HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

TS. Hoàng Phi Dũng

(Soạn theo đề cương mới và Giáo trình Đại số của PGS. TS. Lê Bá Long)

TOÁN CAO CẤP 2

(Dành cho hệ đại học ngành Quản trị kinh doanh, Kế toán, Tài chính, Marketing, Đa phương tiện, Thương mại điện tử, Fintech…)

BẢN NHÁP

LỜI NÓI ĐẦU

Toán cao cấp 2 là một trong các môn học trong chương trình toán đại cương dành cho sinh viên các nhóm ngành đa phương tiện và nhóm ngành thuộc khối kinh tế, nội dung môn Toán cao cấp 2 giới thiệu chủ yếu về Đại số tuyến tính. Đặc biệt, trong thời kỳ sôi động hiện nay của công nghệ, khi khoa học dữ liệu và trí tuệ nhân tạo ngày càng bùng nổ thì Toán học nói chung và Đại số tuyến tính nói riêng trở nên cần thiết hơn bao giờ hết. Đại số tuyến tính trở thành công cụ và ngôn ngữ không thể thiếu của các ngành công nghệ, kinh tế, khoa học dữ liệu hay học máy.

Có khá nhiều giáo trình, sách và tài liệu tham khảo của nhiều trường đại học đã viết về môn học cơ bản này. Tuy nhiên xuất phát từ nhu cầu ứng dụng toán học và thực tế giảng dạy đối với các ngành công nghệ, đa phương tiện và các ngành kinh tế như: Quản trị kinh doanh, Kế toán, Tài chính, Marketing, Fintech, Multimedia và đặc biệt các ngành mới như: Thương mại điện tử, Kinh tế số, Marketing số, thì hiện nay chúng ta cần có tài liệu phù hợp với chương trình đào tạo của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (PTIT), vậy nên chúng tôi đã biên soạn giáo trình này.

Giáo trình được biên soạn theo đề cương mới thay đổi năm 2022 của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông. Nội dung của giáo trình được tổng kết từ bài giảng của tác giả trong nhiều năm trở lại đây, đồng thời dựa trên giáo trình Đại số của PGS. TS. Lê Bá Long đã được giảng dạy tại PTIT nhiều năm nay và có tham khảo các giáo trình của các trường đại học kinh tế khác cùng với một số sách về Toán kinh tế của nước ngoài. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường, các ngành đại học và cao đẳng kinh tế.

Giáo trình gồm 4 chương:

Chương I: Ma trận và định thức.

Chương II: Hệ phương trình tuyến tính.

Chương III: Không gian vec tơ.

Chương IV: Phép biến đổi tuyến tính.

Trong các chương đều có phần ứng dụng vào các mô hình kinh tế, chẳng hạn: Giới thiệu về ma trận Markov để nghiên cứu thị trường và khách hàng, giới thiệu về mô hình cân bằng cung – cầu của thị trường và mô hình Input-Output của Leontief để nghiên cứu kinh tế vĩ mô. Bên cạnh đó, mô hình tăng trưởng dân số và mô hình hồi quy tuyến tính đơn giản được giới thiệu để nghiên cứu một số bài toán dữ liệu.

Ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, toán học còn được xem là một ngành khoa học có phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Các phương pháp này đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông.

Trong giáo trình, kiến thức của các chương có một mối liên kết chặt chẽ, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy học viên cần thấy được mối liên hệ giữa các chương. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Các khái niệm thường được khái quát hoá từ những kết quả của hình học giải tích ở phổ thông. Chẳng hạn một số kiến thức về vec tơ, các phép toán vec tơ trong mặt phẳng toạ độ 2 chiều và 3 chiều đã có ở chương trình phổ thông.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cám ơn vì điều đó.

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Khoa Cơ bản 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành tập tài liệu này.

Hà Nội, 2023.

TS. Hoàng Phi Dũng

Khoa cơ bản 1

Học Viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Ma trận là một đối tượng cơ bản của môn đại số, cho nên, ma trận có mặt khắp nơi, trong toán học cũng như trong các ngành khoa học khác. Nói riêng, ma trận được sử dụng rộng rãi trong các chuyên ngành khác nhau của toán học, chẳng hạn như: trong các bài toán cực trị của hàm nhiều biến, đạo hàm hàm hợp, ma trận Jacobi trong phép đổi biến số, hệ phương trình vi phân tuyến tính, trong mô hình hồi quy, tăng trưởng dân số, chuỗi Markov...

1.1. MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.1: *Một bảng số có m hàng n cột có dạng*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1)}$$

được gọi là một ma trận cỡ $m\times n$.

a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j.

Khi $a_{ij}\in\mathbb{R},\forall i,j$ thì A được gọi là ma trận nguyên, $a_{ij}\in\mathbb{C},\forall i,j$ thì A được gọi là ma trận phức. Nếu không chỉ rõ a_{ij} thì ta quy ước A là ma trận thực.

Ma trận A cỡ $m\times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hay} \quad A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Khi $m=n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ví dụ 1.1: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2×3.

Hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'}$ bằng nhau khi cùng cỡ và có các phần tử tương ứng đều bằng nhau:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m=m' \\ n=n' \\ a_{ij}=b_{ij},\ \forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{1.3}$$

1.1.2 Các phép toán ma trận

a. Phép cộng ma trận

Cho hai ma trận cùng cỡ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

Tổng của hai ma trận A,B là ma trận cùng cỡ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A+B=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \text{ với mọi } i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Ví dụ 1.2: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

b. Phép nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$, và số thực k. Ta định nghĩa và ký hiệu:

$$kA=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n} \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.3: $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 1.4: Tìm x,y,z và w nếu: $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$.

Giải: Theo (3.4) và (3.5) ta được $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$.

Theo (3.3) ta có $\begin{cases} 3x=x+4 \\ 3y=x+y+6 \\ 3z=z+w-1 \\ 3w=2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ 2y=x+6 \\ 2z=w-1 \\ w=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \\ w=3 \end{cases}$

<u>Tính chất 1.1</u>: Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

2) Ma trận có các phần tử đều bằng 0 gọi là ma trận không và ký hiệu $\mathbf{0}$.

   Khi đó: $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$;

3) $A+(-A)=\mathbf{0}$, trong đó $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$;

4) $A+B=B+A$.

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực k,h với mọi ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$:

5) $k(A+B)=kA+kB$;

6) $(k+h)A=kA+hA$;

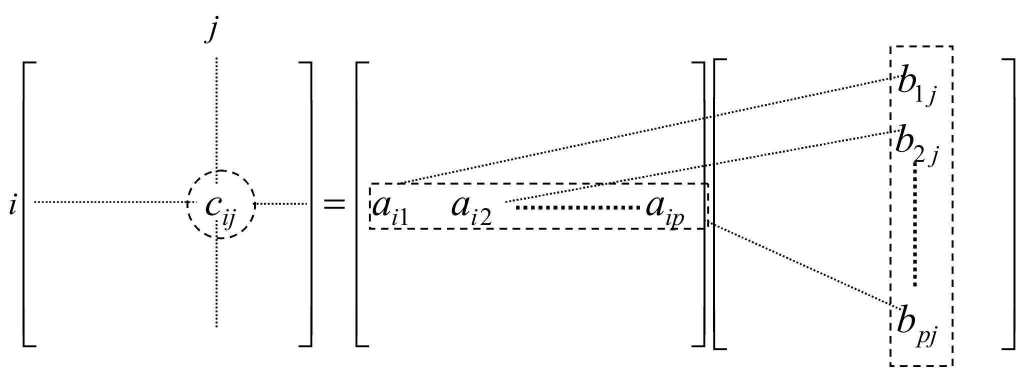
7) $k(hA)=(kh)A$;

c. Phép nhân ma trận

<u>Định nghĩa 1.2</u>: *Tích hai ma trận* $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ *và* $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ *là ma trận cỡ* $m\times n$ *được ký hiệu và định nghĩa bởi* $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, *trong đó*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \text{ với mọi } i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Vậy phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ i của A với các phần tử tương ứng của cột thứ j của B.



<u>Ví dụ 1.5</u>: $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 7 & 17\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8 & -4\\3 & 12 & -6\end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B định nghĩa được khi số cột của A bằng số hàng của B. Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A.

