + \Theta)] = 0.$$

$$E[X(s)X(t)] = E[(A \cos(\omega_0 s + \Theta))(A \cos(\omega_0 t + \Theta))] \\ = E[A^2 (\cos(\omega_0 s + \Theta))(\cos(\omega_0 t + \Theta))] = E[A^2] E[(\cos(\omega_0 s + \Theta))(\cos(\omega_0 t + \Theta))]$$

$$E[A^2] = \text{var } A = \sigma^2;$$

$$E[(\cos(\omega_0 s + \Theta))(\cos(\omega_0 t + \Theta))] \\ = E\left[\frac{1}{2}\{\cos(\omega_0(s+t) + 2\Theta)\} + \frac{1}{2}\{\cos \omega_0(s-t)\}\right] = \frac{1}{2} \cos \omega_0(s-t)$$

Do đó quá trình ngẫu nhiên hình sin là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2} \sigma^2 \cos \omega_0 \tau$.

Ví dụ 5.6: (Quá trình Wiener) *Quá trình* $W(t)$, $t \geq 0$ được gọi là một quá trình Wiener với tham số σ^2 nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

1) $W(0) = 0$.

2) Với mọi $0 \leq s < t$ thì $W(t) - W(s)$ là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathbf{N}(0; \sigma^2(t-s))$.

3) $W(t)$, $t \geq 0$ là quá trình với gia số độc lập, tức là với mọi $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n$ thì các biến ngẫu nhiên: $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ là độc lập.

Như vậy $W(t)$, $t \geq 0$ là một quá trình có: $m(t) = E W(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

$\forall t, s \geq 0$, giả sử $s \leq t$:

$$R_{WW}(s, t) = E[W(s)W(t)] = E[W(s)(W(s) + W(t) - W(s))] \\ = E[W(s)]^2 + E[(W(s) - W(0))(W(t) - W(s))] \\ = \sigma^2 s + E[W(s) - W(0)] E[W(t) - W(s)] = \sigma^2 s. \quad (\text{do gia số độc lập và } E W(s) = 0)$$

Do đó $R_{WW}(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$.

Vậy quá trình Wiener là một quá trình gia số độc lập dừng và không phải là quá trình dừng.

Ví dụ 5.7: Xét quá trình ngẫu nhiên phức $X(t)$ là tổng của N tín hiệu phức:

$$X(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega_0 t + i\Theta_n}$$

trong đó $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (hằng số) là tần số của mỗi tín hiệu. A_n là biến ngẫu nhiên biểu diễn biên độ và Θ_n là biến ngẫu nhiên pha của tín hiệu thứ n . Giả sử các biến ngẫu nhiên A_n, Θ_n độc lập và Θ_n có phân bố đều trên khoảng $(0; 2\pi)$. Tìm hàm tự tương quan của quá trình.

Giải: $R_{XX}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\overline{X(t)}] = E\left[\sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega_0(t+\tau)+i\Theta_n} \overline{\sum_{m=1}^N A_m e^{i\omega_0 t + i\Theta_m}}\right]$

$$= E\left[\sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega_0(t+\tau)+i\Theta_n} \sum_{m=1}^N A_m e^{-i\omega_0 t - i\Theta_m}\right] = e^{i\omega_0 \tau} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E[A_n A_m e^{i(\Theta_n - \Theta_m)}] = R_{XX}(\tau)$$

Lại có, $E[e^{i(\Theta_n - \Theta_m)}] = E[\cos(\Theta_n - \Theta_m)] + i E[\sin(\Theta_n - \Theta_m)]$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} [\cos(\theta_n - \theta_m) + i \sin(\theta_n - \theta_m)] d\theta_n d\theta_m = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Vậy $R_{XX}(\tau) = e^{i\omega_0 \tau} \sum_{n=1}^N E|A_n|^2$.

5.1.2. Hàm tương quan chéo và các tính chất

Hàm tương quan chéo của hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ được định nghĩa và ký hiệu

$$R_{XY}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\overline{Y(t)}].$$

Nếu hai quá trình dừng $X(t)$ và $Y(t)$ có hàm tương quan chéo $R_{XY}(t+\tau, t)$ chỉ phụ thuộc τ thì được gọi là hai quá trình dừng đồng thời và hàm tương quan chéo sẽ là

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)\overline{Y(t)}]$$

Hai quá trình $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là trực giao nhau nếu

$$R_{XY}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\overline{Y(t)}] = 0; \text{ với mọi } t, \text{ với mọi } \tau \neq 0.$$

Hai quá trình $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là không tương quan nếu

$$C_{XY}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\overline{Y(t)}] - m(t+\tau)\overline{m(t)} = 0; \text{ với mọi } t \text{ và với mọi } \tau \neq 0.$$

Hàm tương quan chéo của hai quá trình dừng đồng thời có các tính chất

- 1) $R_{XY}(-\tau) = \overline{R_{YX}(\tau)}$.
- 2) $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$
- 3) $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{R_{XX}(0) + R_{YY}(0)}{2}$.

Ví dụ 5.8: Xét hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) ; Y(t) = B \cos(\omega_0 t) - A \sin(\omega_0 t)$$

trong đó A, B là hai biến ngẫu nhiên và ω_0 là hằng số. Theo ví dụ 5.3, nếu $E A = E B = 0$, $\text{cov}(A, B) = 0$, $\text{var } A = \text{var } B = \sigma^2$ thì $X(t)$ và $Y(t)$ là hai quá trình dừng.

Hàm tương quan chéo

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E \left[X(t) \overline{Y(t + \tau)} \right] = E \left[AB \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) + B^2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) \right] \\ &\quad - E \left[A^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau) + AB \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau) \right] \\ &= E [AB] \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) + E [B^2] \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) - E [A^2] \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau) \end{aligned}$$

$R_{XY}(t, t + \tau) = -\sigma^2 \sin(\omega_0 \tau)$ chỉ phụ thuộc τ , do đó $X(t)$ và $Y(t)$ là hai quá trình dừng đồng thời.

5.1.3. Đặc trưng phổ của quá trình dừng

Có thể sử dụng cả hai phương pháp phân tích theo miền thời gian và theo miền tần số để phân tích các hệ thống tuyến tính tín hiệu tắt nhiên.

Các tính chất phổ của tín hiệu tắt nhiên $x(t)$ nhận được từ biến đổi Fourier

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t f} x(t) dt$$

Hàm $\widehat{X}(f)$ đôi khi được gọi một cách đơn giản là phổ của $x(t)$, có đơn vị volt/hertz.

Nếu biết phổ $\widehat{X}(f)$ thì có thể khôi phục tín hiệu thông qua phép biến đổi Fourier ngược

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \widehat{X}(f) \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t f} \widehat{X}(f) df$$

Một cách tự nhiên ta cũng tìm cách sử dụng hai phương pháp này cho trường hợp tín hiệu ngẫu nhiên.

Biểu diễn phổ của tín hiệu tắt nhiên nhận được từ biến đổi Fourier của tín hiệu đó. Mặc dù phép biến đổi Fourier cũng có vai trò rất quan trọng trong việc đặc trưng phổ của các tín hiệu ngẫu nhiên. Tuy nhiên không thể tính trực tiếp biến đổi Fourier các tín hiệu ngẫu nhiên,

vì phép biến đổi có thể không tồn tại đối với hầu hết các hàm mẫu của quá trình. Vì vậy phân tích phổ của các quá trình ngẫu nhiên đòi hỏi tỉ mỉ hơn phân tích các tín hiệu tất nhiên.

Mặt khác ta có thể biểu diễn công suất của quá trình ngẫu nhiên dưới dạng hàm theo tần số (thay vì theo hiệu điện thế), biểu diễn như thế tồn tại. Trong mục này ta xét đến các hàm đó và gọi là mật độ phổ công suất.

A. Mật độ phổ công suất

Cho quá trình $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ biểu diễn các tín hiệu.

$$\text{Với mỗi } T > 0 \text{ xét: } X_T(t) = \begin{cases} X(t) & \text{nếu } |t| < T \\ 0 & \text{nếu } |t| \geq T \end{cases}$$

Đặt biến đổi Fourier của $X_T(t)$ là $\widehat{X}_T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\}$

$$\widehat{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^T X(t)e^{-i2\pi ft} dt.$$

$X_T(t)$ và $\widehat{X}_T(f)$ cũng là hai quá trình ngẫu nhiên.

$$\text{Áp dụng đẳng thức Parseval ta có: } \mathcal{E}_T = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{X}_T(f)|^2 df.$$

\mathcal{E}_T cũng là một quá trình ngẫu nhiên. Áp dụng định lý năng lượng Rayleigh ta được

$$E \mathcal{E}_T = E \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} E |X_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} E |\widehat{X}_T(f)|^2 df.$$

Từ đó ta có tính công suất trung bình của quá trình

$$\begin{aligned} P_{XX} &= A \left[E |X(t)|^2 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E |X(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} E |X_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E |\widehat{X}_T(f)|^2 df \end{aligned}$$

trong đó kí hiệu và định nghĩa

$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$$

là trung bình theo thời gian.

\Rightarrow **Mật độ phổ công suất của quá trình**, viết tắt **PSD** (Power Spectral Density), là

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E |\widehat{X}_T(f)|^2. \quad (5.4)$$

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{XX}(f) df.$$

Trường hợp quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ là quá trình dừng thì $E|X(t)|^2 = \overline{X}^2 = \text{const}$, do đó

$$P_{XX} = A \left[E|X(t)|^2 \right] = \overline{X}^2.$$

Ví dụ 5.9: Xét quá trình ngẫu nhiên

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta),$$

trong đó A và f_0 là hai hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên khoảng $(0; \pi/2)$.

Ta tính trực tiếp công suất trung bình của tín hiệu:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E[A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \Theta)] = E\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\Theta)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) d\theta = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi} \sin(4\pi f_0 t) \\ P_{XX} &= A \left[E(X^2(t)) \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi} \sin(4\pi f_0 t) \right] dt = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

Cũng có thể tính qua mật độ phổ công suất như sau:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_T(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_0 t + \Theta) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{2} e^{i\Theta} \int_{-T}^T e^{2\pi i(f_0 - f)t} dt + \frac{A}{2} e^{-i\Theta} \int_{-T}^T e^{-2\pi i(f_0 + f)t} dt \\ &= AT e^{i\Theta} \frac{\sin 2\pi(f - f_0)T}{2\pi(f - f_0)T} + AT e^{-i\Theta} \frac{\sin 2\pi(f + f_0)T}{2\pi(f + f_0)T} \\ \left| \widehat{X}_T(f) \right|^2 &= A^2 T^2 \left[\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos 2\Theta \right], \quad \alpha = \frac{\sin 2\pi(f - f_0)T}{2\pi(f - f_0)T}; \quad \beta = \frac{\sin 2\pi(f + f_0)T}{2\pi(f + f_0)T} \end{aligned}$$

Vì $E[\cos 2\Theta] = 0$, do đó

$$\frac{1}{2T} E \left| \widehat{X}_T(f) \right|^2 = \frac{A^2 \pi}{2} \left[\frac{T}{\pi} \left(\frac{\sin 2\pi(f - f_0)T}{2\pi(f - f_0)T} \right)^2 + \frac{T}{\pi} \left(\frac{\sin 2\pi(f + f_0)T}{2\pi(f + f_0)T} \right)^2 \right]$$

Sử dụng kết quả (Lathi, 1968: An Introduction to Random Signals and Communication Theory, International Textbook, Scranion, Pennsylvania. p.24)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\pi} \left[\frac{\sin aT}{aT} \right]^2 = \delta(a).$$

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left| \widehat{X}_T(f) \right|^2 = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta 2\pi(f - f_0) + \delta 2\pi(f + f_0)]$$

Vậy
$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{XX}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 \pi}{2} [\delta 2\pi(f - f_0) + \delta 2\pi(f + f_0)] df = \frac{A^2}{2}.$$

Tính chất mật độ phổ công suất

1. $\mathcal{P}_{XX}(f)$ là hàm thực
2. $\mathcal{P}_{XX}(-f) = \mathcal{P}_{XX}(f)$ nếu $X(t)$ là quá trình thực
3. $\mathcal{P}_{XX}(f) \geq 0$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{XX}(f) df = A \left[E |X(t)|^2 \right]$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{XX}(f) e^{i2\pi f \tau} df = A [R_{XX}(t + \tau, t)];$$

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A [R_{XX}(t + \tau, t)] e^{-i2\pi f \tau} d\tau.$$

6. Đặc biệt nếu $X(t)$ là quá trình dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)$ thì

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f \tau} \mathcal{P}_{XX}(f) df \quad \text{và} \quad \mathcal{P}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f \tau} R_{XX}(\tau) d\tau.$$

Định nghĩa 5.1: Giả sử $\{X(t); t \in I\}$ quá trình dừng với hàm tự tương quan R_{XX} . Nếu tồn tại $\mathcal{P}_{XX}(f)$ sao cho:

$$R_{XX}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f} \mathcal{P}_{XX}(f) df \quad \text{khi } I = \mathbb{Z} \tag{5.5}$$

hoặc

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f \tau} \mathcal{P}_{XX}(f) df \quad \text{khi } I = \mathbb{R} \tag{5.6}$$

thì $\mathcal{P}_{XX}(f)$ được gọi là **mật độ phổ** của quá trình dừng $\{X(t); t \in I\}$.

Định lý 5.2: 1) Trường hợp thời gian rời rạc $I = \mathbb{Z}$: Nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_{XX}(n)| < \infty$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f} R_{XX}(n). \quad (5.7)$$

2) Trường hợp thời gian liên tục $I = \mathbb{R}$: Nếu $R_{XX}(\tau)$ khả tích tuyệt đối trên \mathbb{R} thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f \tau} R_{XX}(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Như vậy hàm mật độ phổ là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan và hàm tự tương quan là biến đổi Fourier ngược của mật độ phổ.

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\}, \quad R_{XX}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_{XX}(f)\}. \quad (5.9)$$

Định lý 5.3: (Định lý Wiener - Khintchine) Mật độ phổ công suất PSD của quá trình dừng $\{X(t); t \in I\}$ có giá trị trung bình $E X(t) = 0$ bằng mật độ phổ của quá trình này và bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan:

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left| \widehat{X}_T(f) \right|^2 \quad \text{và ta có } P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{XX}(f) df \quad (5.10)$$

Nhận xét: Định lý 5.3 cho ta ý nghĩa của khái niệm mật độ phổ của quá trình dừng, đó là mật độ phổ công suất của quá trình. Như vậy ta có thể tính mật độ phổ của một quá trình dừng theo 2 công thức khác nhau (5.7)-(5.8) hoặc (5.9). Tuy nhiên tồn tại quá trình ngẫu nhiên không dừng (không có mật độ phổ) nhưng có mật độ phổ công suất.