Khi A,B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời AB và BA. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB = BA$, nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán. Chẳng hạn, xét

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \dots & 0\\2 & 3 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & 0 & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \dots & 0\\3 & 0 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & 0 & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0 & \dots & 0\\11 & 4 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & 0 & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \neq BA=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0 & \dots & 0\\-3 & 0 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & 0 & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Tính chất 1.2: Giả sử A,B,C là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được thì ta có các đẳng thức:

1) $A(BC)=(AB)C$ *tính kết hợp.*

2) $A(B+C)=AB+AC$ *tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.*

3) $(B+C)A=BA+CA$ *tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.*

4) Với mọi $k\in\mathbb{R}$, $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

5) Với mọi số tự nhiên dương n ta xét ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó với mọi ma trận A cỡ $m \times n$ ta có

$$I_m A = A = AI_n. \tag{1.7}$$

Ma trận I_n được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Khác với phép nhân các số thực, đó là tích hai số khác 0 là một số khác 0, ta có thể tìm được hai ma trận khác $\mathbf{0}$ có tích là ma trận $\mathbf{0}$. Chẳng hạn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A, B \neq \mathbf{0}$ nhưng $AB = \mathbf{0}$.

d. Luỹ thừa của một ma trận

Với mọi ma trận A vuông cấp n. Ta định nghĩa luỹ thừa của A như sau:

$$A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k\ lan}, \tag{1.8}$$

trong đó $A^0 = I$, $A^1 = A$.

<u>**Ví dụ 1.6**</u>: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Ta có:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 22 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Với ma trận đơn vị thì $I^k = I$ với mọi số nguyên dương k. Những ma trận vuông A thoả mãn $A^m = 0$ thì được gọi là ma trận luỹ linh.

e. Ma trận chuyển vị

<u>**Định nghĩa 1.3**</u>: *Cho ma trận A cỡ $m \times n$,* nếu *ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n \times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên A, ký hiệu A^T*

$$A^T = \left[c_{ij}\right]_{n\times m} : c_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ i = \overline{1,n}\ ; j = \overline{1,m}\ . \qquad \textbf{(1.9)}$$

<u>**Ví dụ 1.7**</u>: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

<u>**Tính chất 1.3**</u>:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2) $(cA)^T = cA^T$.

3) $(AB)^T = B^T A^T$.

<u>**Định nghĩa 1.4**</u>:

1) *Nếu* $A = A^T$ *thì* A *được gọi là ma trận đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).

2) $A = -A^T$ *thì* A *được gọi là phản đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0).

<u>**Ví dụ 1.8**</u> : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \pi \\ -\sqrt{2} & \pi & -3 \end{bmatrix}$ là một ma trận đối xứng.

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là một ma trận phản đối xứng nếu $a = d = 0, b = -c$. Tức là khi đó

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2. ĐỊNH THỨC

1.2.1 Định nghĩa

a. Hoán vị và phép thế

<u>**Định nghĩa 1.5**</u>:

1) *Mỗi song ánh* $\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ *được gọi là một phép thế bậc n.*

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1,2,...,n$ sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

2) *Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị.* Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng

$$\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

3) *Dấu của phép thế:*

Mỗi cặp $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ được gọi là một *nghịch thế* của phép thế σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k \qquad \textbf{(1.10)}$$

Như vậy phép thế lấy dấu + hoặc – nếu số các nghịch thế tương ứng là chẵn hoặc lẻ.

Ta dễ dàng kiểm chứng được rằng tập các phép thế bậc n với luật hợp thành là phép hợp của hai ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán, gọi là *nhóm đối xứng bậc n,* ký hiệu S_n.

Trong chương 1 ta đã biết tập S_n có đúng $n!$ phần tử. Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

<u>Ví dụ 1.9</u>: Hoán vị $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ có một nghịch thế là cặp (2, 3). Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^1 = -1$.

Để tìm số các nghịch thế k của phép thế σ ta thực hiện các bước sau:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1) = 1$.

♦ Gọi k_1 là số các số trong $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_1) = 1$; (k_1 là số các nghịch thế ứng với 1).

♦ Xoá số $\sigma(i_1) = 1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2) = 2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_2) = 2$; (k_2 là số các nghịch thế ứng với 2).

♦ Xoá số $\sigma(i_2) = 2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là:

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$$

Ví dụ 1.10: 1) Hoán vị $\begin{bmatrix}3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *có* $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$.

Vậy $k = k_1 + k_2 + k_3 = 3 + 2 + 0 = 5$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$.

2) Hoán vị $\begin{bmatrix}4 & 2 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ *có* $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, xóa 1, 2 $\Rightarrow k_3 = 2$, $k_4 = 0$.

Vậy $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 6$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^6 = 1$.

Tính chất 1.4:

1) Cặp $(i, j), i \neq j$ là một nghịch thế của phép thế σ (nghĩa là $i < j$ và $\sigma(i) > \sigma(j)$) khi và chỉ khi dấu của $\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ bằng -1. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1 \le i \neq j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}\right). \qquad \textbf{(1.11)}$$

2) Phép thế chuyển vị $\sigma = \begin{bmatrix}i_0 & j_0\end{bmatrix}$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma = \begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & i_0 & \ldots & j_0 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j_0 & \ldots & i_0 & \ldots & n\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.12)}$$

Dễ dàng tính được: $k_1 = \ldots = k_{i_0 - 1} = 0$, $k_{i_0} = j_0 - i_0$,

$k_{i_0 + 1} = \ldots = k_{j_0 - 1} = 1$, $k_{j_0} = \ldots = k_n = 0 \;\Rightarrow\; k = 2(j_0 - i_0) - 1$

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = -1$.

3) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\mu . \qquad \textbf{(1.13)}$$

4) Với mọi phép thế chuyển vị $\begin{bmatrix}i_0 & j_0\end{bmatrix}$ (xem 4.3) và phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma \circ \begin{bmatrix}i_0 & j_0\end{bmatrix} = -\operatorname{sgn}\sigma .$$

b. Định nghĩa định thức

Trước hết ta liên hệ đến khái niệm định thức cấp 2 đã biết khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \ , \ D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc' \ , \ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca' .$$

Các định thức này được xác định là tích 2 phần tử của đường chéo thứ nhất trừ tích 2 phần tử của đường chéo thứ hai.

Như vậy định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Mặt khác nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = 1, \ \operatorname{sgn}\sigma_2 = -1$. Vậy (1.14) có thể viết lại

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma_1 \, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2 \, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} .$$

Mở rộng kết quả này ta có định nghĩa định thức của ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau:

<u>Định nghĩa 1.6</u>: *Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ được ký hiệu là*

$\det A$ *hay* $|A|$ *và định nghĩa bởi biểu thức:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \qquad \textbf{(1.15)}$$

Như vậy định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ là tổng tất cả các tích gồm n phần tử trên n hàng mà ở trên n cột khác nhau của ma trận A và nhân với dấu của phép thế tương ứng.

<u>Ví dụ 1.11</u>: Nhóm đối xứng S_3 có 6 phần tử là:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ , \ \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \ \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = 1$, $\operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$. Vậy

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} . \end{aligned} \qquad \textbf{(1.16)}$$

<u>Ví dụ 1.12</u>: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & y & 4 \\ z & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12y + 3x + 20z - xyz - 8 - 90 = 3x + 12y + 20z - xyz - 98 .$

<u>Ví dụ 1.13</u>: Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix}$ có $\operatorname{sgn}\sigma_0 = (-1)^0 = 1$.

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) \neq k \Longrightarrow$ tồn tại k' sao cho $\sigma(k') < k' \Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)} = 0$. Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_0 \cdot a_{11}...a_{nn} = a_{11}...a_{nn} . \qquad \textbf{(1.17)}$$

Tương tự

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \bigcirc & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}...a_{nn} . \qquad \textbf{(1.18)}$$

Ví dụ 1.14: $\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -7 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-7)\cdot(-1)\cdot 3 = 42$.

Ví dụ 1.15: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 3 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} xyz = -xyz$.

1.2.2 Các tính chất cơ bản của định thức

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu:

Ví dụ 1.16: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng:

Cho hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ và ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của A và B, các hàng khác hàng thứ k của ba ma trận này bằng nhau.

Nghĩa là $\begin{cases} c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} \text{ nếu } i \neq k \\ c_{kj} = \alpha a_{kj} + \beta b_{kj}; \qquad \text{với mọi } j = 1,...,n. \end{cases}$

thì $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$.

Ví dụ 1.17: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một định thức có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0.

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi.

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó: $\det A^T = \det A$.

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Với tính chất này tất cả các kết quả của định thức đúng đối với hàng có thể chuyển thành tính chất đúng đối với cột. Chẳng hạn, tính chất 4) chuyển

thành tính chất đối với cột như sau: nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.

7) Định thức của mọi hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính của không gian véc tơ n chiều đều bằng 0.

8) Với hai ma trận vuông cùng cấp A, B bất kỳ luôn có

$$\det AB = \det A \det B \qquad \textbf{(1.19)}$$

1.2.3 Một số phương pháp tính định thức

a. Khai triển theo hàng, theo cột

Định nghĩa 1.7: Giả sử M_{ij} *là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận* A *thì* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ *được gọi là phần bù đại số của* a_{ij}.

Định lý 1.1: (Laplace) *Định thức của ma trận* A *được tính theo một trong hai công thức:*

a. ***Khai triển của*** $\det A$ ***theo cột thứ j***:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad \textbf{(1.20)}$$

b. ***Khai triển của*** $\det A$ ***theo hàng thứ i***:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad \textbf{(1.21)}$$

b. Sử dụng tính chất cộng hàng và cột để đưa ma trận về dạng tam giác

Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi. Từ đó, thực hiện cộng tổ hợp tuyến tính các hàng hay cột để đưa ma trận về dạng tam giác trên hoặc tam giác dưới và tính định thức.

Ví dụ 1.18: Tính $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{-4h_1+h_2\to h_2 \\ -7h_1+h_3\to h_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \overset{-2h_2+h_3\to h_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Nhận xét: Ta có thể kết hợp hai phương pháp. Cụ thể như sau:

- Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng 0 hoặc dễ triệt tiêu.
- Thực hiện các phép biến đổi (cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác) để triệt tiêu các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn.
- Khai triển theo hàng hoặc cột đã triệt tiêu.

Giải thích: Công thức khai triển theo cột thứ j và công thức khai triển theo hàng thứ i cho phép tính định thức cấp n theo tổng các định thức cấp $n-1$ dạng $a_{ij}A_{ij}$, trong đó việc chọn hàng thứ i và cột thứ j là tùy ý. Nếu ở hàng thứ i hoặc cột j mà $a_{ij}=0$ thì $a_{ij}A_{ij}=0$.

Ví dụ 1.19: $$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\overset{\substack{-c_1+c_3\to c_3\\-2c_1+c_4\to c_4}}{=}\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&0&0&0\\3&-1&-4&-6\\1&2&-1&-7\end{vmatrix}$$

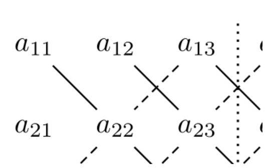
Khai triển theo hàng thứ 2 ta được $D=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&-4&-6\\2&-1&-7\end{vmatrix}$.

Tiếp tục triệt tiêu hàng thứ nhất của định thức trên ta có

$$D=-\begin{vmatrix}2&0&0\\-1&-3&-5\\2&-3&-9\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-3&-5\\-3&-9\end{vmatrix}=(-2)(-3)\begin{vmatrix}1&-5\\1&-9\end{vmatrix}=6(-9+5)=-24.$$

c. Quy tắc Sarrus tính định thức cấp 3:

Định thức cấp 3 được tính theo quy tắc sau: Với ma trận $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ thì ta viết sơ đồ sau:



và từ đó ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Cách nhớ: **Dấu dương:** Các đường chéo có gạch đậm.

Dấu âm: Các đường chéo có gạch đứt.

Ví dụ 1.20: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 + 120 - 0 - 6 - 32 = 78$.

d. Khai triển Laplace

Từ ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý k hàng: $i_1 < ... < i_k$ và k cột: $j_1 < ... < j_k$.

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1,..., i_k$ và k cột $j_1,..., j_k$ thì ta có ma trận con cấp $n-k$. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ và

$$A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\,\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{1.22}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Ví dụ 1.21: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$

$$M_{13}^{25} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}^{25} = (-1)^{1+3+2+5} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Định lý 1.4 (Laplace):

1) Khai triển k hàng $i_1 < \ldots < i_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{1.23}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1 < \ldots < i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển k cột $j_1 < \ldots < j_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{1.24}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1 < \ldots < j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi $k = 1$ ta có công thức khai triển theo hàng và theo cột (1.20), (1.21).

Ví dụ 1.22: Tính $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 2 & 2 \\ g & h & -1 & -4 & -6 \\ i & j & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 24(ad - bc)$.

1.3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.3.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo. Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

a. Định nghĩa 1.8: *Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.*

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

b. Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Mệnh đề 1.3: (điều kiện cần) *Nếu A khả nghịch thì $\det A \neq 0$ (ta nói ma trận A không suy biến).*

Chứng minh: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$.

Do đó $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$.

Định nghĩa 1.8: *Ma trận* $B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$, *trong đó* A_{ij} *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij} *của ma trận* $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, *được gọi là ma trận phụ hợp của* A.

Định lý 1.4: (điều kiện đủ) *Nếu* $\det A \neq 0$ *thì* A *khả nghịch và*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T, \qquad \textbf{(1.22)}$$

với B *là ma trận phụ hợp của* A.

Chứng minh: Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \dots + a_{kn}A_{kn} = \det A.$$

Vì vậy tổng $a_{i1}A_{k1} + \dots + a_{in}A_{kn}$ là khai triển theo hàng thứ k của định thức của ma trận có được bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i của A, do đó bằng 0 (vì hàng thứ k và hàng thứ i bằng nhau). Vậy

$$a_{i1}A_{k1} + \dots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^T = (\det A)I.$$

Tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow B^T A = (\det A)I.$$ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Hệ quả 1.5: *Nếu* $BA = I$ *hoặc* $AB = I$ *thì tồn tại* A^{-1} *và* $A^{-1} = B$.

Chứng minh: $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

1.3.2 Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

a. Phương pháp ma trận phụ hợp

Phương pháp này sử dụng Định lý 1.4 để tìm ma trận nghịch đảo. Chẳng hạn, với ma trận vuông cấp 2, ta có kết quả sau:

<u>Hệ quả 1.6</u>: *Ma trận* $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *vuông cấp 2 với định thức* $|A|=ad-bc\neq 0$ *có ma trận nghịch đảo là* $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 1.24</u>: $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 1.25</u>: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A=-1$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=40$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-13$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=-16$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=5$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-9$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1$,

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 1.26</u>: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có $\det A=-56$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-13$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-14$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=18$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-29$,

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{-56}\begin{bmatrix} 7 & -13 & -5 \\ -14 & 2 & 18 \\ 7 & 3 & -29 \end{bmatrix}^t=-\dfrac{1}{56}\begin{bmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -13 & 2 & 3 \\ -5 & 18 & -29 \end{bmatrix}$.

b. Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị I. Các phép biến đổi sơ cấp bao gồm :

a) *Đổi chỗ cho nhau hai hàng của ma trận.*

b) *Nhân vào một hàng của ma trận một số khác* 0.

c) *Cộng vào một hàng của ma trận một tổ hợp tuyến tính các hàng khác*.

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$$A|I \to \dots\dots\dots \to I|A^{-1}. \tag{1.23}$$

Ví dụ 1.27: Tìm A^{-1} với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right.\xrightarrow[\substack{-2h_1+h_2\to h_2\\-h_1+h_3\to h_3}]{h_1\to h_1}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{h_2\to h_2\\2h_2+h_3\to h_3}]{h_1\to h_1}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right.\xrightarrow[\substack{h_2\to h_2\\-h_3\to h_3}]{h_1\to h_1}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{3h_3+h_2\to h_2\\h_3\to h_3}]{-3h_3+h_1\to h_1}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.\xrightarrow{-2h_2+h_1\to h_1}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$.

Nhận xét: Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên (thường gặp khi $\det A=\pm 1$).

1.4. HẠNG CỦA MA TRẬN

1.4.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Định nghĩa 1.9: *Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác không của ma trận A.*

Chú ý : Từ định nghĩa, ta thấy rằng hạng $r(A) = p$ nếu :

1. Mọi định thức con cấp lớn hơn $p+1$ của ma trận A đều bằng 0 ;
2. Tồn tại một định thức con cấp p của ma trận A khác 0.

Ví dụ 1.28: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ có hạng là 2 bởi vì tất cả các định thức con cấp 3 đều bằng 0 (các định thức con cấp 3 đều có hàng thứ ba bằng 0) và tồn tại định thức cấp 2 khác 0, chẳng hạn $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$.

Ví dụ 1.29: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ có :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20 \text{ và } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 7 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 9 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Do đó $r(A) = 2$.

1.4.2 Các tính chất của hạng ma trận

a. Hạng của ma trận không vượt quá số hàng và số cột của nó, tức là $r(A) \le \min\{m,n\}$.

b. Hạng của ma trận bằng hạng của ma trận chuyển vị của nó, tức là $r(A^T) = r(A)$.

c. Hạng của ma trận không thay đổi nếu ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên ma trận đó. Nhắc lại các phép biến đổi sơ cấp gồm :

   1) *Đổi chỗ cho nhau hai hàng của ma trận.*

   2) *Nhân vào một hàng của ma trận một số khác* 0.

   3) *Cộng vào một hàng của ma trận một tổ hợp tuyến tính các hàng khác.*

d. Nếu A là ma trận bậc thang theo hàng thì hạng $r(A)$ bằng số hàng khác không của nó.