Ví dụ 5.10: Xét quá trình tín hiệu cực với dữ liệu nhị phân $X(t)$

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n y(t - nT_b), \quad (5.11)$$

trong đó $y(t)$ là xung mẫu $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < T_b/2 \\ 0 & \text{nếu } |t| > T_b/2, \end{cases}$ T_b là chu kỳ 1 bit.

$\{A_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập biểu diễn các dữ liệu nhị phân. Các biến ngẫu nhiên A_n có phân bố rời rạc nhận hai giá trị ± 1 đồng khả năng.

$$\text{Vậy } P\{A_n = 1\} = P\{A_n = -1\} = 1/2; \quad E[A_n] = 0; \quad \text{var}[A_n] = E[A_n^2] = 1^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1;$$

$$\text{cov}[A_n, A_m] = E[A_n A_m] - E[A_n]E[A_m] = 0.$$

Đặt $T = (2N + 1)T_b$ thì quá trình $X_T(t)$ của quá trình (5.7) sẽ là

$$X_T(t) = \sum_{n=-N}^N A_n y(t - nT_b)$$

$$\widehat{X}_T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\} = \sum_{n=-N}^N A_n \mathcal{F}\{y(t-nT_b)\} = \sum_{n=-N}^N A_n Y(f) e^{-i\omega n T_b} = Y(f) \sum_{n=-N}^N A_n e^{-i\omega n T_b}$$

Trong đó $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = T_b \text{sinc}(T_b f)$ (ví dụ 2.37 chương II)

$$\begin{aligned} \Rightarrow E\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 &= E\left[|Y(f)|^2 \sum_{n,m=-N}^N A_n \overline{A_m} e^{-i\omega(n-m)T_b}\right] \\ &= |Y(f)|^2 \sum_{n,m=-N}^N E[A_n \overline{A_m}] e^{-i\omega(n-m)T_b} = |Y(f)|^2 \sum_{n=-N}^N 1 = |Y(f)|^2 (2N+1). \end{aligned}$$

Vậy mật độ phổ công suất PSD

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Y(f)|^2 (2N+1)}{(2N+1)T_b} = \frac{|Y(f)|^2}{T_b} = T_b \text{sinc}^2(T_b f).$$

$$\begin{aligned} \text{Tuy nhiên } E[X(t)X(t+\tau)] &= E\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n y(t-nT_b)\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m y(t+\tau-mT_b)\right)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[A_n A_m] y(t-nT_b) y(t+\tau-mT_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nT_b) y(t+\tau-mT_b) \end{aligned}$$

$$\text{trong đó } y(t-nT_b)y(t+\tau-mT_b) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t-nT_b| < T_b/2 \text{ và } |t+\tau-mT_b| < T_b/2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ $E[X(t)X(t+\tau)]$ còn phụ thuộc vào thời điểm t nên quá trình $X(t)$ không dừng.

Ví dụ 5.11: (Sóng ngẫu nhiên nhị phân) Xét quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ gồm các bit 1 và các bit 0 thỏa mãn các điều kiện sau:

1) Bit 1 và 0 lần lượt được biểu diễn bởi các xung chữ nhật với biên độ $+A$ và $-A$ volt với độ rộng của xung là T giây.

2) Các hàm mẫu (sample functions) là không đồng bộ và giả thiết rằng thời điểm xuất phát của xung thứ nhất t_d xảy ra đồng khả năng trong khoảng từ 0 đến T . Điều này có nghĩa là t_d là giá trị mẫu của biến ngẫu nhiên T_d có phân bố đều trong đoạn $[0; T]$.

3) Trong khoảng thời gian xung bất kỳ $(n-1)T < t - t_d < nT$, hai bit 1 và 0 là đồng khả năng xuất hiện, nghĩa là $X(t)$ nhận giá trị $+A$ hoặc $-A$ trong suốt khoảng xung này với xác suất $1/2$. $X(t)$ và $X(s)$ là độc lập nếu t, s ở trong khoảng xung thời gian khác nhau.

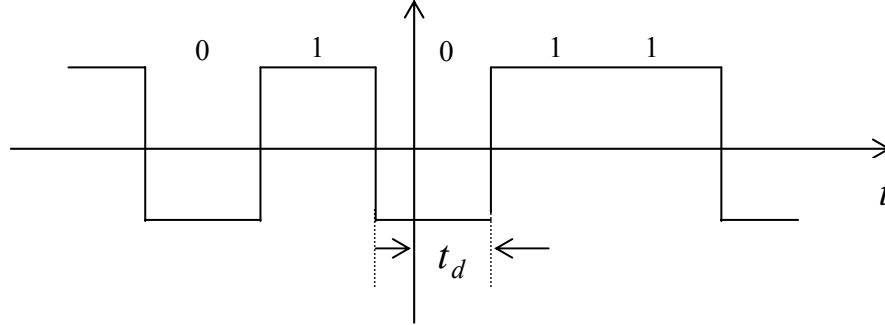
$$\text{Ta có: } \forall t; E X(t) = A \times 1/2 + (-A) \times 1/2 = 0.$$

$$\text{Hàm tự tương quan: } R_{XX}(t_k, t_i) = E[X(t_k), X(t_i)].$$

* Nếu $|t_k - t_i| > T$ thì $X(t_k), X(t_i)$ độc lập

$$\Rightarrow r_x(t_k, t_i) = E[X(t_k), X(t_i)] = 0.$$

* Nếu $|t_k - t_i| < T$ và giả sử rằng $X(t_k), X(t_i)$ cùng có trễ là t_d thì $X(t_k), X(t_i)$ cùng xung khi và chỉ khi $|t_k - t_i| < T - t_d$.



$$\text{Vậy } E[X(t_k), X(t_i) | t_d] = \begin{cases} A^2 & \text{nếu } t_d < T - |t_k - t_i| \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$E[X(t_k), X(t_i)] = \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d = \int_0^{T-|t_k-t_i|} \frac{A^2}{T} dt_d = A^2 \left(1 - \frac{|t_k - t_i|}{T}\right).$$

$$\text{Đặt } \tau = t_k - t \Rightarrow \text{Hàm tự tương quan } R_{XX}(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \text{nếu } |\tau| < T \\ 0 & \text{nếu } |\tau| \geq T. \end{cases}$$

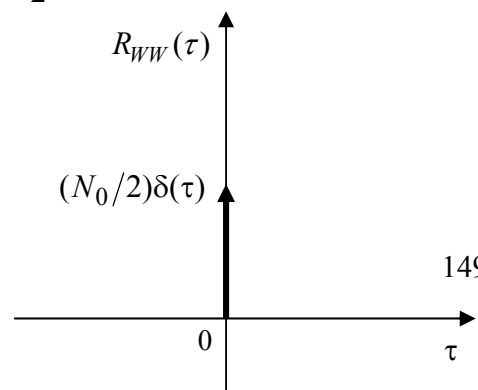
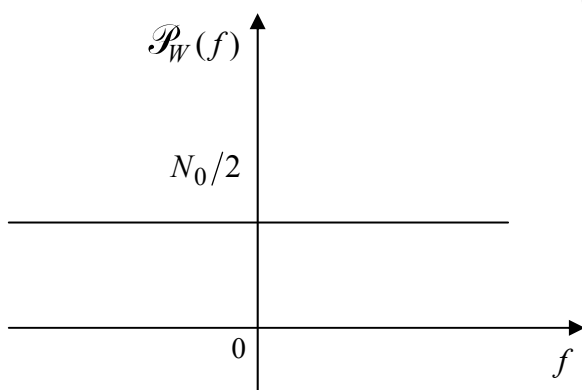
Mật độ phổ công suất

$$\mathcal{P}_{XX}(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-T}^T A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = A^2 T \text{sinc}^2(fT).$$

Ví dụ 5.12: Nhiều trắng (White Noise) được mô tả như là một quá trình dừng (theo nghĩa rộng) mà mật độ phổ công suất là một hằng số $\mathcal{P}_W(f) = \frac{N_0}{2}$.

Hệ số 1/2 để chỉ một nửa công suất ứng với tần số dương và một nửa ứng với tần số âm. N_0 có đơn vị watt/hertz. Hàm tự tương quan

$$R_{WW}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\right\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$



Quá trình nhiễu trắng không phải là một quá trình vật lý có thực vì có công suất bằng ∞ . Trong quang học, mật độ phổ năng lượng của ánh sáng trắng là không đổi $\mathcal{P}(\nu) =$ hằng số với mọi tần số ν (Năng lượng ánh sáng trắng phân bố đều theo mọi tần số ν). Vì vậy nhiễu với mật độ phổ hằng số được gọi là nhiễu trắng.

5.2 QUÁ TRÌNH DỪNG ERGODIC

Trung bình theo thời gian được định nghĩa như sau

$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$$

Trung bình theo thời gian được lấy qua mọi thời điểm, vì vậy trung bình theo thời gian của một quá trình ngẫu nhiên được lấy theo các hàm mẫu phụ thuộc thời gian.

Đối với quá trình dừng $X(t)$ ta quan tâm trung bình theo thời gian của hàm mẫu và tự tương quan theo thời gian của hàm mẫu $x(t)$

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$R_{XX}(\tau) = A[x(t+\tau)x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

Trong nhiều bài toán về quá trình ngẫu nhiên đòi hỏi phải tính các giá trị trung bình của quá trình theo tập hợp. Tuy nhiên trong thực tế ta chỉ nhận được các hàm mẫu của quá trình do đó ta chỉ có thể tính được trung bình theo thời gian. Ta có thể lấy trung bình theo thời gian thay cho trung bình theo tập hợp hay không?

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian ở các cấp trùng với trung bình theo tập hợp cùng cấp tương ứng. Giả thiết này đáng tiếc là không phải luôn đúng như một số các nhà kỹ thuật đầu thế kỷ 20 tin tưởng. Khoảng năm 1931 hai nhà toán học G. D. Birkhoff (Mỹ) và A. Ia. Khintchine (Nga) đã chứng minh rằng trung bình theo thời gian luôn luôn tồn tại và đã chỉ ra các điều kiện để nó trùng với trung bình tập hợp.

Các định lý sau chỉ ra các điều kiện quá trình dừng là quá trình ergodic.

Định lý 5.4: Quá trình dừng thời gian rời rạc $\{X(n); n \geq 0\}$ với hàm tự tương quan $R_{XX}(n)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n R_{XX}(m) = 0. \quad (5.12)$$

Định lý 5.5: Quá trình dừng $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_{XX}(t-s) dt ds = 0. \quad (5.13)$$

Định lý 5.6: Quá trình dừng $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) R_{XX}(t) dt = 0. \quad (5.14)$$

Hệ quả: Nếu $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$ thì quá trình $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ là ergodic.

Ví dụ 5.13: Xét quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$. Trong đó A, ω_0 là hai hằng số. Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0; 2\pi]$ với hàm mật độ

$$f_{\Theta}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{nếu } 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$E[X(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \Theta)] = A \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + u) f_{\Theta}(u) du = A \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + u) \frac{1}{2\pi} du = 0$$

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[A \cos(\omega_0 t + \Theta) A \cos(\omega_0(t + \tau) + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0(2t + \tau) + 2\Theta) + \cos \tau] \\ &= \frac{A^2}{2} (E[\cos(\omega_0(2t + \tau) + 2\Theta)] + E[\cos \tau]) = \frac{A^2}{2} \cos \tau \end{aligned}$$

Như vậy $\{X(t)\}$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \tau$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \frac{A^2}{2} \cos \tau d\tau &= \frac{A^2}{2T} \left(\sin \tau \Big|_0^T - \frac{1}{T} \left(\tau \sin \tau \Big|_0^T + \cos \tau \Big|_0^T \right) \right) \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(\sin T - \sin 0 + \frac{1 - \cos T}{T} \right) \rightarrow 0 \quad \text{khi } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Theo định lý 5.6 $\{X(t)\}$ là một quá trình dừng thỏa mãn điều kiện (5.14) do đó là một quá trình ergodic.

Ta cũng có thể kiểm chứng điều này bằng cách tính trực tiếp như sau: Vì quá trình tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ nên trung bình theo thời gian

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cos(\omega_0 t + \theta) dt = \frac{1}{T_0} \left(A \frac{\sin(\omega_0 t + \theta)}{\omega_0} \Big|_0^{T_0} \right) = 0 = E[X(t)]$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \frac{A^2}{2} = R_{XX}(0) = E[X^2(t)].$$

5.3 BỘ LỌC TUYẾN TÍNH

Giả sử $X(t)$ là một quá trình dừng và $h(t)$ là hàm khả tích tuyệt đối. Ta xác định quá trình mới $\mathcal{L}\{X(t)\}$

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)ds = h(t) * X(t) \quad (5.15)$$

được gọi là bộ lọc tuyến tính với **đáp ứng xung** $h(t)$ (impulse response).

Hàm $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ được gọi là **hàm truyền đạt** (transfer function) của bộ lọc.