Ma trận bậc thang: Là những ma trận có hai tính chất sau:

1. Các hàng khác không (có phần tử khác 0) luôn ở trên các hàng không (tất cả các phần tử đều bằng 0).
2. Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

<u>**Ví dụ 1.30:**</u> $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Dễ thấy $r(A)=3, r(B)=2$.

1.4.3 Tính hạng ma trận bằng phương pháp khử Gauss

Từ tính chất của hạng, ta thấy rằng để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các hàng (có thể biến đổi theo các cột) để đưa ma trận về dạng bậc thang. Khi đó số các véc tơ hàng khác 0 là hạng của ma trận.

<u>**Ví dụ 1.31:**</u> Tìm hạng bằng biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận về dạng bậc thang:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[h_1+h_3\to h_3]{-2h_1+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{7}h_2+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vậy $r(A)=2$.

<u>**Ví dụ 1.32**</u>:

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ a & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_4\\ c_2\to c_5\\ c_3\to c_1\\ c_4\to c_2\\ c_5\to c_3}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & a & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & a\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_1\\ c_1+c_2\to c_2\\ -c_1+c_3\to c_3\\ c_1+c_4\to c_4\\ -2c_1+c_5\to c_5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & a+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3-2a)c_2 - 3c_3 + 2c_5 \to c_5]{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_2 \to c_3 \\ c_3 \to c_2 \\ -(a+3)c_2 + (a+1)c_3 + 2c_4 \to c_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 2-2a \end{bmatrix}$$

Vậy $r(B) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } a \neq 1 \\ 3 & \text{nếu } a = 1 \end{cases}$.

<u>Ví dụ 1.33</u>: Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ nhưng } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Bao định thức này bởi định thức cấp 3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Định thức cấp 4 chính là định thức $|B| = 0$.

Vậy $r(B) = 3$.

<u>Ví dụ 1.34</u>: Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = (a+3)(a-1)^3$.

Vậy:
- Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(A) = 4$;
- Khi $a = 1$ thì $r(A) = 1$;
- Khi $a = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.

1.5. GIỚI THIỆU ỨNG DỤNG VỀ TÍNH LUỸ THỪA CỦA MA TRẬN MARKOV

Bài toán tính luỹ thừa của một ma trận vuông là như sau: Cho ma trận A vuông cấp n. Tính luỹ thừa A^k, trong đó k là một số nguyên dương.

Bài toán trên liên quan chặt chẽ đến khái niệm chuỗi Markov, sẽ được thiết lập ở phần dưới đây.

Trong kinh tế và trong kỹ thuật có một số loại ứng dụng liên quan đến một tập hữu hạn các trạng thái $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ của một hệ thống hoặc một quần thể. Chẳng hạn, cư dân của một thành phố có thể sống ở trung tâm thành phố hoặc ở vùng ngoại thành; cử tri của nước Mỹ có thể bỏ phiếu cho Đảng Dân chủ, Đảng Cộng hòa hoặc độc lập (không bỏ phiếu cho ai); nước giải khát mà người tiêu dùng có thể sử dụng là Coca-Cola, Pepsi hoặc nhãn hiệu khác; Người tiêu dùng có thể lựa chọn một trong 3 nhà mạng di động lớn ở Việt Nam là Mobifone, Vinaphone và Viettel. Ta muốn nghiên cứu sự tương tác giữa các thành viên trong hệ thống này qua sự phân bố của các trạng thái. Thông thường, để đơn giản, ta ký hiệu tập trạng thái là $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Trong những ví dụ đầu tiên thì quần thể là tập hợp các cư dân trong một thành phố và thành viên là cư dân, trạng thái có hai trạng thái $E = \{1, 2\}$ với trạng thái 1 là cư dân sống ở trung tâm, trạng thái 2 là cư dân sống ở ngoại ô.

Ví dụ 1.35: Trong thị trường mạng di động của Việt Nam có 3 nhà mạng di động chính là Mobifone, Vinaphone và Viettel. Như vậy một người dân có thể dùng một trong 3 nhà mạng này. Vậy tập các trạng thái của người dân nhận là *E= {Mobi, Vina, Viettel}* mà ta mô hình hoá thành tập trạng thái $E = \{1, 2, 3\}$.

Xác suất để một thành viên của quần thể chuyển từ trạng thái thứ j sang trạng thái thứ i được biểu thị bằng một số p_{ij}, trong đó $0 \le p_{ij} \le 1$. Xác suất $p_{ij} = 0$ có nghĩa là thành viên nhất định không chuyển từ trạng thái thứ j sang trạng thái thứ i, trong khi xác suất $p_{ij} = 1$ có nghĩa là thành viên chắc chắn thay đổi từ trạng thái thứ j sang trạng thái thứ i.

Định nghĩa 1.10: Ma trận $P = [p_{ij}]$ với p_{ij} xác định như trên được gọi là ma trận chuyển trạng thái (còn gọi là ma trận xác suất chuyển).

Định nghĩa 1.11: Ma trận chuyển trạng thái $P = [p_{ij}]$ với p_{ij} thoả mãn các điều kiện

$$p_{ij} \ge 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

được gọi là ma trận Markov.

Ví dụ 1.36: $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$ và $Q = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}$ là các ma trận Markov.

Định nghĩa Chuỗi Markov: Một dãy các ma trận cột $\{X_n\}_n$ gồm các ma trận trạng thái có quan hệ với nhau theo phương trình $X_{k+1} = PX_k$, trong đó P là ma trận Markov, được gọi là một chuỗi Markov.

Chuỗi Markov được đặt theo tên nhà toán học người Nga Andrey Andreyevich Markov (1856–1922).

Bài toán về chuỗi Markov là: Cho trước ma trận trạng thái ban đầu X_0 và ma trận xác suất chuyển P. Tính X_k.

Ta có $X_1 = PX_0, X_2 = PX_1 = P^2X_0$... Bằng quy nạp, ta có định lý sau:

Định lý 1.5: *Ma trận trạng thái thứ k của chuỗi Markov là* $X_k = P^k X_0$.

<u>Ví dụ 1.37:</u> Quần thể cư dân của một thành phố sau khi được điều tra dân số và sự di dân sau một năm thì có số liệu như sau:

- Có 90% cư dân đang ở nội thành vẫn tiếp tục ở nội thành.
- Có 10% cư dân đang ở nội thành thì chuyển ra ngoại thành.
- Có 80% cư dân đang ở ngoại thành thì tiếp tục ở ngoại thành.
- Có 20% cư dân đang ở ngoại thành thì chuyển vào nội thành.

Tỷ lệ phân bố dân cư ban đầu là 50% nội thành và 50% ngoại thành. Hỏi sau 2 năm và 3 năm thì tỷ lệ phân bố dân cư là bao nhiêu?

Giải: Mỗi cư dân được chọn ở nội thành hoặc ngoại thành sau một thời gian. Vậy ta mô hình hoá hai trạng thái trên như sau:

- Ở nội thành, đặt là 1.
- Ở ngoại thành, đặt là 2.

Khi đó, ta có tập các trạng thái là $E = \{1,2\}$.

Theo giả thiết về sự di dân, ta có ma trận chuyển trạng thái là $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$ và ma trận trạng thái ban đầu là $X_0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

Tỷ lệ phân bố dân cư sau 2 năm là $X_2 = P^2X_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,585 \\ 0,415 \end{bmatrix}$.

Tỷ lệ phân bố dân cư sau 3 năm là $X_3 = P^3X_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6095 \\ 0,3905 \end{bmatrix}$.

Vậy sau 2 năm thì có 58,5% cư dân ở nội thành và 41,5 % cư dân ở ngoại thành, sau 3 năm thì có 60,95% cư dân ở nội thành và 39,05 % cư dân ở ngoại thành.

Ví dụ 1.38: Ba mạng di động cạnh tranh nhau với thị phần lần lượt là:

- Mạng thứ 1 chiếm 30% thị phần.
- Mạng thứ 2 chiếm 30% thị phần.
- Mạng thứ 3 chiếm 40% thị phần.

Biết rằng sau một năm thì số lượng khách hàng luân chuyển như sau

- Trong số các khách hàng của Mạng 1 thì có 10% khách hàng vẫn dùng Mạng 1, 20% khách hàng chuyển sang dùng Mạng 2 và 70% chuyển sang dùng Mạng 3.
- Trong số các khách hàng của Mạng 2 thì có 20% vẫn dùng Mạng 2, 20% khách hàng chuyển sang dùng Mạng 1 và 60% còn lại chuyển sang dùng Mạng 3.
- Trong số các khách hàng của Mạng 3 thì có 30% vẫn dùng Mạng 3, 10% khách hàng chuyển sang dùng Mạng 1 và 60% còn lại chuyển sang dùng Mạng 2.

a) Thiết lập ma trận chuyển trạng thái. Ma trận này có phải là ma trận Markov không?

b) Hỏi sau 2 năm thì thị trường mạng di động phân bố như thế nào?