Trường hợp quá trình với thời gian rời rạc $\{X(n); n \geq 0\}$ và đáp ứng xung là dãy $\{h(n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ thì đầu ra có dạng

$$\mathcal{L}\{X(n)\} = Y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)X(m);$$

$$\text{Hàm truyền đạt } H(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i2\pi mf}.$$

Định lý 5.7: Đầu ra $Y(t)$ của bộ lọc tuyến tính (5.11) cũng là quá trình dừng với hàm tự tương quan

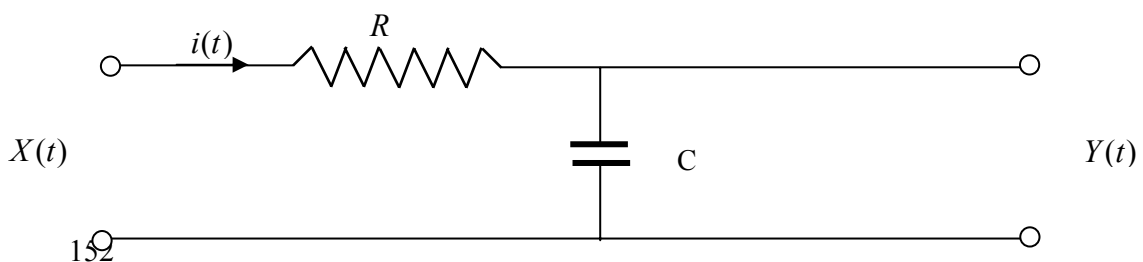
$$R_{YY}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_{XX}(\tau) \quad (5.16)$$

và mật độ phổ

$$\mathcal{P}_Y(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_X(f) \quad (5.17)$$

Ví dụ 5.14: Lọc thông thấp (RC low - pass filter). Xét mạch điện như hình vẽ, trong đó điện trở thuần R , tụ điện có điện dung C ; điện áp đầu vào $X(t)$, điện áp đầu ra $Y(t)$.

$$\text{Áp dụng định luật Kirchoff ta được } RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$



Trường hợp $x(t)$ là tất định (deterministic): $y(t) = h(t) * x(t)$, bằng cách áp dụng phép biến đổi Fourier ta tính được

$$h(t) = \begin{cases} (1/RC)e^{-t/RC} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

$$H(f) = \hat{Y}(f)/\hat{X}(f) = \frac{1}{1+i(2\pi RC)f}$$

Do đó nếu $X(t)$ là quá trình dừng, theo công thức (5.17) ta được mật độ phổ của đầu ra của lọc thông thấp

$$\mathcal{P}_Y(f) = \frac{1}{1+4\pi^2 R^2 C^2 f^2} \mathcal{P}_X(f)$$

Nếu đầu vào $W(t)$ là nhiễu trắng với hàm mật độ phổ công suất $\mathcal{P}_W(f) = \frac{N_0}{2}$ thì đầu ra $\mathcal{P}_Y(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_X(f) = \frac{N_0/2}{1+4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$.

Sử dụng biến đổi Fourier ngược ta có

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{N_0/2}{1+4\pi^2 R^2 C^2 f^2} \right\} = \frac{N_0}{4RC} e^{-|\tau|/RC}$$

Công suất trung bình $P_Y = E[y^2(t)] = R_{YY}(0) = \frac{N_0}{4RC}$.

5.4 QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN GAUSS

Định nghĩa 5.5. Quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}$ gọi là quá trình Gauss nếu với mọi N và mọi t_1, t_2, \dots, t_N

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N))$$

là véc tơ ngẫu nhiên có phân bố Gauss N chiều.

Như vậy hàm mật độ của $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N))$ có dạng

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det C}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})C^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^t} \quad (5.18)$$

trong đó $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$, $m_i = E[X(t_i)]$; ma trận vuông hiệp phương sai $C = [C_{ij}]_{N \times N}$; $C_{ij} = \text{cov}[X(t_i), X(t_j)]$.

Quá trình Gauss là quá trình dừng nếu

$$m_i = E[x(t_i)] = m = \text{hằng số và } C_{ij} + |m|^2 = R_{XX}(t_i - t_j). \quad (5.19)$$

Ngoài ra, nếu $X(t_i), X(t_j); \forall i \neq j$ không tương quan, nghĩa là

$$E[X(t_i)\overline{X(t_j)}] = E[X(t_i)]E[\overline{X(t_j)}]$$

thì ma trận hiệp phương sai có dạng

$$C = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

trong đó $\sigma^2 = R_{XX}(0) = \text{cov}[X(t_i), X(t_i)]$.

Quá trình Gauss có các tính chất sau:

1) f_X chỉ phụ thuộc vào ma trận M và vector m , vì vậy véc tơ ngẫu nhiên Gauss chỉ phụ thuộc vào các moment cấp 1 và cấp 2.

2) $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N))$ là véc tơ ngẫu nhiên có phân bố Gauss N chiều, do đó các biến ngẫu nhiên thành phần $X(t_i)$ cũng có phân bố Gauss.

3) Các biến ngẫu nhiên thành phần $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ độc lập khi và chỉ khi không tương quan. Điều này xảy ra khi ma trận hiệp phương sai C là ma trận đường chéo dạng (5.20).

4) Hàm mật độ đồng thời của quá trình Gauss (công thức 5.18) chỉ phụ thuộc giá trị trung bình và hiệp phương sai. Vì vậy quá trình Gauss dừng theo nghĩa rộng khi và chỉ khi dừng theo nghĩa chặt (Xem Chanmugan & Breipohlt, 1988, trang 141).

5) Nếu $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N))$ là một véc tơ ngẫu nhiên Gauss thì $(Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_N))$ cũng là một véc tơ ngẫu nhiên Gauss, với

$$[Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_N)] = A[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)]^t$$

trong đó A là một ma trận vuông cấp N bất kỳ.

Từ tính chất 5) người ta có thể chứng minh được kết quả rộng hơn như sau.

Định lý 5.8: Đầu ra của một quá trình Gauss qua lọc tuyến tính là một quá trình Gauss. Nghĩa là nếu $X(t)$ là quá trình Gauss thì

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)X(\lambda)d\lambda$$

cũng là một quá trình Gauss.

Ví dụ sau minh họa tính chất 4)

Ví dụ 5.15: Giả sử $X(t)$ là quá trình Gauss dừng với hàm trung bình $m(t) = 4$ và hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = 25e^{-3|\tau|}$. Ta có thể tìm được hàm mật độ đồng thời của ba biến ngẫu nhiên $X(t_k)$, $k = 1, 2, 3$ tại các thời điểm $t_k = t_0 + \frac{k-1}{2}$, với t_0 là hằng số.

$$\text{Vì } t_k - t_i = \frac{k-i}{2}, \quad i \text{ và } k = 1, 2, 3.$$

$$\text{Vậy } R_{XX}(t_k - t_i) = 25e^{-3|t_k - t_i|/2}$$

$$\text{và } C_{XX}(t_k - t_i) = 25e^{-3|t_k - t_i|/2} - 16.$$

Do đó ma trận hiệp phương sai của ba biến ngẫu nhiên $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$

$$C = \begin{bmatrix} (25-16) & (25e^{-3/2} - 16) & (25e^{-6/2} - 16) \\ (25e^{-3/2} - 16) & (25-16) & (25e^{-3/2} - 16) \\ (25e^{-6/2} - 16) & (25e^{-3/2} - 16) & (25-16) \end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP

5.1 Cho $\{X(t)\}_{t \in I}$ là một quá trình dừng với hàm trung bình $E X(t) = m, \forall t$. Chứng minh rằng $\{Y(t)\}_{t \in I}$, $Y(t) = X(t) - m$ là quá trình dừng có hàm trung bình $E Y(t) = 0, \forall t$ và hàm tự tương quan $R_{YY} = R_{XX}$.

5.2 Cho $\{X(t)\}_{t \in I}$ là một quá trình cấp 2 có tính chất $E X(s)$ và $E X(s)X(s+t)$ không phụ thuộc vào s . Chứng minh rằng $\{X(t)\}_{t \in I}$ là quá trình dừng.

5.3 Cho $\{X(t)\}_{t \in I}$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)$. Chứng minh rằng $\{Y(t)\}_{t \in I}$, $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ cũng là quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.

5.4 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, A_0, ω_0 là hai hằng số. Chứng minh rằng $X(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta)$ là một quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan. Quá trình $X(t)$ có phải là quá trình ergodic?

5.5 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, R là biến ngẫu

$$\text{nhiên liên tục có hàm mật độ } f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, & \text{nếu } 0 < r < \infty. \\ 0, & \text{nếu } r \leq 0 \end{cases}.$$

Giả sử Θ và R độc lập, $\lambda > 0$. Chứng minh rằng $X(t) = R \cos(\lambda t + \Theta)$ là một quá trình dừng với trung bình 0 và hàm tự tương quan $R_{XX}(t) = \sigma^2 \cos \lambda t$.

- 5.6** Cho A là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathbf{N}(0; \sigma^2)$. Đặt $X(t) = A \cos(10\pi t)$. Tìm hàm mật độ xác suất của $X(t)$. Quá trình $\{X(t)\}_{t \in I}$ có phải là quá trình dừng không?
- 5.7** Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1 = -1\} = P\{Z_1 = 1\} = \frac{1}{2}$. Đặt $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$, λ là hằng số. Chứng minh $\{X(t)\}_{t \in I}$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.
- 5.8** Cho quá trình dừng $\{X(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ có trung bình $E X(n) = 2$ và hàm tự tương quan $R_{XX}(n) = \frac{1}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^{|n|}$. Tìm mật độ phổ.
- 5.9** Cho $W(t)$ là quá trình Wiener với tham số σ^2 . Đặt $X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t})$, $\alpha > 0$ là hằng số. Chứng minh rằng $x(t)$ là quá trình Gauss dừng với hàm tự tương quan $R_{XX}(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$, $-\infty < t < \infty$. Tìm mật độ phổ.
- 5.10** Cho quá trình dừng ergodic $X(t)$ có mật độ phổ $\mathcal{P}_X(f) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} (B - |f|), & \text{nếu } |f| \leq B \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$.

Tìm hàm tự tương quan.

CHƯƠNG VI: QUÁ TRÌNH POISSON

GIỚI THIỆU

Quá trình Poisson là dạng đặc biệt của quá trình Markov với thời gian liên tục. Quá trình Poisson $X(t)$ mô tả quá trình đếm số lần xuất hiện một biến cố A nào đó cho đến thời điểm t . Quá trình Poisson được ứng dụng nhiều trong viễn thông, liên quan đến bài toán truyền tín hiệu, các hệ phục vụ, bài toán chuyển mạch ...

Nếu số cuộc gọi đến một tổng đài là một quá trình Poisson, mỗi cuộc gọi chiếm dụng thiết bị trong một khoảng thời gian nào đó, giả sử các khoảng thời gian này là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố, khi đó tổng số giờ gọi là một quá trình Poisson phức hợp.

Quá trình Poisson $X(t)$ mô tả quá trình đếm số lần xuất hiện một biến cố A nào đó cho đến thời điểm t . Giả sử biến cố A được phân thành 2 loại A_1, A_2 và tại mỗi thời điểm việc xuất hiện biến cố A_1 hoặc A_2 là độc lập nhau, khi đó ta có quá trình Poisson có phân loại.

Quá trình Poisson phức hợp và quá trình Poisson phân loại giúp ta tính được sản lượng trung bình khi khai thác dịch vụ viễn thông.

Trong chương này chúng ta khảo sát các vấn đề sau:

- Quá trình đếm, quá trình điểm.
- Quá trình Poisson.
- Các phân bố liên quan đến quá trình điểm Poisson: thời điểm đến thứ n (hay thời gian chờ) và khoảng thời gian giữa hai lần đến liên tiếp thứ n .
- Quá trình Poisson có phân loại.
- Quá trình Poisson phức hợp.

Quá trình Poisson là cơ sở quan trọng để khảo sát quá trình sắp hàng được nghiên cứu trong chương tiếp theo.

Để học tốt chương này học viên phải nắm các kiến thức cơ bản của lý thuyết xác suất.

6.1 KHÁI NIỆM QUÁ TRÌNH POISSON

6.1.1 Quá trình đếm

Quá trình đếm rất thường gặp trong thực tế.

Giả sử A là biến cố nào đó. Ký hiệu $X(t), t > 0$ là số lần biến cố A xuất hiện trong khoảng thời gian từ 0 đến t . Khi đó $\{X(t), t > 0\}$ được gọi là quá trình đếm.

Chẳng hạn ta có những ví dụ sau về quá trình đếm:

- A là biến cố khách vào điểm phục vụ nào đó. Khi ấy $X(t)$ là số khách vào điểm phục vụ tính đến thời điểm t .

- A là biến cố có cuộc gọi đến một tổng đài nào đó. Khi ấy $X(t)$ là số cuộc gọi đến tổng đài tính đến thời điểm t .

Quá trình đếm $\{X(t); t \geq 0\}$ có các tính chất đặc trưng sau:

$$1. X(0) = 0; \quad (6.1)$$

$$2. X(t) \text{ chỉ nhận giá trị là các số tự nhiên;} \quad (6.2)$$

$$3. X(s) \leq X(t), 0 \leq s \leq t. \quad (6.3)$$

6.1.2 Quá trình Poisson

Định nghĩa 6.1: Ta nói rằng quá trình $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ (hoặc tham số λ) nếu:

i) $X(0) = 0$;

ii) $X(t)$ chỉ nhận giá trị là các số tự nhiên;

iii) $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình có gia số độc lập, tức là, với bất kỳ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ các gia số $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.

iv) Mỗi gia số $X(s+t) - X(s)$ có phân bố Poisson với tham số λt với mọi $s \geq 0, t > 0$.

Định lý 6.1: Nếu quá trình đếm $\{X(t); t \geq 0\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Có gia số độc lập, tức là $\forall m = 2, 3, \dots$ và với mọi $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ thì các gia số

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_m) - X(t_{m-1})$$

là các biến ngẫu nhiên độc lập,

2. Có gia số dừng, tức là với mọi $s > 0. \forall 0 \leq t_1 < t_2$ thì các gia số

$$X(t_2) - X(t_1) \text{ và } X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$$

có cùng phân bố xác suất. Như vậy luật phân bố chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian và không phụ thuộc thời điểm.

3. Xác suất xuất hiện biến cố A gần đều; tức là tồn tại $\lambda > 0$ (tốc độ xuất hiện biến cố A) sao cho với $h > 0$ khá bé thì

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h + o(h). \quad (6.4)$$

4. Với $h > 0$ khá bé thì

$$P\{X(h) \geq 2\} = o(h), \quad (6.5)$$

thì $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson tham số λ .

Ngược lại, quá trình Poisson là quá trình đếm thỏa mãn 4 điều kiện trên.

Chứng minh: Điều kiện i), ii) của định nghĩa quá trình Poisson được suy từ tính chất của quá trình đếm. Từ 1) ta suy ra điều kiện iii). Theo 2) để chứng minh điều kiện iv) ta chỉ cần chứng minh $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

$$\text{Đặt } p_n(t) = P\{X(t) = n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P\{X(t+h) = 0\} = P\{X(t) = 0, X(t+h) - X(t) = 0\} \\ &= p_0(t)p_0(h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)), \end{aligned}$$

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Rightarrow p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Rightarrow p_0(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

$$p_0(0) = 1 \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}; \quad t \geq 0.$$

$$\text{Tương tự } p_n(t+h) = P\{X(t+h) = n\} = P\{X(h) = 0, X(t+h) - X(h) = n\}$$

$$\begin{aligned} &+ P\{X(h) = 1, X(t+h) - X(h) = n-1\} + \sum_{k \geq 2} P\{X(h) = k, X(t+h) - X(h) = n-k\} \\ &= p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + \sum_{k \geq 2} p_{n-k}(t)o(h) = (1 - \lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t).$$

$$\text{Đặt biến đổi Laplace của } p_n(t) \text{ là } P_n(s) = \mathcal{L}\{p_n(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{p_n'(t)\} = sP_n(s) = -\lambda P_n(s) + \lambda P_{n-1}(s) \Rightarrow P_n(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} P_{n-1}(s)$$

$$\Rightarrow P_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n P_0(s) = \frac{\lambda^n}{(\lambda + s)^{n+1}} \Rightarrow p_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\lambda^n}{(\lambda + s)^{n+1}}\right\} = \frac{\lambda^n}{n!} t^n e^{-\lambda t}.$$

Vậy $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Ngược lại nếu $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson tham số λ thì $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$ nên $E[X(t)] = \text{var}[X(t)] = \lambda t$. Khai triển Taylor ta có

$$P\{X(h) = 0\} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \text{ khi } h \rightarrow 0,$$

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h) \text{ khi } h \rightarrow 0.$$

$$\text{Do đó } P\{X(h) \geq 2\} = 1 - P\{X(h) = 0\} - P\{X(h) = 1\} = o(h) \text{ khi } h \rightarrow 0.$$

Nhận xét 6.1: Giả sử quá trình $\{X(t); t \geq 0\}$ đếm số lần xuất hiện biến cố A là quá trình Poisson tham số $\lambda > 0$ thì

$$\lambda = E[X(1)] \tag{6.6}$$

Như vậy λ là số lần trung bình xảy ra biến cố A trong khoảng 1 đơn vị thời gian. Nếu quá trình $\{X(t); t \geq 0\}$ đếm số khách đến điểm phục vụ thì λ là tốc độ đến trung bình.

6.1.3 Các phân bố liên quan đến quá trình Poisson

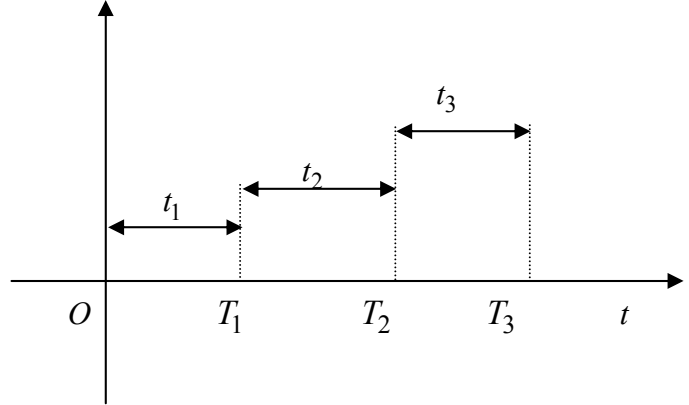
Định nghĩa 6.2: Giả sử $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson đếm số lần xuất hiện biến cố A .

1) Ta ký hiệu T_n là thời điểm đến (arrival time) (hay thời gian chờ, waiting time) thứ n , đó là thời điểm mà biến cố A xuất hiện lần thứ n .

Quy ước $T_0 = 0$.

2) Ký hiệu t_n là khoảng thời gian giữa 2 lần đến liên tiếp thứ n (interarrival time), đó là khoảng thời gian tính từ thời điểm biến cố A xảy ra lần thứ $n-1$ đến thời điểm xảy ra biến cố A lần thứ n .

Vậy $t_n = T_n - T_{n-1}$.



Định lý 6.2:

1. Các thời gian đến trung gian t_1, t_2, \dots, t_n là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ tham số λ với hàm mật độ

$$f_{t_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}; t \geq 0. \tag{6.7}$$

2. T_n có phân bố Erlang tham số n, λ với hàm mật độ

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}; t \geq 0. \tag{6.8}$$

Đặc biệt T_1 có phân bố mũ.

3. Với mọi $0 < s < t$ và $0 \leq k \leq n$

$$P\{X(s) = k | X(t) = n\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}. \tag{6.9}$$

Chú ý rằng nếu X_1, X_2, \dots, X_n là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ tham số λ thì $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ có phân bố Erlang tham số n, λ . Do đó có kỳ vọng và phương sai:

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \frac{n}{\lambda}; \text{var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \frac{n}{\lambda^2}. \tag{6.10}$$

Ví dụ 6.1: Giả sử số khách đến cửa hàng nào đó là 1 quá trình Poisson với tốc độ $\lambda = 4$ khách/giờ. Cửa hàng mở cửa lúc 8h.

1. Tính xác suất để đến 8h30 có cả thấy 1 khách; đồng thời đến 10h30 có cả thấy 5 khách đến cửa hàng.
2. Tính thời điểm trung bình khách thứ 10 tới.
3. Tính xác suất để khoảng thời gian giữa khách thứ 10 và khách thứ 11 lớn hơn 1/2 giờ.

Giải: 1. Xem $t_0 = 8h$. Vậy xác suất cần tìm là

$$\begin{aligned} P\{X(1/2) = 1; X(5/2) = 5\} &= P\{X(1/2) = 1; X(5/2) - X(1/2) = 4\} \\ &= P\{X(1/2) = 1\} \cdot P\{X(2) = 4\} = 2 \cdot e^{-2} \cdot \frac{8^4}{4!} e^{-8} \approx 0,0155. \end{aligned}$$

$$2. \quad ET(10) = \frac{10}{\lambda} = \frac{10}{4} = 2^h 30'.$$

$$3. \quad P\{t_1 > 1/2\} = 1 - P\{t_1 < 1/2\} = 1 - \left(1 - e^{-4 \times \frac{1}{2}}\right) = e^{-2} \approx 0,135.$$

Ví dụ 6.2: Cho hai quá trình Poisson độc lập $\{X_1(t); t \geq 0\}$ và $\{X_2(t); t \geq 0\}$ với các tham số tương ứng λ_1, λ_2 . Tìm xác suất để $X_1(t) = 1$ trước khi $X_2(t) = 1$.

Giải: Ta cần tìm xác suất $P\{T_1^1 < T_1^2\}$, trong đó T_n^1 là thời điểm đến thứ n của quá trình $X_1(t)$ còn T_m^2 là thời điểm đến thứ m của quá trình $X_2(t)$.

$$P\{T_1^1 < T_1^2\} = \iint_{0 \leq x < y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dx dy = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dx dy = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Tổng quát, ta có thể chứng minh công thức sau

$$P\{T_n^1 < T_m^2\} = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n+m-1-k}. \quad (6.11)$$

6.2 QUÁ TRÌNH POISSON CÓ PHÂN LOẠI

Xét quá trình Poisson $\{X(t); t \geq 0\}$ với cường độ λ (tương ứng với quá trình đếm số lần xảy ra biến cố A). Giả sử mỗi khi biến cố A xảy ra thì nó được phân thành hai loại: loại I với xác suất p và loại II với xác suất $q = 1 - p$. Hơn nữa, giả sử sự phân loại biến cố này là độc lập với sự phân loại biến cố kia.

Chẳng hạn, khách đến cửa hàng theo quá trình Poisson $\{X(t); t \geq 0\}$ với cường độ λ , khách được phân làm hai loại: nam với xác suất $1/2$ và nữ với xác suất $1/2$.

Ta ký hiệu $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là quá trình đếm tương ứng với biến cố loại I và biến cố loại II. Rõ ràng là $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

Định lý 6.3: Với các điều kiện trên ta có $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là hai quá trình Poisson với cường độ tương ứng λp và λq . Hơn nữa, hai quá trình này là độc lập.

Chứng minh: Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m \mid X(t) = k\} P\{X(t) = k\}.$$

Vì $X(t) = X_1(t) + X_2(t) \Rightarrow P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m | X(t) = k\} = 0 \quad \forall k \neq n + m$, do đó $P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m\} = P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m | X(t) = n + m\}P\{X(t) = n + m\}$.

Mặt khác trong $n + m$ biến cố có n biến cố loại I và m biến cố loại II. Do đó, từ giả thiết độc lập của sự phân loại biến cố và $P\{X(t) = n + m\} = \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}$ suy ra:

$$P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m\} = C_{n+m}^n p^n q^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t q)^m}{m!} e^{-\lambda t q}$$

$$\Rightarrow P\{X_1(t) = n\} = \sum_{m=0}^{\infty} P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m\} = \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p}.$$

Điều này chứng tỏ $\{X_1(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λp .

Tương tự $\{X_2(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λq .

6.3 PHÂN BỐ ĐỀU VÀ QUÁ TRÌNH POISSON

Giả sử ta có một đoạn thẳng chiều dài bằng t và có n hạt cho trước. Ta rải các hạt lên đoạn thẳng này sao cho vị trí của các hạt trên đoạn này lập thành n biến ngẫu nhiên độc lập có phân bố đều (mỗi hạt đồng khả năng rơi vào từng điểm). Ta ký hiệu U_k là vị trí của hạt thứ k ; $k = 1, 2, \dots, n$. Theo cách rải của ta thì U_1, \dots, U_n là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố đều với hàm mật độ.

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{nếu } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Bây giờ ta sắp xếp lại dãy các vị trí theo thứ tự từ bé đến lớn. Bằng cách ấy ta được dãy $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$, trong đó T_1 là bé nhất trong số U_1, \dots, U_n ; tương tự T_2 là bé thứ hai trong số U_1, \dots, U_n . Ta gọi T_1, T_2, \dots, T_n là thống kê thứ tự của phân bố đều trên đoạn $(0; t]$.

Định lý 6.4: Hàm phân bố đồng thời của T_1, T_2, \dots, T_n có hàm mật độ là

$$f_{T_1, \dots, T_n}(w_1, \dots, w_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{với } 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n \leq t. \quad (6.12)$$

Định lý 6.5: Giả sử $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với tham số λ và T_1, T_2, \dots, T_n là các thời gian đến trong quá trình Poisson này. Khi đó, với điều kiện $X(t) = n$, phân bố đồng thời của T_1, T_2, \dots, T_n có mật độ

$$f_{T_1, \dots, T_n | X(t)=n}(w_1, \dots, w_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{với } 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n \leq t. \quad (6.13)$$

Ý nghĩa của định lý 6.5 là: Với điều kiện có đúng n biến cố xảy ra trong khoảng thời gian $(0; t]$ thì các thời gian đến là thống kê thứ tự của phân bố đều trên đoạn $(0; t]$.

Ví dụ 6.3: Khách đến một cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ λ . Mỗi khách hàng trả 1 nghìn đồng để vào cửa tại thời điểm $t = 0$. Sau đó giá được giảm theo thời gian với tốc độ hạ giá là β . Ta cần tính số tiền trung bình M cửa hàng thu được trong khoảng thời gian $(0; t]$.

Khách hàng thứ k đến tại thời điểm T_k nên phải trả vé vào cửa với giá $e^{-\beta T_k}$. Gọi $N(t)$ là số khách đến trong khoảng thời gian $(0; t]$ thì

$$M = E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta T_k} \right).$$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta T_k} \mid N(t) = n \right) P \{ N(t) = n \}.$$

Giả sử U_1, \dots, U_n là các biến ngẫu nhiên độc lập và có phân bố đều trên đoạn $[0; t]$. Do tính

chất giao hoán của phép cộng trong công thức $E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta T_k} \right)$ và định lý 6.5 ta có

$$E \left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta T_k} \mid N(t) = n \right) = E \left(\sum_{k=1}^n e^{-\beta U_k} \right) = n E \left(e^{-\beta U_1} \right) = \frac{n}{t} \int_0^t e^{-\beta u} du = \frac{n}{\beta t} (1 - e^{-\beta t}).$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{1}{\beta t} (1 - e^{-\beta t}) \sum_{n=1}^{\infty} n P \{ N(t) = n \} = \frac{1}{\beta t} (1 - e^{-\beta t}) E N(t) = \frac{\lambda}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

6.4 QUÁ TRÌNH POISSON PHỨC HỢP

Định nghĩa 6.3: Giả sử $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda > 0$. Y_1, \dots, Y_n dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với $\{X(t); t \geq 0\}$. Khi đó ta gọi

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{X(t)} Y_k; \quad t \geq 0 \tag{6.14}$$

là quá trình Poisson phức hợp.

Ví dụ 6.4: 1. Nếu $Y_k \equiv 1$ thì $Z(t) = X(t)$. Do đó, quá trình Poisson thông thường là quá trình Poisson phức hợp.

2. Giả sử khách rời cửa hàng là quá trình Poisson và tiền mua hàng của khách là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với số khách. Khi đó ta có quá trình Poisson phức hợp $Z(t)$ là tiền bán hàng thu được tính đến thời điểm t .

3. Các cuộc gọi đến tổng đài là quá trình Poisson và thời gian gọi của mỗi cuộc là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với các cuộc gọi đến. Khi đó tổng thời gian của tất cả các cuộc gọi cho đến thời điểm t là một quá trình Poisson phức hợp.

4. Giả sử các lần chuyển đổi tại thị trường chứng khoán diễn ra theo quá trình Poisson. Gọi Y_k là lượng thay đổi giá cổ phiếu giữa lần chuyển đổi thứ $k-1$ và thứ k . Khi đó ta có quá trình Poisson phức hợp $Z(t)$ là sự biến động tổng cộng giá cổ phiếu tính đến thời điểm t .

Định lý 6.6: Kỳ vọng và phương sai của quá trình Poisson phức hợp:

$$EZ(t) = \lambda t EY_1 ; \quad \text{var } Z(t) = \lambda t EY_1^2, \quad (6.15)$$

Hàm phân bố

$$P\{Z(t) < z\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(z), \quad (6.16)$$

trong đó

$$F_0(z) = 1, \quad \forall z,$$

$$F_1(z) = F_{X_1}(z) = P\{X_1 < z\}, \quad \forall z,$$

$$F_n(z) \text{ là hàm phân bố của } Y_1 + \dots + Y_n.$$

Đặc biệt nếu $Y_1 + \dots + Y_n$ có phân bố mũ tham số μ thì $F_n(z)$ là hàm phân bố Erlang tham số n, μ

$$F_n(z) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu z)^k}{k!} e^{-\mu z} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} e^{-\mu z}. \quad (6.17)$$

Ví dụ 6.5 (Mô hình chấn động) Giả sử $X(t)$ là số lần chấn động trong hệ nào đó và Y_k là lượng thiệt hại tổng cộng do chấn động thứ k gây ra $P\{Y_k \geq 0\} = 1$. Khi đó $Z(t)$ là lượng thiệt hại tổng cộng do chấn động gây ra tính đến thời điểm t . Hệ tiếp tục làm việc khi lượng thiệt hại tổng cộng bé hơn a và ngừng hoạt động trong trường hợp ngược lại. Ký hiệu T là thời điểm hệ ngừng hoạt động. Tính ET (là thời gian trung bình hệ ngừng hoạt động).