Giải:

a) Theo giả thiết, ta có ma trận chuyển trạng thái là:

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Theo Định nghĩa 1.11, ta thấy ma trận trên là một ma trận Markov.

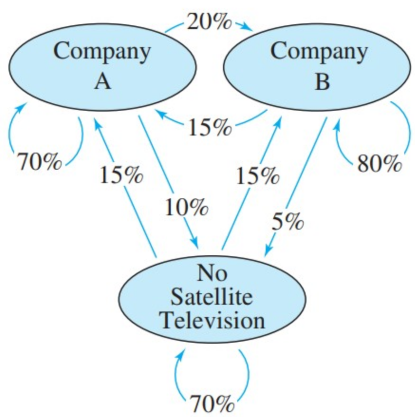
b) Theo giả thiết của bài toán, ta có ma trận trạng thái ban đầu là $X_0 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$. Áp dụng Định lý 1.5, ta có trạng thái ở thời điểm thứ 2 của thị trường là:

$$X_2 = P^2 X_0 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,404 \\ 0,460 \end{bmatrix}.$$

Vậy sau 2 năm, thị phần của thị trường mạng di động là như sau: Mạng 1 chiếm 13,6% thị phần, Mạng 2 chiếm 40,4% thị phần, Mạng 3 chiếm 46% thị phần.

Ta đến với ví dụ tiếp theo:

Ví dụ 1.38: Hai công ty cạnh tranh cung cấp dịch vụ truyền hình vệ tinh cho một thành phố có 100.000 hộ gia đình. Hình ảnh dưới cho thấy những thay đổi trong thuê bao vệ tinh mỗi năm. Công ty A hiện có 15.000 người đăng ký và Công ty B có 20.000 người đăng ký. Hỏi mỗi công ty sẽ có bao nhiêu thuê bao trong một năm?



Từ sơ đồ trên, ta có ma trận chuyển trạng thái là như sau:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & none \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 & 0,15 \\ 0,1 & 0,05 & 0,7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A \\ B \\ none \end{array}$$

Ma trận trạng thái ban đầu biểu diễn các phần trăm của tổng dân số trong ba trạng thái và là $X_0 = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,20 \\ 0,65 \end{bmatrix} \begin{array}{l} A \\ B \\ none \end{array}$. Để tìm ma trận trạng thái đại diện cho các phần dân số ở ba trạng thái trong một năm thì ta tính PX_0. Ta có:

$$X_1 = PX_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 & 0,15 \\ 0,1 & 0,05 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,20 \\ 0,65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2325 \\ 0,2875 \\ 0,4888 \end{bmatrix}.$$

Vậy trong một năm, Công ty A sẽ có 0,2325(100.000) = 23.250 người đăng ký và Công ty B sẽ có 0,2875(100.000) = 28.750 người đăng ký.

Ví dụ 1.39: Trong Ví dụ 1.35, hãy tìm số lượng thuê bao mỗi công ty truyền hình vệ tinh sẽ có sau thời gian: (a) 3 năm, (b) 5 năm.

(a) Để tìm số thuê bao sau 3 năm, trước tiên hãy tìm X_3. Ta có:

$$X_3 = P^3 X_0 \approx \begin{bmatrix} 0,3028 \\ 0,3904 \\ 0,3068 \end{bmatrix}.$$

Sau 3 năm, Công ty A sẽ có khoảng 0,3028(100.000) = 30.280 người đăng ký và Công ty B sẽ có khoảng 0,3904(100.000) = 39.040 người đăng ký.

(b) Để tìm số thuê bao sau 5 năm, tương tự, ta tìm X_5. Ta có:

$$X_5 = P^5 X_0 \approx \begin{bmatrix} 0,3241 \\ 0,4381 \\ 0,2378 \end{bmatrix}.$$

Sau 5 năm, Công ty A sẽ có khoảng 0,3241(100.000) = 32.410 người đăng ký và Công ty B sẽ có khoảng 0,4381(100.000) = 43.810 người đăng ký.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Tính:

a) $(A+B)+C$ b) $A+(B+C)$

c) A^T, B^T, C^T d) $A^T B$ e) BC^T.

1.2) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

a. Tính $3A + 4B - 2C$.

1.3) Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tính $A+B$, $A+C$, $3A-4B$.

Tính AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Tính A^T, $A^T C$, $D^T A^T$, $B^T A$, $D^T D$, DD^T.

1.4) Tính: a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

1.5) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$. Tính:

a) $A+B$ b) AB c) A^2

d) A^n

1.6) Chứng minh nếu $AB = BA$ thì với mọi số tự nhiên n > 0:

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k .$$

1.7) Tính: a) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}^5$ b) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^n$ c) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{1999}$

d) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n$ e) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_k\end{bmatrix}^n$ f) $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$.

1.8) Tính A^{100} với:

a) $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

1.9) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$ vuông cấp n. Ta gọi $\mathrm{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Chứng minh:

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$;

b) $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ (mặc dù $AB \neq BA$);

c) nếu $B = P^{-1}AP$ thì $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$;

d) không tồn tại ma trận A, B sao cho $AB - BA = I$.

1.10) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

a) Chứng minh A thoả mãn phương trình $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

b) Chứng minh $A^k = 0$ với số nguyên dương $k \geq 2$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

1.11) Cho $D = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\\ \vdots & \vdots\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$.

Tính DA và BD.

1.12) Hai ma trận A, B được gọi là giao hoán nếu $AB = BA$. Chứng minh rằng A giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp khi và chỉ khi A là ma trận vô hướng (nghĩa là $A = kI$).

1.13) Tìm tất cả các ma trận $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ giao hoán với $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.14) Tìm các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong các trường hợp sau:

a) $A^2 = 0$ b) $A^2 = I$

c) $c = 0$ và $A^n = I$ với n nào đó.

1.15) Cho A, B là hai ma trận cỡ $m \times n$. Chứng minh rằng $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

1.16) Tìm các ví dụ về hai ma trận A, B vuông cấp 2 thỏa mãn từng điều kiện sau:

a) $r(A+B) < r(A), r(B)$.

b) $r(A+B) = r(A) = r(B)$.

c) $r(A+B) > r(A), r(B)$.

1.17) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

1.18) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

1.19) Tính các định thức

a. $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$.

1.20) Tìm các giá trị của k sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

1.21) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{bmatrix}$.

1.22) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$.

1.23) Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$.

1.24) Không cần tính định thức, chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

1.25) Chứng minh a) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

b) $\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

1.26) Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.27) Các ma trận sau có khả nghịch không, nếu khả nghịch hãy tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.28) Cho $A = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t = 3$ tìm A^{-1}.

1.29) Cho $A = \begin{bmatrix} t+1 & 7 & 3 \\ -1 & t-1 & -2 \\ t-5 & 2t-5 & t-6 \end{bmatrix}$.

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t = 2$ tìm A^{-1}.

1.30) Có 3 thương hiệu dầu gội đầu A, B, C của 3 công ty khác nhau cùng khai thác một thị trường trong cùng một thời điểm. Một đội khảo sát thị trường đã tiến hành thống kê về tỉ lệ thay đổi thương hiệu của khách hàng trong mỗi tháng là như sau:

- Có 60% khách hàng tiếp tục sử dụng dầu gội A, 30% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội A sang dầu gội B, 10% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội A sang dầu gội C.
- Có 80% khách hàng tiếp tục sử dụng dầu gội B, 10% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội B sang dầu gội A, 10% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội B sang dầu gội C.
- Có 70% khách hàng tiếp tục sử dụng dầu gội C, 10% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội C sang dầu gội A, 20% khách hàng chuyển từ sử dụng dầu gội C sang dầu gội B.

Tại thời điểm khảo sát thì có 400 đang sử dụng dầu gội A, 300 người đang sử dụng dầu gội B và 300 người đang sử dụng dầu gội C.

a) Lập ma trận Markov P của thị trường 3 thương hiệu trên.

b) Sau 1 tháng và sau 2 tháng thì có bao nhiêu người dùng dầu gội A, bao nhiêu người dùng dầu gội B và bao nhiêu người dùng dầu gội C?

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Khi giải một số bài toán trong kinh tế thì hệ phương trình tuyến tính xuất hiện rất tự nhiên. Nó tương ứng với các mô hình kinh tế tuyến tính. Do sự phát triển của khoa học công nghệ nên các bài toán hệ phương trình tuyến tính ngày càng được ứng dụng rộng rãi hơn. Chẳng hạn trong phân tích thống kê của các lĩnh vực tâm lý học, xã hội học, kinh tế học, khoa học dữ liệu...