Giải: Ta có $T > t$ khi và chỉ khi $Z(t) < a$, tức là $\{T > t\} = \{Z(t) < a\}$

$$\Rightarrow P\{T > t\} = P\{Z(t) < a\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(a).$$

$$\text{Do đó } ET = \int_0^{\infty} P\{T > t\} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \right) F_n(a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a).$$

Đặc biệt khi các Y_k có phân bố mũ tham số μ thì

$$T = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} (1 + \mu a).$$

Nhận xét 6.2: Trong ví dụ trên ta đã sử dụng công thức tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm. Nếu X là biến ngẫu nhiên, $X \geq 0$ thì $EX = \int_0^{\infty} P\{X > x\} dx$. Đặc biệt X là biến

ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $k = 0, 1, 2, \dots$ thì $EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \geq k\}$.

BÀI TẬP

6.1 Các bức điện gửi tới bưu điện là quá trình Poisson với tốc độ trung bình 3 bức trong 1 giờ.

- Tính xác suất để từ 8h00 đến 12h00 không có bức điện nào.
- Tính phân bố của thời điểm tại đó nhận được bức điện đầu tiên sau 12h00.

6.2 Số cuộc gọi đến tổng đài là quá trình Poisson $X(t)$ với tốc độ trung bình 2 cuộc gọi trong một đơn vị thời gian. Hãy tính:

- $P\{X(1) = 2\}$ và $P\{X(1) = 2, X(3) = 6\}$.
- $P\{X(1) = 2 | X(3) = 6\}$ và $P\{X(3) = 6 | X(1) = 2\}$.

6.3 Cho $X(t), t \geq 0$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 2$. Hãy tính:

- $EX(2)$, $EX^2(1)$, $E[X(1) \cdot X(2)]$.
- $P\{X(1) \leq 2\}$, $P\{X(1), X(2) = 3\}$.

6.10 Cho $\{X_1(t), t \geq 0\}$ và $\{X_2(t), t \geq 0\}$ là các quá trình Poisson độc lập với các cường độ là λ_1 và λ_2 tương ứng. Chứng minh rằng $\{X(t) = X_1(t) + X_2(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ là $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

6.11 Cho $\{X_1(t), t \geq 0\}$ và $\{X_2(t), t \geq 0\}$ là hai quá trình Poisson độc lập với các cường độ là λ_1 và λ_2 tương ứng.

- Tính xác suất để $X_1(t) = 1$ trước khi $X_2(t) = 1$.
- Tính xác suất để $X_1(t) = 2$ trước khi $X_2(t) = 2$.
- Tính xác suất để $X_1(t) = n$ trước khi $X_2(t) = m$.

6.12 Khách tới cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ 5 người một giờ. Biết rằng trong 2 giờ đầu đã có 12 khách tới, tính xác suất (có điều kiện) để có 5 khách tới trong giờ đầu tiên.

6.13 Khách tới cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ 10 người một giờ. Khách có thể mua hàng với xác suất $p = 0,3$ và không mua hàng với xác suất $q = 0,7$. Tính xác suất để trong giờ đầu tiên có 9 người vào cửa hàng trong số đó 3 người mua hàng, 6 người không mua.

6.14 Cho quá trình Poisson $\{X(t), t \geq 0\}$ với tham số λ . Gọi t_n là thời gian đến trung gian thứ n . Hãy tính Et_4 và $E[X(4) - X(2) | X(1) = 3]$.

CHƯƠNG VII: LÝ THUYẾT SẮP HÀNG

GIỚI THIỆU

Trong nhiều hệ thống phục vụ, các khách hàng (customer) phải dùng chung tài nguyên, phải chờ để được phục vụ và đôi khi bị từ chối phục vụ. Lý thuyết quá trình sắp hàng (queueing process) xác định và tìm các phương án tối ưu để hệ thống phục vụ tốt nhất.

Trong nửa đầu của thế kỷ 20 lý thuyết sắp hàng đã được ứng dụng để nghiên cứu thời gian đợi trong các hệ thống điện thoại. Ngày nay lý thuyết sắp hàng còn có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong mạng máy tính, trong việc quản lý xí nghiệp, quản lý giao thông và trong các hệ phục vụ khác... Ngoài ra lý thuyết sắp hàng cũng còn là cơ sở toán học để nghiên cứu và ứng dụng trong nhiều bài toán kinh tế như đầu tư, kiểm kê, rủi ro của bảo hiểm, thị trường chứng khoán ... Chuỗi Markov là quá trình sắp hàng với thời gian rời rạc đã được xem xét trong chương 6. Quá trình sinh tử cũng là quá trình sắp hàng, trong đó sinh biểu thị sự đến và tử biểu thị sự rời hàng của hệ thống.

Người ta phân loại các quá trình sắp hàng dựa vào luật phân bố của quá trình đến, luật phân bố phục vụ, nguyên tắc phục vụ và cơ cấu phục vụ. Trên cơ sở phân loại này ta có ký hiệu Kendall $A/B/k$ hoặc $A/B/k/N$, trong đó A là ký hiệu luật phân bố của quá trình đến (hay quá trình đến trung gian), B ký hiệu luật phân bố của quá trình phục vụ, k ký hiệu số server và N ký hiệu dung lượng tối đa của hàng.

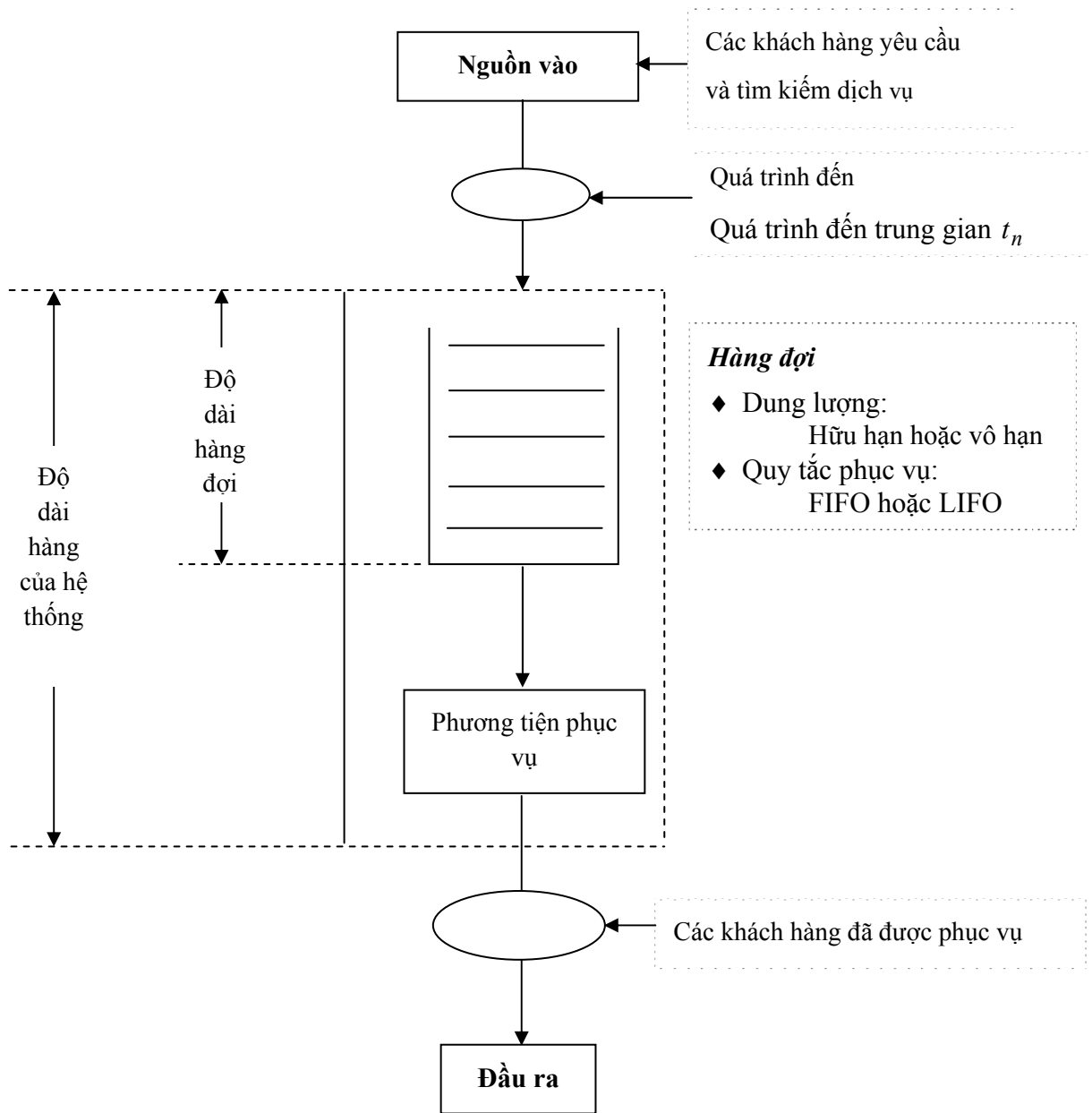
Đối với lý thuyết sắp hàng ta quan tâm đến các số đo hiệu năng, đó là các giá trị trung bình khi quá trình đạt trạng thái dừng bao gồm: độ dài hàng đợi trung bình của hàng, độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống, thời gian đợi trung bình của hàng (trễ của hàng) và thời gian đợi trung bình của hệ thống (trễ của hệ thống). Để tính các đại lượng này ta có thể sử dụng phương pháp giải phương trình tích phân dạng Wiener-Hopf hoặc phương pháp khảo sát chuỗi Markov nhúng. Từ đó suy ra các công thức tính các phân bố ổn định cho các loại hàng $M/M/k$, $M/M/k/N$; Công thức tổng quát tính các giá trị trung bình này cho các hàng $G/G/1$ và công thức cụ thể cho các hàng đặc biệt $M/M/1$, $M/D/1$ và $M/E_k/1$. Tuy nhiên trong chương này chúng tôi chỉ cung cấp các kết quả dưới dạng các công thức và không chứng minh.

Hướng ứng dụng vào viễn thông: Một trong những bài toán quan trọng của lý thuyết chuyên mạch là vấn đề xung đột thông tin, nghẽn mạch hoặc rút cuộc gọi. Lý thuyết sắp hàng sẽ xác lập phương án tối ưu để khắc phục những vấn đề trên. Ngoài ra lý thuyết sắp hàng cũng được ứng dụng rộng rãi trong các hệ phục vụ khác.

7.1. KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH SẮP HÀNG

7.1.1. Khái niệm quá trình sắp hàng

Mô hình tổng quát của lý thuyết sắp hàng là khách hàng đến ở một thời điểm ngẫu nhiên nào đó và yêu cầu được phục vụ theo một loại nào đó. Giả thiết thời gian phục vụ có thể ngẫu nhiên



Đặt t_n là khoảng thời gian giữa 2 lần đến của khách hàng thứ $n-1$ và thứ n , khách hàng thứ 0 đến tại thời điểm 0. Ta giả định rằng tất cả các t_n ($n \geq 1$) là độc lập và có cùng phân bố. Vì vậy việc đến của các khách hàng tạo thành 1 hàng kế tiếp nhau với tốc độ đến là $\lambda = \frac{1}{E(t_1)}$. Ta gọi quá trình $\{t_n; n = 1, 2, \dots\}$ là quá trình đến. Khách hàng đến hệ thống yêu cầu các server của hệ thống phục vụ. Ta giả sử rằng khách hàng thứ n cần một thời gian phục vụ là s_n ($n \geq 1$), tất cả các s_n độc lập và có cùng phân bố. Quá trình $\{s_n; n = 1, 2, \dots\}$ được gọi là quá trình phục vụ. Ta cũng giả thiết rằng các thời gian đến trung gian độc lập với thời gian phục vụ.

Quá trình sắp hàng được phân loại dựa vào các tiêu chí sau:

- 1) Phân bố của quá trình đến (input process) $\{t_n; n = 1, 2, \dots\}$.

- 2) Phân bố của thời gian phục vụ (service distribution) $\{s_n; n = 1, 2, \dots\}$.
- 3) Nguyên tắc phục vụ: Các khách hàng đến được sắp xếp vào hàng chờ đến lượt được phục vụ. Để đơn giản ta giả thiết chỉ có một hàng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể mở rộng cho nhiều hàng cùng hoạt động song song. Nếu độ dài hàng có đặt ngưỡng thì các đơn vị đến hàng khi hàng đầy vượt ngưỡng sẽ bị loại. Các khách hàng được chọn để phục vụ theo nguyên tắc "đến trước phục vụ trước" (FIFO), nghĩa là phục vụ cho khách nào đứng đầu hàng.
- 4) Cơ cấu phục vụ: Một phương tiện phục vụ bao gồm một hay nhiều Server. Các Server có thể kết nối thành chuỗi vì thế mỗi yêu cầu phục vụ được phục vụ theo nhiều cách hoặc lần lượt hoặc song song.

7.1.2. Phân loại Kendall

Kendall (1951) đã đưa ra ký hiệu $A/B/k$ để mô tả các tham số cơ bản của hệ thống sắp hàng, trong đó A biểu diễn dạng của phân bố thời gian đến trung gian, B là dạng phân bố thời gian phục vụ và k là số Server.

- Nếu luật phân bố được xét dưới dạng tổng quát thì A hoặc B lấy ký hiệu G (General). Đôi khi người ta còn ký hiệu GI (general independence).
- Nếu quá trình đến là quá trình Poisson, nghĩa là thời gian đến trung gian có phân bố mũ thì A được ký hiệu M (Markovian). Tương tự nếu thời gian phục vụ có phân bố mũ thì B cũng được ký hiệu M .
- Nếu thời gian đến trung gian hoặc thời gian phục vụ có phân bố Erlang- k thì A, B được ký hiệu E_k .
- Nếu thời gian đến trung gian hoặc thời gian phục vụ là hằng số thì A hoặc B được ký hiệu D (Deterministic).

Khi một vài thiết bị phục vụ có dung lượng hữu hạn thì hệ thống chỉ có thể chứa đến N khách hàng. Nếu ở trong hàng đã có N khách hàng chưa được phục vụ thì khách hàng mới đến sẽ bị từ chối hoặc bị mất. Trong trường hợp này hệ thống được ký hiệu $A/B/k/N$.

7.1.3. Các số đo hiệu năng

- 1) L_q : Độ dài hàng đợi trung bình của hàng, đó là kỳ vọng của chuỗi thời gian liên tục $\{l_q(t)\}_{t \geq 0}$ trong đó $l_q(t)$ là số khách hàng đợi trong hàng tại thời điểm t .
- 2) L : Độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống, đó là kỳ vọng của chuỗi thời gian liên tục $\{l(t)\}_{t \geq 0}$ trong đó $l(t)$ là số khách hàng trong hệ thống tại thời điểm t . Vậy $l(t) = l_q(t) +$ số khách hàng đang được phục vụ.
- 3) W_q : Thời gian đợi trung bình của hàng là kỳ vọng của quá trình thời gian rời rạc $\{q_n; n = 1, 2, \dots\}$ trong đó q_n là khoảng thời gian mà khách hàng thứ n phải đợi trong hàng cho đến lúc anh ta được nhận phục vụ.

- 4) W : Thời gian đợi trung bình của hệ thống là kỳ vọng của quá trình thời gian rời rạc $\{w_n; n = 1, 2, \dots\}$ trong đó $w_n = q_n + s_n$ là thời gian khách hàng thứ n ở trong hệ thống, đó là thời gian đợi trong hàng và thời gian được phục vụ.

7.1.4. Kết quả nhỏ (Little's result)

Công thức liên hệ giữa độ dài hàng đợi và thời gian đợi ở trạng thái cân bằng

$$L = \lambda W \quad (7.1)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (7.2)$$

trong đó λ là tốc độ đến được định nghĩa như sau:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left\{ \text{số khách đến trong khoảng } (0; t] \right\}}{t} \quad (7.3)$$

7.2. HÀNG $M/M/k$

7.2.1. Trạng thái ổn định của hàng $M/M/k$

Hàng $M/M/k$ có quá trình đến Poisson, thời gian phục vụ theo phân bố mũ và k Server. Trong trường hợp này chuỗi thời gian liên tục $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ với không gian trạng thái $\{0, 1, 2, \dots\}$ là một quá trình sinh tử vô hạn có có tốc độ sinh $\lambda_i = \lambda$ và tốc độ tử $\mu_i = \min(k, i)\mu$.

- ◆ Khi $\lambda > k\mu$ hay *cường độ lưu thông* (traffic intensity) $\rho = \frac{\lambda}{k\mu} > 1$ thì hệ thống không đạt được trạng thái ổn định. Chuỗi $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ *không hồi qui* (transient). Số các khách hàng trong hệ thống sẽ dần đến vô hạn.
- ◆ Khi $\lambda = k\mu$ hay $\rho = 1$, chuỗi $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ *hồi qui không* (null - recurrent), hệ thống cũng không đạt trạng thái ổn định. Số khách hàng trong hệ thống không tiến về một trạng thái nào. Thời gian trung bình để hệ thống xuất phát từ một trạng thái bất kỳ quay về lại trạng thái này là vô hạn.
- ◆ Khi $\lambda < k\mu$ hay $\rho < 1$, chuỗi $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ *hồi qui dương* (positive recurrent) và hệ thống đạt được trạng thái ổn định. Nghĩa là khi tốc độ đến nhỏ hơn tốc độ phục vụ tối đa của hệ thống thì số khách hàng ở trong hệ thống có khuynh hướng tiến về không và hệ thống quay trở lại trạng thái 1 nếu có một khách hàng mới đến khi hệ thống đang rỗng.
- ◆ Tại thời điểm t bất kỳ đặt $d(t)$ là khoảng thời gian cho đến khi khách hàng tiếp theo rời khỏi hệ thống. Định lý Burke phát biểu rằng khi $t \rightarrow \infty$ thì $d(t)$ có phân bố mũ với tham số λ và độc lập với số khách hàng trong hệ thống tại thời điểm t . Nói cách khác, chuỗi giới hạn các khách hàng rời khỏi hệ thống $M/M/k$ là một quá trình Poisson tham số λ (Burke, 1976).

Rõ ràng rằng tốc độ rời khỏi hệ thống phải bằng tốc độ đến để hệ thống trở lại trạng thái ổn định. Tuy nhiên, rất khó hình dung được khoảng thời gian giới hạn cho tới khi khách hàng tiếp theo rời hệ thống lại độc lập với số khách hàng trong hệ thống...

7.2.2. Phân bố dừng của hàng $M / M / k$

Khi $\lambda < k\mu$ hay $\rho = \frac{\lambda}{k\mu} < 1$ thì hệ thống đạt trạng thái ổn định có phân bố dừng thoả mãn:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0 = \begin{cases} \frac{(k\rho)^n}{n!} p_0 & \text{nếu } 0 \leq n \leq k \\ \frac{k^k \rho^n}{k!} p_0 & \text{nếu } n > k \end{cases} \quad (7.4)$$

Từ điều kiện $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ suy ra

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} \right]^{-1} \quad (7.5)$$

Các số đo hiệu năng tương ứng

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2} p_0 ; \quad W = \frac{L}{\lambda} ;$$

$$L_q = \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2} p_0 = L - \frac{\lambda}{\mu} ; \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = W - \frac{1}{\mu} \quad (7.6)$$

7.2.3. Hàng $M / M / k / N$

Đây là hàng có quá trình đến Poisson với tốc độ λ , thời gian phục vụ có phân bố mũ tốc độ μ với k Server. Trạng thái của hệ thống bị giới hạn bởi số lượng N . Khi một khách hàng đến hệ thống thì xảy ra hiện tượng sau: Nếu đã có đủ N khách hàng trong hàng thì lập tức khách hàng này rời khỏi hệ thống còn trường hợp ngược lại thì khách hàng sẽ xếp vào hàng chờ. Như vậy không gian trạng thái của chuỗi $\{l(t)\}_{t \geq 0}$ là $\{0, 1, \dots, N\}$, đây là một quá trình sinh tử hữu hạn. Chuỗi $l(t)$ chuyển từ trạng thái i đến $i+1$ khi một khách hàng đến và đổi trạng thái i về $i-1$ khi một phục vụ vừa hoàn tất. Tốc độ sinh là hằng số $\lambda_i = \lambda$ với mọi $i = 1, 2, \dots$. Tốc độ tử $\mu_i = \min(k, i)\mu$.

Hệ thống luôn đạt trạng thái ổn định với phân bố dừng thoả mãn:

$$p_n = \begin{cases} \frac{(k\rho)^n}{n!} p_0 & \text{nếu } 0 \leq n \leq k \\ \frac{\rho^n k^k}{k!} p_0 & \text{nếu } k < n \leq N \end{cases} \quad (7.7)$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{(k\rho)^k}{k!} \left(\frac{1-\rho^{N-k+1}}{1-\rho} \right) \right]^{-1} ; \quad \rho = \frac{\lambda}{k\mu} \quad (7.8)$$

Tốc độ đến thực sự : $\lambda_e = \lambda(1 - p_N)$

Các số đo hiệu năng tương ứng

$$L_q = p_0 \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2} (1 - [1 + (1-\rho)(N-k)]\rho^{N-k}) ; L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}(1-p_N) ;$$

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = L_q + \frac{1}{\mu} ; W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)} \quad (7.9)$$

Một vài trường hợp đặc biệt

- ◆ Khi $N \rightarrow \infty$ ta có nhận được công thức (7.4)-(7.6) của trường hợp $M/M/k$.
- ◆ Khi $N = k$ ta được công thức mất của Erlang (Erlang's loss formula), đó là xác suất để tất cả các Server đều bận.

$$P_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} = \frac{(\lambda/\mu)^k / k!}{\sum_{n=0}^k (\lambda/\mu)^n / n!}.$$

7.3. HÀNG $G/G/1$

Hệ thống có 1 Server, quá trình đến là tổng quát nhưng các thời gian đến trung gian t_n độc lập, có cùng phân bố và có kỳ vọng chung là $E[t_1]$. Thời gian phục vụ trong mỗi chu kỳ cũng độc lập, cùng phân bố và có kỳ vọng chung $E[s_1]$. Kendall ký hiệu hệ thống này là $G/G/1$ (cũng có khi ký hiệu $GI/GI/1$, ở đây I thay cho independence nghĩa là độc lập).

Ta sẽ đưa ra 3 phương pháp để phân tích các trường hợp đặc biệt đối với quá trình sếp hàng $G/G/1$.

- ◆ Phương pháp thứ nhất được gọi là *phương pháp phương trình tích phân*. Phương pháp này đưa bài toán tìm các phân bố giới hạn thời gian đợi của khách hàng thứ n (khi $n \rightarrow \infty$) về bài toán giải phương trình tích phân dạng Wiener - Hopf.
- ◆ Phương pháp thứ 2 khảo sát *chuỗi Markov nhúng* (Embedded Markov Chain). Nếu quá trình đến là Poisson thì chuỗi Markov nhúng được xét là độ dài của hàng tại những thời điểm khi có một khách hàng vừa được phục vụ xong.

Nếu thời gian phục vụ có phân bố mũ và quá trình đến có phân bố tổng quát thì chuỗi Markov nhúng có được bằng cách kê khai kích thước của hàng tại mỗi thời điểm khi có một khách hàng mới đến. Khi đó quá trình trở thành một chuỗi Markov với cấu trúc đặc biệt.

- ◆ Phương pháp thứ 3 nghiên cứu các tính chất của biến ngẫu nhiên $W(t)$ là thời gian một khách hàng phải đợi nếu anh ta đến hệ thống tại thời điểm t . Đại lượng này được gọi là thời gian thực sự của khách hàng với giả thiết khách hàng đến hệ thống tại thời điểm t .

7.3.1. Phương pháp phương trình tích phân

Ký hiệu:

- ◆ W_n là thời gian đợi của khách hàng thứ n (không bao gồm thời gian phục vụ).
- ◆ s_n là thời gian phục vụ khách hàng thứ n .
- ◆ t_n là thời gian đến trung gian của khách hàng thứ $n-1$ và thứ n .
- ◆ T_n là thời điểm khách hàng thứ n đến hệ thống,

với giả thiết W_0, s_0, T_0 đều bằng 0. Nghĩa là ta giả thiết rằng người thứ nhất đến tại thời điểm $t = 0$ và không có ai đứng chờ trước anh ta.

Rõ ràng $W_n + s_n$ là khoảng thời gian khách hàng thứ n ở trong hệ thống (thời gian chờ + thời gian phục vụ). Do đó, nếu $t_{n+1} > W_n + s_n$ thì khi khách hàng thứ $n+1$ đến sẽ không có ai trong hàng vì vậy thời gian đợi $W_{n+1} = 0$. Trường hợp $t_{n+1} \leq W_n + s_n$ thì thời gian đợi là $W_n + s_n - t_{n+1}$. Tóm lại

$$W_{n+1} = \begin{cases} W_n + s_n - t_{n+1} & \text{nếu } W_n + s_n - t_{n+1} \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } W_n + s_n - t_{n+1} < 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Ký hiệu

$$U_n = s_n - t_{n+1} \quad \text{và} \quad Z^+ = \max(Z, 0) \quad (7.11)$$

thì

$$W_{n+1} = (W_n + s_n - t_{n+1})^+ = (W_n + U_n)^+ \quad (7.12)$$

$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố với U . Giả sử $F_n(x)$ là hàm phân bố của W_n và $g(x)$ là hàm mật độ phân bố của U . Vì W_n và U_n là các biến ngẫu nhiên độc lập, do đó với mọi $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= P\{W_{n+1} < x\} = P\{\max(W_n + U_n; 0) < x\} = P\{W_n + U_n < x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{W_n + U_n < x | U_n = y\} g(y) dy = \int_{y \leq x} F_n(x - y) g(y) dy \end{aligned} \quad (7.13)$$

Vì người thứ nhất đến hệ thống tại thời điểm $t = 0$ và không đợi nên

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Mặt khác: $F_n(x) = 0$ với mọi $x < 0$, với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$ Do đó

$$F_1(x) - F_2(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) = \int_{y \leq x} [F_{n-1}(x - y) - F_n(x - y)] g(y) dy$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được, với mọi n

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.15)$$

Dãy hàm $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ không tăng, không âm nên hội tụ về hàm $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chuyển qua giới hạn của đẳng thức (7.13) ta được:

$$F(x) = \int_{y \leq x} F(x-y)g(y)dy \quad (7.16)$$

Đặt $z = x - y$ ta được

$$F(x) = \int_0^{\infty} F(z)g(x-z)dz = F(x) * g(x) \quad (7.17)$$

Định lý 7.1:

(i) Với mọi $x < 0$, $F(x) = 0$.

(ii) Nếu $E[U] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \geq 0$ thì $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Nếu $E[U] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx < 0$ thì $F(x)$ là hàm phân bố (là hàm không giảm, liên tục trái và

thoả mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$).

Định nghĩa 7.1: Thời gian từ lúc một khách hàng rời khỏi hệ thống và hệ thống trở thành rỗng cho đến khi có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống gọi là chu kỳ rỗi của hệ thống. Ký hiệu chu kỳ rỗi thứ n là i_n .

Định lý 7.2: Nếu $E[U] < \infty$ thì hệ thống đạt được trạng thái ổn định và thời gian đợi trung bình trong hàng

$$W_q = \frac{E[U^2]}{-2E[U]} - \frac{E[i_1^2]}{2E[i_1]} \quad (7.18)$$

trong đó i_1 là chu kỳ rỗi đầu tiên.

Nhận xét 7.1: Nếu ta tính được moment cấp 1 và cấp 2 của thời gian rỗi i_1 thì công thức (7.18) cho ta tính được thời gian đợi trung bình của hàng W_q . Dựa vào "kết quả nhỏ" (7.1) sẽ cho phép tính được các số đo hiệu năng còn lại L, L_q và W .