Hệ phương trình tuyến tính có một lịch sử rất lâu đời, khoảng từ năm 500 trước công nguyên. Thoạt tiên, ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã rất cũ và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên ngày nay, cùng với sự phát triển của khoa học dữ liệu và trí tuệ nhân tạo, để giải các bài toán cổ điển thì ta thường phải khảo sát số lượng rất lớn số ẩn cũng như số phương trình đồng thời. Nhiều bài toán dữ liệu lớn hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Do đó, cần có những phương pháp khác của toán cao cấp để giải quyết những bài toán đó trong khoa học dữ liệu và trí tuệ nhân tạo.

2.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1.1 Các dạng của hệ phương trình tuyến tính

a. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Hoặc viết tắt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,\ldots,m$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là *thuần nhất*.

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho khi thay vào (5.1) ta có các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ.

Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

b. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (2.1) ta xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2)}$$

A, B, X lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận vế sau và ma trận ẩn. Khi đó hệ phương trình (2.1) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$AX = B \qquad \textbf{(2.3)}$$

<u>Ví dụ 2.1</u>: Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Hệ phương trình viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Hai vấn đề cơ bản của hệ phương trình tuyến tính bao gồm:

1. Khi nào thì hệ phương trình tuyến tính (2.1) tồn tại nghiệm?

2. Tìm nghiệm của hệ phương trình (2.1).

2.1.2 Định lý về sự tồn tại nghiệm

<u>Định lý 2.1</u>: (Kronecker-Kapelli) *Hệ phương trình (2.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\tilde{A})$ trong đó $\tilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.*

$$r(A) = r(\tilde{A});\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2.5}$$

<u>Ví dụ 2.2</u>: Hệ phương trình trong ví dụ 2.1 có ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, ma trận bổ sung cột cuối $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$.

Hạng $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

Chú ý:

- Nếu $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu $r(A) = r(\tilde{A}) = p < n$ thì hệ sẽ có vô số nghiệm.
- Nếu $r(A) \neq r(\tilde{A})$ thì hệ vô nghiệm.

2.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.2.1 Phương pháp Cramer và ma trận nghịch đảo

a. Phương pháp Cramer

<u>Định nghĩa 2.2</u>: Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn với ma trận hệ số A có định thức $\det A \neq 0$ được gọi là hệ Cramer.

<u>Định lý 2.2</u>: *Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm.*

Cụ thể hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\dots,n$ *có nghiệm* $x_i = \dfrac{D_i}{D},\ i = 1,\dots,n;$

trong đó

$$D = \det A = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots,v_n\right\}$$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,\dots,v_{i-1},b,v_{i+1},\dots,v_n\right\} \tag{2.6}$$

D_i *là định thức có các cột là các cột của ma trận hệ số của hệ phương trình nhưng cột thứ i được thay bởi cột vế sau.*

Ví dụ 2.3:

a) Giải hệ $\begin{cases} x_1 + \qquad 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$.

Hướng dẫn. Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Khi đó $A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Ta tính được $\det A = 44 \neq 0$ và $\det A_1 = -40, \det A_2 = 72, \det A_3 = 152$. Từ đó suy ra các nghiệm của hệ đã cho là $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{40}{44} = -\dfrac{10}{11}, x_2 = \dfrac{72}{44} = \dfrac{18}{11}, x_3 = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$.

b) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22, \ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, \ D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Do đó hệ có nghiệm $x = 3, \ y = -1, \ z = 2$.

Ví dụ 2.4: Giải và biện luận theo tham số λ hệ $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$.

♦ Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi, do đó hệ có nghiệm:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

♦ Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý.

♦ Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4$ ($r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\tilde{A}$ có định thức con cấp 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow r(\tilde{A}) = 4 \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

b. Phương pháp ma trận nghịch đảo

Định lý sau đây là cơ sở của phương pháp ma trận nghịch đảo.

<u>**Định lý 2.3**</u>: *Hệ Cramer* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, ..., n$ *có nghiệm dưới dạng ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1} B. \quad \textbf{(2.7)}$$

<u>**Ví dụ 2.5**</u>: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c \end{cases}$.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$, do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo công thức (2.7).

Ta có $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Vậy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a+16b+9c \\ 13a-5b-3c \\ 5a-2b-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}$.

2.2.2 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss

Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ thì sẽ được hệ mới tương đương:

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp (có thể đổi chỉ số các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (2.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,;\; i=1,...,m.$$

về hệ tương đương

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x'_j = b'_i\,;\; i=1,...,m.$$

Các ẩn $x'_1,...,x'_n$ là các ẩn $x_1,...,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số và ma trận bổ sung của hệ mới có dạng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & b'_1 \\ \bigcirc & a'_{pp} & \cdots & b'_p \\ \hline & & & b'_{p+1} \\ \bigcirc & & \bigcirc & b'_m \end{array}\right] \tag{2.9}$$

trong đó $a'_{11}...a'_{pp} \neq 0$.

♦ Nếu một trong các $b'_{p+1},...,b'_m$ khác 0 thì tồn tại phương trình mà vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.

♦ Nếu $b'_{p+1} = ... = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad \dots \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \quad a'_{22}x'_2 + \quad \dots \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad a'_{p1}x'_1 + \dots + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \quad \textbf{(2.10)}$$

Ta có thể tìm các nghiệm $x'_1,\dots,x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1},\dots,x'_n$.

Chú ý rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số trong các phương trình. Vì vậy trong thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về ma trận có dạng (5.9) và giải hệ phương trình (5.10) từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

<u>Ví dụ 2.6</u>: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$. (xem ví dụ 2.5)

Ma trận bổ sung hệ số $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các biến đổi tương đương ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và cũng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

<u>Ví dụ 2.7</u>: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}2&5&-8&8\\4&3&-9&9\\2&3&-5&7\\1&8&-7&12\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\2&5&-8&8\\4&3&-9&9\\2&3&-5&7\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\2&5&-8&8\\0&-7&7&-7\\0&-2&3&-1\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\0&-11&6&-16\\0&1&-1&1\\0&-2&3&-1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\0&1&-1&1\\0&0&-5&-5\\0&0&1&1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1$.

<u>Ví dụ 2.8</u>: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3\\2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5\\x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11\\4x_1+x_2+4x_3+mx_4=2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&5&4&3\\2&3&6&8&5\\1&-6&-9&-20&-11\\4&1&4&m&2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-6&-9&-20&-11\\3&2&5&4&3\\2&3&6&8&5\\4&1&4&m&2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-6&-9&-20&-11\\0&20&32&64&36\\0&15&24&48&27\\0&-5&-8&m-16&-8\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-6&-9&-20&-11\\0&5&8&16&9\\0&0&0&0&0\\0&0&0&m&1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&-4&-2\\0&5&8&16&9\\0&0&0&0&0\\0&0&0&m&1\end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases}x_1-x_2-x_3-4x_4=-2\\5x_2+8x_3+16x_4=9\\mx_4=1\end{cases}$

♦ Khi $m=0$: hệ vô nghiệm;

♦ Khi $m\neq 0$: hệ có vô số nghiệm

$$x_4=\frac{1}{m},\ x_2=\frac{9m-16}{5m}-\frac{8}{5}x_3,\ x_1=\frac{4-m}{5m}-\frac{3}{5}x_3;\ x_3 \text{ tùy ý.}$$

2.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2.11) có ít nhất nghiệm tầm thường $x_1 = ... = x_n = 0$. Điều kiện tồn tại nghiệm (2.5) luôn thỏa mãn $r(\tilde{A}) = r(A) \le n$.

Nhận xét 2.2: Vế sau của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

Ví dụ 2.10: Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases};\ x_3, x_4 \text{ tùy ý.}$$

2.3.1 Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường

Định lý 2.4: *Hệ (2.11) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi* $r(A) < n$.

Hệ quả 2.5: *Hệ (2.11) có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi* $r(A) = n$. *Hơn nữa, nếu hệ là hệ có số ẩn bằng số phương trình (hệ vuông) thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường nếu và chỉ nếu* $\det A \neq 0$.

Ví dụ 2.11: Hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 0 \\ x + 8y + 27z = 0 \end{cases}$ chỉ có nghiệm tầm thường

vì $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$.