7.3.2. Hàng $M/G/1$

Ta giả thiết quá trình đến Poisson tốc độ λ , nghĩa là quá trình đến trung gian t_n có phân bố mũ tốc độ λ . Quá trình phục vụ $\{s_n\}$ được xét một cách tổng quát nhưng giả thiết thời gian phục vụ trong các chu kỳ là độc lập với nhau và có cùng luật phân bố.

$$E[t_1] = \frac{1}{\lambda}; \quad E[t_1^2] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Do đó cường độ lưu thông

$$\rho = \frac{E[s_1]}{E[t_1]} = \lambda E[s_1],$$

$$-E[U_1] = E[t_1 - s_1] = \frac{1}{\lambda} - \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1-\rho}{\lambda} > 0$$

$$E[U_1^2] = E[(s_1 - t_1)^2] = E[s_1^2] - 2E[s_1] \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} = E[s_1^2] + \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2}.$$

Mặt khác, vì quá trình đến là Poisson nên khoảng thời gian từ một thời điểm bất kỳ đến lúc có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống luôn có phân bố mũ. Do đó thời gian từ lúc một khách hàng rời khỏi hệ thống và hệ thống trở thành rỗng cho đến khi có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống (chu kỳ rỗi của hệ thống) cũng có phân bố mũ tốc độ λ . Vậy

$$E[i_1] = \frac{1}{\lambda}; \quad E[i_1^2] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Thay vào công thức (7.18) của định lý 7.2 ta được công thức Pollaczek - Khinchin (P-K) cho hàng $M/G/1$

$$W_q = \frac{E[s_1^2] + \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2}}{\frac{2(1-\rho)}{\lambda}} - \frac{\frac{2}{\lambda^2}}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{\lambda E[s_1^2]}{2(1-\rho)} \quad (7.19)$$

$$W = W_q + E[s_1] \quad (7.20)$$

Từ "kết quả nhỏ" (7.1)-(7.2) suy ra các số đo hiệu năng còn lại.

7.3.3. Các trường hợp đặc biệt của hàng $M/G/1$

1) **Hàng $M/M/1$** : Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ , thời gian phục vụ có phân bố mũ tốc độ μ .

$$E[s_1] = \frac{1}{\mu}; \quad E[s_1^2] = \frac{2}{\mu^2}; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.21)$$

$$W_q = \frac{\frac{2\lambda}{\mu^2}}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.22)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (7.23)$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}; \quad L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.24)$$

2) **Hàng $M/D/1$** : Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ , thời gian phục vụ không đổi tốc độ μ .

$$E[s_1] = \frac{1}{\mu}; \text{var}[s_1] = E[s_1^2] - E[s_1]^2 = 0 \Rightarrow E[s_1^2] = \frac{1}{\mu^2}; \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.25)$$

$$W_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.26)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.27)$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}; L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.28)$$

3) **Hàng $M/E_k/1$** : Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ , thời gian phục vụ ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Erlang- k với tốc độ μ .

$$E[s_1] = \frac{1}{\mu} = \frac{k}{\lambda_0}; \text{var}[s_1] = \frac{k}{\lambda_0^2} = \frac{1}{k\mu^2} \Rightarrow E[s_1^2] = \frac{1}{k\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}; \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.29)$$

$$W_q = \frac{\frac{\lambda(k+1)}{k\mu^2}}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.30)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} \quad (7.31)$$

$$L = \lambda W = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu - \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}; L_q = \lambda W_q = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu - \lambda)} \quad (7.32)$$

Trong công thức trên ta đã sử dụng (6.10) chương 6.

Nhận xét 7.2:

1. Thời gian đợi trung bình W_q mà một khách hàng phải mất ở hàng đợi là số đo trễ xảy ra ở hệ thống sấp hàng. Ta có

$$W_{qM/D/1} \leq W_{qM/E_k/1} \leq W_{qM/M/1} \quad (7.33)$$

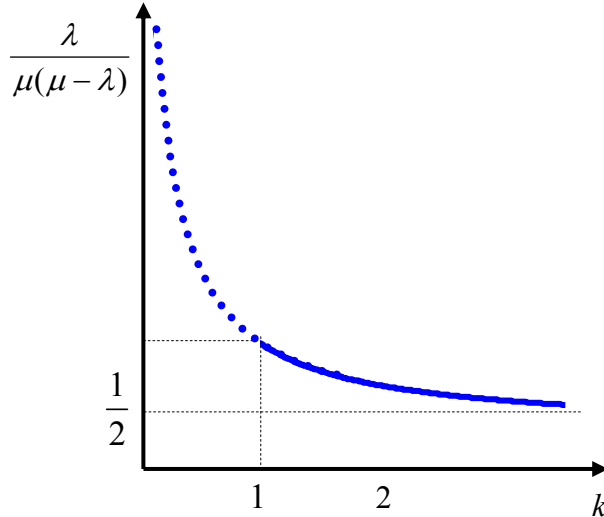
Khi $k=1$: $W_{qM/E_k/1} = W_{qM/M/1}$.

Khi $k \rightarrow \infty$: $\lim_{k \rightarrow \infty} W_{qM/E_k/1} = W_{qM/D/1}$.

2. Xét hệ toạ độ trục chuẩn Oxy. Trên trục hoành ta chọn các hoành độ nguyên $k = 1, 2, \dots$, trục tung chọn đơn vị là $\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ thì đồ thị của $W_{qM/E_k/1}$ là hyperbol

$\frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ đạt cực đại bằng 1 khi $k = 1$ và tiệm cận đến $\frac{1}{2}$ khi $k \rightarrow \infty$.

3. Hệ số $\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ lớn nếu λ gần bằng μ . Như vậy khi tốc độ đến gần với tốc độ phục vụ thì hàng đợi tăng lên nhanh chóng tỉ lệ nghịch với hiệu số hai tốc độ.



7.3.4. Phương pháp chuỗi Markov nhúng áp dụng cho hàng $G/M/1$

Xét hệ thống sắp hàng có 1 server, các chu kỳ thời gian phục vụ s_n độc lập cùng có phân bố mũ tốc độ μ . Quá trình đến là độc lập, tổng quát, có cùng phân bố và thời gian đến trung gian là biến ngẫu nhiên có hàm phân bố $H(u)$.

Ta xét chuỗi Markov nhúng là số khách hàng trong hàng tại những thời điểm khi có khách hàng mới đến hệ thống.

Gọi q là trạng thái của hệ thống khi có 1 người mới đến và gọi q' là trạng thái sau khi có 1 người tiếp theo đến :

$$q' = q + 1 - N \tag{7.34}$$

trong đó N là số khách hàng được phục vụ trong chu kỳ giữa hai lần đến. Vì phân bố mũ có tính chất "không nhớ" nên số khách hàng N được phục vụ trong chu kỳ giữa 2 lần đến chỉ phụ thuộc vào độ dài của khoảng và q mà không phụ thuộc vào phạm vi phục vụ mà khách hiện tại đã được nhận phục vụ. Với các giả thiết này công thức (7.34) xác định chuỗi Markov có xác suất chuyển $P = [p_{ij}]$ thỏa mãn :

$$p_{ij} = P\{q' = j | q = i\} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j > i + 1 \\ P\{N = i + 1 - j\} & \text{nếu } i + 1 \geq j \geq 1 \end{cases} \tag{7.35}$$

Đặt $a_k = P\{N = k\}$ thì

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j > i+1 \\ a_{i+1-j} & \text{nếu } i+1 \geq j \geq 1 \end{cases} \quad (7.36)$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ và từ giả thiết thời gian phục vụ có phân bố mũ với tốc độ μ có thể chứng minh được (xem mục 5 chương 14 [6]) :

$$a_k = \int_0^{\infty} e^{-\mu u} \frac{u^k \mu^k}{k!} dH(u) \quad (7.37)$$

trong đó $H(u)$ là hàm phân bố của chu kỳ đến trung gian.

Cuối cùng các xác suất chuyển p_{i0} ($j=0$) là xác suất mà tất cả i người trong hàng đã được phục vụ trước khi có người mới đến.

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 - a_0 - a_1 - \dots - a_i \quad (7.38)$$

Vậy ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ r_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ r_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots \\ r_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

trong đó $r_i = 1 - a_0 - a_1 - \dots - a_i$.

Cường độ lưu thông $\rho = 1 / \sum_{k=0}^{\infty} ka_k$.

Hệ thống đạt trạng thái ổn định khi $\rho < 1$ hay $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$.

Phân bố dừng

$$\Pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots] \text{ có dạng } \pi_i = (1 - \xi_0) \xi_0^i; i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.40)$$

trong đó ξ_0 là nghiệm duy nhất của phương trình

$$f(\xi_0) = \xi_0 \quad (0 < \xi_0 < 1) \quad \text{với} \quad f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \quad (7.41)$$

Thời gian đợi W

Nếu $\rho < 1$ thì hệ thống đạt trạng thái ổn định, khi đó hàm phân bố độ dài của hàng cũng đạt đến phân bố ổn định. Với điều kiện này ta xét thời gian đợi W .

Xác suất không phải đợi là $\pi_0 = 1 - \xi_0$.

Nếu khách hàng đến và đã có $n \geq 1$ khách hàng ở trong hàng thì anh ta phải đợi với tổng số n lần phục vụ có phân bố độc lập và cùng phân bố mũ trước khi đến lượt anh ta.

Ta biết rằng tổng của n phân bố mũ độc lập tham số μ là phân bố Erlang- n tham số μ . Do đó

$$P\{W < t \mid \text{có } n \text{ người trong hàng}\} = \int_0^t \frac{\mu^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu\tau} d\tau, \quad n \geq 1. \quad (7.42)$$

Mặt khác

$$P\{\text{có } n \text{ người trong hàng}\} = \pi_n = (1 - \xi_0)\xi_0^n, \quad n \geq 1. \quad (7.43)$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được

$$\begin{aligned} W(t) &= P\{W < t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{W < t \mid \text{có } n \text{ người trong hàng}\} P\{\text{có } n \text{ người trong hàng}\} + \pi_0 \\ &= (1 - \xi_0) \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu\tau} \xi_0^n d\tau + (1 - \xi_0). \\ W(t) &= (1 - \xi_0) + \xi_0 \left[1 - e^{-\mu t (1 - \xi_0)} \right]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

7.3.5. Các cận trên của thời gian đợi trung bình của hàng

Để tính các số đo hiệu năng của hàng $G/G/1$ ta có công thức (7.16) và "kết quả nhỏ" (7.1)-(7.2). Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chưa có qui tắc tính $E[i_1]$ và $E[i_1^2]$. Thay cho công thức tính chính xác người ta tìm các cận trên và cận dưới của chúng. Ở đây người ta nêu một vài cận trên cho W_q .

1. Vì số hạng $E[i_1^2]/E[i_1] \geq 0$ nên

$$W_q \leq \frac{E[U^2]}{-2E[U]} \quad (7.45)$$

2. Mặt khác ta còn có thể chứng minh được $-2E[U]W_q \leq \text{var}[U]$ và $-2E[U] > 0$, do đó

$$W_q \leq \frac{\text{var}[U]}{-2E[U]} \quad (7.46)$$

3. Khi cường độ lưu thông $\rho \rightarrow 0$ thì thời gian rỗi i_1 tiến đến 0. Điều này làm cho $E[i_1^2]$ tiến đến 0 nhanh hơn $E[i_1]$. Do đó $E[i_1^2]/E[i_1] \rightarrow 0$, vì vậy

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} W_q \approx \frac{\text{var}[U]}{-2E[U]} = \frac{\text{var}[u_1]}{-2E[u_1]} = \frac{\text{var}[t_1] + \text{var}[s_1]}{-2E[u_1]} = \frac{\lambda(\text{var}[t_1] + \text{var}[s_1])}{2(1-\rho)} \quad (7.47)$$

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

7.1 Kết quả nhỏ cho công thức liên hệ giữa các số đo hiệu năng của một hệ thống sắp hàng.

Đúng Sai .

7.2 Trong ký hiệu Kendall $A/B/k$ nếu quá trình đến là quá trình Poisson thì A được ký hiệu là P .

Đúng Sai .

7.3 Quá trình đến trong mọi hệ thống sắp hàng đều là quá trình Poisson.

Đúng Sai .

7.4 Hàng $M/M/1$ với tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ đạt trạng thái ổn định với trẻ trung bình của hàng đợi là $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Đúng Sai .

7.5 Hàng $M/E_k/1$ với tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ đạt trạng thái ổn định có độ dài trung bình của hệ thống là $L = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu - \lambda)}$.

Đúng Sai .

7.6 Với điều kiện tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ $M/G/1$ đạt trạng thái ổn định, trong đó với trẻ trung bình của hàng đợi của hàng $M/D/1$ là bé nhất trong số trẻ trung bình của hàng đợi của hàng $M/G/1$.

Đúng Sai .

7.7 Giả sử hệ thống sắp hàng có tốc độ đến $\lambda = 10$, tốc độ phục vụ $\mu = 12$.

a. Tìm trẻ phục vụ trung bình của hệ thống và độ dài trung bình của hàng ở trạng thái cân bằng trong các trường hợp sau: $M/M/1$, $M/D/1$, $M/E_5/1$.

b. Tìm k nhỏ nhất để độ dài trung bình của hàng $L_{M/E_k/1}$ không vượt quá 3.

7.8 Hàng $M/M/k/N$ có phân bố dừng thỏa mãn công thức (7.6)-(7.7). Khi $k = N$ các xác suất p_i với mọi $i = 0, 1, \dots, k$ được biết với tên gọi là công thức xác suất mất Erlang. Tìm xác suất mất Erlang khi $k = N = 2$.

7.9 Từ công thức phân bố dừng (7.4)-(7.5) của hàng $M/M/k$. Chứng minh rằng

$$L_q = \frac{\rho^{k+1}}{(k-1)!(k-\rho)^2} p_0.$$

Hãy tính các số đo hiệu năng: $L; W, W_q$.