2.3.2 Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ không thuần nhất và hệ phương trình thuần nhất tương ứng

Định lý 2.6: *Giả sử* $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ *là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (2.1). Khi đó* $(x_1,...,x_n)$ *là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (2.11) khi và chỉ khi* $(x_1+\overline{x}_1,...,x_n+\overline{x}_n)$ *là nghiệm của phương trình (2.1).*

Cho $W \subset \mathbb{R}^n$, $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$; ký hiệu

$$(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W=\left\{(\overline{x}_1+x_1,...,\overline{x}_n+x_n)\,\middle|\,(x_1,...,x_n)\in W\right\} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Định lý 2.6 có thể viết lại:

Giả sử $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ *là một nghiệm của (2.1); khi đó*

W *là tập nghiệm của (2.11) khi và chỉ khi* $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W$ *là tập nghiệm của (2.1).*

2.4. GIỚI THIỆU MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.4.1 Ứng dụng vào mô hình cân bằng thị trường

Trong mục này, ta chỉ xét các mô hình tuyến tính về cân bằng thị trường.

a. Thị trường một loại hàng hoá

Trong mô hình cân bằng tĩnh, bài toán tiêu chuẩn là tìm tập giá trị của các biến nội sinh thỏa mãn điều kiện cân bằng của mô hình. Bởi vì một khi chúng ta đã xác định được những giá trị đó, thì trên thực tế chúng ta đã xác định được trạng thái cân bằng. Ta sẽ minh họa bằng cái gọi là mô hình thị trường cân bằng một phần, tức là, một mô hình xác định giá trong một thị trường bị cô lập.

Vì chỉ có một loại hàng hóa đang được xem xét, nên chỉ cần đưa vào mô hình ba biến: lượng cầu của hàng hóa (Q_d), lượng cung của hàng hóa (Q_s) và giá của nó (P). Sản lượng được tính bằng đơn vị đo lường (chiếc, kg, tấn, mét,...) mỗi tuần (tháng, năm,...) và giá tính bằng \$ (đồng, USD,...). Sau khi đã chọn các biến, thứ tự kinh doanh tiếp theo của chúng ta là để đưa ra những giả định nhất định liên quan đến hoạt động của thị trường. Đầu tiên, chúng ta phải xác định một điều kiện cân bằng - một điều không thể thiếu trong một mô hình cân bằng.

Lượng cầu dư thừa : $E \equiv Q_d - Q_s$.

Giả định tiêu chuẩn là trạng thái cân bằng xảy ra trên thị trường khi và chỉ khi lượng cầu dư thừa bằng 0, nghĩa là, khi và chỉ khi thị trường được thông thoáng. Từ đó ta có điều kiện cân bằng là:

$$E \equiv 0.$$

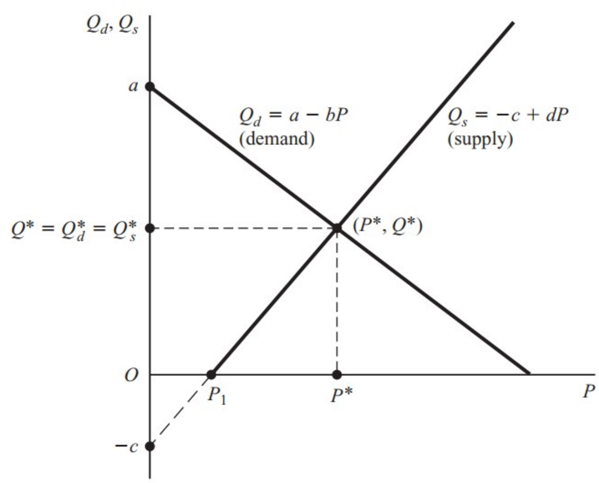
Nhưng điều này ngay lập tức đặt ra câu hỏi làm thế nào Q_d và Q_s được xác định. Để trả lời điều này, chúng ta giả sử rằng Q_d là một hàm tuyến tính giảm dần của P (khi P tăng, Q_d giảm). Mặt khác, Q_s được coi là một hàm tuyến tính tăng dần của P (khi P tăng thì Q_s cũng vậy), với điều kiện là không có lượng cung nào được cung cấp trừ khi giá vượt quá một mức dương cụ thể. Nói chung, sau đó, mô hình sẽ chứa một điều kiện cân bằng cộng với hai phương trình hành vi tương ứng chi phối các bên cung và cầu của thị trường.

Khi phân tích thị trường hàng hóa, các nhà kinh tế sử dụng hàm cung và hàm cầu thể hiện sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá hàng hóa (với tất cả các thông số kỹ thuật khác không thay đổi). Ta có công thức tương đương của các hàm cung và cầu có dạng sau

$$Q_s = -c + dP; Q_d = a - bP \quad (a,b,c,d > 0),$$

trong đó Q_s là lượng cung và Q_d là lượng cầu, P là giá hàng hoá và a,b,c,d là các hằng số dương. Từ điều kiện cân bằng, ta có mô hình cân bằng thị trường có dạng là

$$Q_d = Q_s.$$



Giải hệ phương trình này, ta nhận được giá và sản lượng tại vị trí cân bằng, từ đó nhận được giá, hàm cung và hàm cầu cân bằng:

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d}; \overline{Q} = a - \frac{b(a+c)}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

b. Thị trường nhiều loại hàng hoá

Mục trên trình bày về các mô hình của một thị trường cô lập, trong đó Q_d và Q_s của một hàng hóa là các chức năng của giá cả của hàng hóa đó nếu chỉ xét một mình nó. Tuy nhiên, trong thực tế, không có hàng hóa nào từng được hưởng (hoặc chịu) kiểu tác động như vậy bởi vì cho mỗi hàng hóa, thường sẽ tồn tại nhiều hàng hóa thay thế và bổ sung. Do đó, một mô tả thực tế hơn về hàm cầu của hàng hóa nên tính đến tác động không chỉ về giá của bản thân hàng hóa mà còn về giá của các hàng hóa có liên quan. Điều tương tự cũng đúng với chức năng cung. Tuy nhiên, một khi giá của các hàng hóa khác được đưa vào bức tranh, cấu trúc của bản thân mô hình phải được mở rộng để có thể mang lại các giá trị cân bằng của các hàng hoá này.

Trong mô hình thị trường cô lập, điều kiện cân bằng chỉ bao gồm một phương trình là $Q_d = Q_s$, hoặc $E \equiv Q_d - Q_s = 0$, trong đó E là viết tắt của nhu cầu dư thừa. Khi một số hàng hóa phụ thuộc lẫn nhau được xem xét đồng thời, trạng thái cân bằng sẽ không có nhu cầu dư thừa đối với từng mục và mọi hàng hóa được đưa vào mô hình, vì nếu một mặt hàng phải đối mặt với nhu cầu dư thừa, thì việc điều chỉnh giá của hàng hóa đó nhất thiết sẽ ảnh hưởng đến lượng cầu và lượng cung của các hàng hóa liên quan, do đó gây ra giá cả thay đổi xung quanh. Do đó, điều kiện cân bằng của mô hình thị trường n hàng hóa sẽ liên quan đến n phương trình, mỗi phương trình ứng với một hàng hóa dưới dạng

$$E_i \equiv Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nếu một nghiệm tồn tại thì sẽ tồn tại một tập hợp các giá $\overline{P_i}$ và các đại lượng tương ứng $\overline{Q_i}$ sao cho tất cả n phương trình ở điều kiện cân bằng sẽ đồng thời được thỏa mãn.

Hàm cung và hàm cầu của hàng hoá thứ i có dạng:

$$\begin{aligned} Q_{di} &= Q_{di}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = a_{i0} + a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{in}P_n; i = 1, 2, \ldots, n \\ Q_{si} &= Q_{si}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = b_{i0} + b_{i1}P_1 + b_{i2}P_2 + \ldots + b_{in}P_n; i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Khi đó, mô hình cân bằng thị trường có dạng hệ phương trình tuyến tính gồm các phương trình

$$\begin{cases} Q_{si} = Q_{di}, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta thu được một bộ giá cân bằng của thị trường n hàng hoá, đó là $\overline{P} = (\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n})$. Thay vào Q_{si} hoặc Q_{di}, ta thu được bộ lượng hàng hoá của thị trường, đó là $\overline{Q} = (\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \ldots, \overline{Q_n})$.

Ví dụ: Cho biết hàm cung, hàm cầu của thị trường hai loại hàng hóa như sau:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= -22 + 5P_1; Q_{d1} = 18 - P_1 + 2P_2, \\ Q_{s2} &= -25 + 2P_2; Q_{d2} = 20 + 2P_1 - P_2. \end{aligned}$$

Với

- Q_{s1}, Q_{s2} là lượng cung hàng hoá 1 và 2.
- Q_{d1}, Q_{d2} là lượng cung hàng hoá 1 và 2.
- P_1, P_2 là giá cả của hàng hoá 1 và 2.

Khi thị trường cân bằng hãy thiết lập hệ phương trình tuyến tính với ẩn số là P_1 và P_2.

Sử dụng quy tắc Cramer (phương pháp định thức) xác định giá và lượng cân bằng của hai mặt hàng.