7.10 Hãy tính các số đo hiệu năng: $L, L_q; W, W_q$ của hàng $M/M/2$ với $\lambda = 12$, $\mu = 10$.

PHỤ LỤC A: Biến đổi Z của dãy các tín hiệu thường gặp

STT	$x(n), n \geq 0$	$X(z)$	Miền hội tụ
1	$x(0) = k, x(n) = 0, n \geq 1$	k	$ z > 0$
2	$x(m) = k, x(n) = 0, n \neq m$	kz^{-m}	$ z > 0$
3	k	$kz / z - 1$	$ z > 1$
4	nk	$kz / (z - 1)^2$	$ z > 1$
5	$n^2 k$	$kz(z + 1) / (z - 1)^3$	$ z > 1$
6	ke^{-anT}, a là số phức	$kz / (z - e^{-aT})$	$ z > e^{-aT} $
7	kne^{-anT}, a là số phức	$kze^{-aT} / (z - e^{-aT})^2$	$ z > e^{-aT} $
8	$\sin(\omega_0 nT)$	$\frac{z \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$	$ z > 1$
9	$\cos(\omega_0 nT)$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0 T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$	$ z > 1$
10	$e^{-anT} \sin(\omega_0 nT)$	$\frac{ze^{-aT} \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$	$ z > e^{-aT}$
11	$e^{-anT} \cos(\omega_0 nT)$	$\frac{ze^{-aT} [ze^{-aT} - \cos(\omega_0 T)]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$	$ z > e^{-aT}$
12	a^n	$z / (z - a)$	$ z > a$
13	na^n	$az / (z - a)^2$	$ z > a$
14	$n^2 a^n$	$az(z + a) / (z - a)^3$	$ z > a$
15	$\sinh(\omega_0 nT)$	$\frac{z \sinh(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T) + 1}$	$ z > \cosh(\omega_0 T)$
16	$\cosh(\omega_0 nT)$	$\frac{z[z - \cosh(\omega_0 T)]}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T) + 1}$	$ z > \sinh(\omega_0 T)$
17	$a^n / n!$	$e^{a/z}$	$ z > 0$
18	$[\ln a]^n / n!$	$a^{1/z}$	$ z > 0$

PHỤ LỤC B

Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t) dt$$

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \widehat{X}(f/a)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t - T_d)$	$e^{-i2\pi T_d f} \widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t} x(t)$	$\widehat{X}(f - f_0)$
7. Điều chế	$x(t) \cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} \widehat{X}(f - f_0) + \frac{1}{2} \widehat{X}(f + f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i2\pi f)^n \widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int_{-\infty}^t x(u) du$	$\frac{1}{i2\pi f} \widehat{X}(f) + \frac{1}{2} \widehat{X}(0) \delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-i2\pi f)^{-n} \frac{d^n \widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) * x_2(t-u) du$	$\widehat{X}_1(f) \widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t) x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f) * \widehat{X}_2(f)$

PHỤ LỤC C: Các cặp biến đổi Fourier thường gặp

STT	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1	$\Pi(t/T)$	$T \operatorname{sinc}(Tf)$
2	$2W \operatorname{sinc}(2Wt)$	$\Pi(f/2W)$
3	$\Lambda(t/T)$	$T \operatorname{sinc}^2(Tf)$
4	$e^{-\lambda t} u(t); \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda + i2\pi f}$
5	$te^{-\lambda t} u(t); \lambda > 0$	$\frac{1}{(\lambda + i2\pi f)^2}$
6	$e^{-\lambda t }; \lambda > 0$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}$
7	$\frac{1}{\lambda^2 + (2\pi t)^2}; \lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda f }}{2\lambda}$
8	$\delta(t)$	1
9	1	$\delta(f)$
10	$\delta(t - t_0)$	$e^{-i2\pi f t_0}$
11	$e^{i2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
12	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$
13	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2i}$
14	$u(t)$	$\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
15	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{i\pi f}$
16	$\frac{1}{\pi t}$	$-i \operatorname{sgn}(f)$

PHỤ LỤC D

Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Laplace $X(s)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$AX_1(s) + BX_2(s)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
3. Dịch chuyển ảnh	$e^{at} x(t)$	$X(s - a)$
4. Trễ	$x(t - a)\eta(t - a)$	$e^{-as} X(s)$
5. Đạo hàm	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0)$
6. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$
7. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
8. Tích phân	$\int_0^t x(u) du$	$\frac{X(s)}{s}$
9. Tích phân	$\int_0^t \dots \int_0^t x(u) du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} x(u) du$	$\frac{X(s)}{s^n}$
10. Tích phân ảnh	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(u) du$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
12. Duhamel	$x_1(0)x_2(t) + x_1' * x_2(t)$	$sX_1(s)X_2(s)$

13. Tuần hoàn	$x(t+T) = x(t)$	$X(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} x(t) dt}{1 - e^{-sT}}$
14.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4t}} x(u) du$	$\frac{X(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$
15.	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut}) x(u) du$	$\frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right)$
16.	$t^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{ut}) x(u) du$	$\frac{1}{s^{n+1}} f\left(\frac{1}{s}\right)$
17.	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)}) x(u) du$	$\frac{1}{s^2 + 1} f\left(s + \frac{1}{s}\right)$
18.	$x(t^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{s^2}{4u}} X(u) du$
19.	$\int_0^\infty \frac{t^u x(u)}{\Gamma(u+1)} du$	$\frac{f(\ln s)}{s \ln s}$
20.	$\sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ Bậc $P(s) <$ bậc $Q(s)$, $Q(s)$ chỉ có các nghiệm đơn là a_1, \dots, a_n và không phải là nghiệm của $P(s)$

PHỤ LỤC E

Biến đổi Laplace của các hàm thường gặp

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

TT	Ảnh biến đổi Laplace $X(s)$	Hàm gốc $x(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^n}; n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3.	$\frac{1}{s^\alpha}; \alpha > 0$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{(s-a)^n}; n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
6.	$\frac{1}{(s-a)^\alpha}; \alpha > 0$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{at}$
7.	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
9.	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$
10.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
11.	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$

12.	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
13.	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$
14.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
15.	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$
16.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$
17.	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$
18.	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2} at \sin at$
19.	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
20.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cosh at - \sinh at}{2a^3}$
21.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \sinh at}{2a}$
22.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh at + at \cosh at}{2a}$
23.	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2} at \sinh at$

24.	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
25.	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at}{8a^5}$
26.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t \sin at - at^2 \cos at}{8a^3}$
27.	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at}{8a^3}$
28.	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{3t \sin at + at^2 \cos at}{8a}$
29.	$\frac{s^4}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sin at + 5at \cos at}{8a}$
30.	$\frac{s^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(8 - a^2 t^2) \cos at - 7at \sin at}{8}$
31.	$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sin at}{2a}$
32.	$\frac{s^3 - 3a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cos at$
33.	$\frac{s^4 - 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 \cos at$
34.	$\frac{s^3 - a^2 s}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sin at}{24a}$
35.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at - 3at \cosh at}{8a^5}$

36.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at^2 \cosh at - t \sinh at}{8a^3}$
37.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at \cosh at + (a^2 t^2 - 1) \sinh at}{8a^3}$
38.	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{3t \sinh at + at^2 \cosh at}{8a}$
39.	$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at + 5at \cosh at}{8a}$
40.	$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(8 + a^2 t^2) \cosh at + 7at \sinh at}{8}$
41.	$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sinh at}{2a}$
42.	$\frac{s^3 + 3a^2 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cosh at$
43.	$\frac{s^4 + 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 \cosh at$
44.	$\frac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sinh at}{24a}$
45.	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + e^{-3at/2} \right\}$
46.	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} at}{2} + \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} - e^{-3at/2} \right\}$
47.	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} \right)$

48.	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2} \left\{ e^{3at/2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} \right\}$
49.	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + e^{3at/2} \right\}$
50.	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} \right)$
51.	$\frac{1}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{4a^3} \{ \sin at \cosh at - \cos at \sinh at \}$
52.	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$
53.	$\frac{s^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a} \{ \sin at \cosh at + \cos at \sinh at \}$
54.	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \cosh at$
55.	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} \{ \sinh at - \sin at \}$
56.	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} \{ \cosh at - \cos at \}$
57.	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} \{ \sinh at + \sin at \}$
58.	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} \{ \cosh at + \cos at \}$
59.	$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi^3}}$
60.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$

61.	$\frac{1}{\sqrt{s(s-a)}}$	$\frac{e^{at} \operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
62.	$\frac{1}{\sqrt{s-a+b}}$	$e^{at} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - be^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right\}$
63.	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
64.	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
65.	$\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}; n > -1$	$a^n J_n(at)$
66.	$\frac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^n}{\sqrt{s^2-a^2}}; n > -1$	$a^n I_n(at)$
67.	$\frac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
68.	$\frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\eta(t-b)J_0(a\sqrt{t^2-b^2})$
69.	$\frac{1}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$\frac{tJ_1(at)}{a}$
70.	$\frac{s}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$tJ_0(at)$
71.	$\frac{s^2}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$J_0(at) - tJ_1(at)$
72.	$\frac{1}{s(e^s-1)} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$	$x(t) = n, n \leq t < n+1, n = 0, 1, 2, \dots$

73.	$\frac{1}{s(e^s - r)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$	$x(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k ; [t] \text{ là phần nguyên của } t$
74.	$\frac{e^s - 1}{s(e^s - r)} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$	$x(t) = r^n , n \leq t < n+1, n = 0, 1, 2, \dots$
75.	$\frac{e^{-s/a}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
76.	$\frac{e^{-s/a}}{\sqrt{s^3}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
77.	$\frac{e^{-s/a}}{s^{\alpha+1}} ; \alpha > -1$	$\left(\frac{t}{a}\right)^{\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{at})$
78.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
79.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
80.	$\frac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
81.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
82.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
83.	$\frac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{\alpha+1}} ; \alpha > -1$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} a^{2\alpha+1}} \int_0^{\infty} u^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{4a^2t}} J_{2\alpha}(2\sqrt{u}) du$
84.	$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$

85.	$\frac{1}{2s} \ln\left(\frac{s^2 + a^2}{a^2}\right)$	$\text{Ci}(at)$
86.	$\frac{1}{s} \ln\left(\frac{s+a}{a}\right)$	$\text{Ei}(at)$
87.	$-\frac{\gamma + \ln s}{s}$	$\ln t$; γ là hằng số Euler
88.	$\ln\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$	$\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
89.	$\frac{\pi^2}{6s} + \frac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$	$\ln^2 t$; γ là hằng số Euler
90.	$\frac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$
91.	$\frac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{\pi^2}{6}$
92.	$\frac{\Gamma(\alpha + 1) - \Gamma(\alpha + 1)s}{s^{\alpha+1}}$; $\alpha > -1$	$t^\alpha \ln t$
93.	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin at}{t}$
94.	$\frac{1}{s} \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\text{Si}(at)$
95.	$\frac{e^{a/s}}{\sqrt{s}} \text{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\frac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
96.	$e^{s^2/4a^2} \text{erfc}(s/2a)$	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t^2}$
97.	$\frac{e^{s^2/4a^2} \text{erfc}(s/2a)}{s}$	$\text{erf}(at)$
98.	$\frac{e^{as}}{\sqrt{s}} \text{erfc}(\sqrt{as})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$

99.	$e^{as} \text{Ei}(as)$	$\frac{1}{t+a}$
100.	$\frac{\cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} - \sin as \text{Ci}(as)}{a}$	$\frac{1}{t^2 + a^2}$
101.	$\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} + \cos as \text{Ci}(as)$	$\frac{t}{t^2 + a^2}$
102.	$\frac{\cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} - \sin as \text{Ci}(as)}{s}$	$\arctan(t/a)$
103.	$\frac{\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} + \cos as \text{Ci}(as)}{s}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$
104.	$\left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\}^2 + \text{Ci}^2(as)$	$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$
105.	1	$\delta(t)$ - hàm Dirac
106.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
107.	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\eta(t-a)$
108.	$\frac{1 \sinh xs}{s \sinh as}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
109.	$\frac{1 \sinh xs}{s \cosh as}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
110.	$\frac{1 \cosh xs}{s \sinh as}$	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
111.	$\frac{1 \cosh xs}{s \cosh as}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$

112.	$\frac{1}{s^2} \frac{\sinh xs}{\sinh as}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
113.	$\frac{1}{s^2} \frac{\sinh xs}{\cosh as}$	$x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
114.	$\frac{1}{s^2} \frac{\cosh xs}{\sinh as}$	$\frac{t^2}{2a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{n\pi t}{a}\right)$
115.	$\frac{1}{s^2} \frac{\cosh xs}{\cosh as}$	$t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
116.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
117.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
118.	$\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\sinh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
119.	$\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \cos \frac{n\pi x}{2a}$
120.	$\frac{1}{s} \frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \sin \frac{n\pi x}{2a}$
121.	$\frac{1}{s} \frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
122.	$\frac{1}{s^2} \frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}}\right) \sin \frac{n\pi x}{2a}$

123.	$\frac{1}{s^2} \frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{x^2 - a^2}{2} + t - \frac{16a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
124.	$\frac{1}{s} \frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ là các nghiệm dương của $J_0(\lambda) = 0$
125.	$\frac{1}{s^2} \frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{x^2 - a^2}{4} + t + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ là các nghiệm dương của $J_0(\lambda) = 0$
126.	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	
127.	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	
128.	$\frac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2} \cosh\left(\frac{as}{2}\right)$	
129.	$\frac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	
130.	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	
131.	$\frac{e^{-as}}{s} (1 - e^{-bs})$	$\eta(t-a) - \eta(t-a-b)$
132.	$\frac{1}{s(1 - e^{-as})}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n [\eta(t - (n-1)a) - \eta(t - na)]$

133.	$\frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s(1 - e^{-s})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 [\eta(t-n) - \eta(t-(n+1))]$
134.	$\frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-as})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} r^n [\eta(t-n) - \eta(t-(n+1))]$
135.	$\frac{\pi a(1 + e^{-as})}{a^2 s^2 + \pi^2}$	$(\eta(t) - \eta(t-a)) \sin \frac{\pi t}{a}$

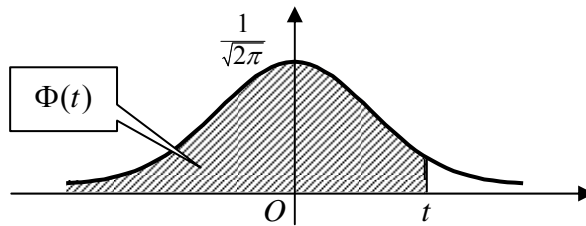
PHỤ LỤC F

GIÁ TRỊ HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT PHÂN BỐ CHUẨN TẮC $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2370	2347	2320	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	00080	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

GIÁ TRỊ HÀM PHÂN BỐ CHUẨN TẮC $N(0;1)$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7156	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8132
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	0,9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9712	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	0,9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	0,9987	9990	9993	9995	9996	9997	9998	9999	9999	9999