Giải

Áp dụng công thức (2.10), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{s1} = Q_{d1} \\ Q_{s2} = Q_{d2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -22 + 5P_1 = 18 - P_1 + 2P_2 \\ -25 + 2P_2 = 20 + 2P_1 - P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6P_1 - 2P_2 = 40 \\ 2P_1 - 3P_2 = -45 \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -14, D_{P_1} = \begin{vmatrix} 40 & -2 \\ -45 & -3 \end{vmatrix} = -210, D_{P_2} = \begin{vmatrix} 6 & 40 \\ 2 & -45 \end{vmatrix} = -350.$$

Vậy bộ giá cân bằng là:

$$\left(\overline{P}_1 = \frac{D_{P_1}}{D} = \frac{-210}{-14} = 15, \overline{P}_2 = \frac{D_{P_2}}{D} = \frac{-350}{-14} = 25 \right).$$

Lượng cân bằng là:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 = \overline{Q}_{d1} = \overline{Q}_{s1} = -22 + 5\overline{P}_1 = 53, \\ \overline{Q}_2 = \overline{Q}_{d2} = \overline{Q}_{s2} = -25 + 2\overline{P}_2 = 25. \end{aligned}$$

2.4.2 Ứng dụng vào mô hình Input-Output Leontief

Năm 1963, nhà kinh tế học người Mỹ, giáo sư Wassily Leontief đã đề xuất mô hình đầu vào-đầu ra của một hệ thống kinh tế và ông đã đạt giải Nobel Kinh tế năm 1973. Cụ thể, ông đã giải quyết câu hỏi: “Mỗi ngành trong số n ngành trong một nền kinh tế nên sản xuất ở mức sản lượng nào, sao cho vừa đủ để đáp ứng tổng nhu cầu về sản phẩm đó?”

Cơ sở lý luận cho việc phân tích đầu vào-đầu ra khá đơn giản. Đầu ra của bất kỳ ngành công nghiệp (chẳng hạn như ngành thép) là cần thiết để làm đầu vào cho nhiều ngành khác, hoặc thậm chí cho chính ngành đó; do đó mức "chính xác" (nghĩa là không thiếu cũng như không dư) sản lượng thép sẽ phụ thuộc vào yêu cầu đầu vào của tất cả n ngành công nghiệp. Đổi lại, đầu ra của nhiều ngành công nghiệp khác sẽ nhập vào ngành thép với tư cách là đầu vào, và do đó đến lượt mình mức độ "đúng" của các sản phẩm khác sẽ phụ thuộc một phần vào yêu cầu đầu vào của ngành thép. Xét về sự phụ thuộc liên ngành này, bất kỳ tập hợp "chính xác" nào mức đầu ra cho n ngành công nghiệp phải là mức phù hợp với tất cả các yêu cầu đầu vào trong nền kinh tế, để không có điểm nghẽn nào phát sinh ở bất kỳ đâu. Vì vậy, phân tích đầu vào-đầu ra sẽ được sử dụng rất nhiều trong việc lập kế hoạch sản xuất, chẳng hạn như lập kế hoạch phát triển kinh tế của một quốc gia hoặc cho một dự án của một tập đoàn.

Các giả thiết được đặt ra là như sau:

- Mỗi ngành sản xuất một loại sản phẩm hàng hoá thuần nhất hoặc sản xuất một bộ hàng hoá theo một tỷ lệ nhất định. Trong trường hợp thứ hai, ta coi mỗi tổ hợp hàng hoá theo tỉ lệ cố định đó là một mặt hàng.
- Các sản phẩm đầu vào của sản xuất trong phạm vi một ngành được sử dụng theo một tỉ lệ cố định.

Từ những phân tích trên, tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sẽ bao gồm:

1. Cầu trung gian từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất;
2. Cầu cuối cùng từ phía những người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, Nhà nước, các tổ chức xuất khẩu,...

Xét một nền kinh tế có n ngành sản xuất, là ngành được đánh số $1,2,\ldots,n$. Để thuận tiện cho việc tính chi phí cho các yếu tố sản xuất, ta phải biểu diễn lượng cầu của tất cả các loại hàng hóa ở dạng giá trị, tức là đo bằng tiền. Tổng cầu về sản phẩm hàng hóa của ngành i $(i=1,2,\ldots,n)$ được ký hiệu x_i và xác định bởi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + b_i, \tag{2.13}$$

trong đó x_i là tổng cầu đối với hàng hoá của ngành *i*, x_{ik} là giá trị hàng hoá của ngành *i* mà ngành *k* cần sử dụng cho việc sản xuất (giá trị cầu trung gian), b_i là giá trị hàng hoá của ngành *i* cần cho tiêu dùng và xuất khẩu (cầu cuối cùng).

Trong thực tế, ta thường không có thông tin về giá trị cầu trung gian x_{ik}, nhưng người ta lại chủ động trong việc xác định tỉ phần chi phí đầu vào của sản xuất. Gọi a_{ik} là tỉ phần chi phí đầu vào của ngành k đối với sản phẩm của ngành *i*, khi đó ta có công thức: $a_{ik} = \dfrac{x_{ik}}{x_k}$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$. Chẳng hạn, $a_{ik}=0,25$ nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị của mình thì ngành k đã phải chi trả 0,25 đồng để mua sản phẩm của ngành i nhằm phục vụ cho quá trình sản xuất. Ta xét:

- a_{ik} là cố định đối với mỗi ngành sản xuất hay còn gọi là hệ số chi phí đầu vào của ma trận. Chú ý rằng $0 \le a_{ik} < 1$;
- Ma trận $A = \left[a_{ik}\right]_{n\times n}$ được gọi là ma trận hệ số chi phí đầu vào (còn gọi là ma trận kỹ thuật);
- Ma trận $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận tổng cầu, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận cầu cuối cùng (gọi tắt là cầu cuối).

Chú ý rằng, tổng theo cột ma trận $A = \left[a_{ik}\right]_{n\times n}$ thể hiện một phần chi phí đầu vào (không bao gồm chi phí đầu vào chính) phát sinh trong việc sản xuất một số hàng hóa trị giá 1 đồng. Nếu tổng này lớn hơn hoặc bằng 1 đồng, thì sản xuất sẽ không hợp lý về mặt kinh tế. Do đó, thực tế là $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$. Ý nghĩa của tổng cột j này là tỉ phần chi phi mà ngành j phải trả cho việc mua các hàng hoá trung gian tính trên 1 đồng giá trị hàng hoá của mình.

Từ đẳng thức (2.13), thay $x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k$, ta được hệ phương trình:

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Viết lại hệ dưới dạng ma trận, ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ hay } X = AX + B.$$

Từ đó kéo theo hệ phương trình $(I - A)X = B$, trong đó $I - A$ được gọi là ma trận Leontief. Phương trình này cho phép ta xác định tổng cầu đối với sản phẩm của tất cả các ngành sản xuất, điều này có ý nghĩa quan trọng đối với việc lập kế hoạch sản xuất, đảm bảo cho nền kinh tế vận hành trôi chảy, tránh tình trạng dư hoặc thiếu hàng hoá.

Nếu ma trận Leontief không suy biến thì ta có ma trận tổng cầu là:

$$X = (I - A)^{-1} B .$$

Ma trận nghịch đảo của $I - A$ có thể xấp xỉ bởi công thức

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n .$$

Ma trận $C = (I - A)^{-1}$ được gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ. Với ý nghĩa của các hệ số c_{ij} là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

Ví dụ: Giả sử trong một nền kinh tế có ba ngành. Mỗi ngành trong nền kinh tế xác định tổng sản phẩm của mình căn cứ vào tổng cầu. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối cùng B lần lượt là $A = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,25 & 0,34 \\ 0,33 & 0,1 & 0,12 \\ 0,19 & 0,38 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$.

a) Giải thích ý nghĩa của phần tử 0 và 0,25 của ma trận A.
b) Tính tổng các phần tử ở cột thứ nhất của ma trận A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
c) Tính tổng các phần tử ở hàng thứ nhất của ma trận A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
d) Cho biết tỉ phần giá trị gia tăng (giá trị của hoạt động sản xuất) của ngành thứ 2 trong tổng giá trị sản phẩm của ngành đó.
e) Xác định mức tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành.

Giải:

a, Phần tử 0 là ngành 3 không dùng sản phẩm vào việc sản xuất. Phần tử 0,25 nghĩa là mỗi 1 đồng giá trị sản phẩm của ngành 2 thì có chứa 0,25 đồng giá trị ngành 1 được sử dụng để sản xuất.

b, Tổng các phần tử ở cột thứ nhất là 0,05 + 0,33 + 0,19 = 0,57.

Ý nghĩa kinh tế: 0,57 là tỉ phần chi phí mà ngành thứ nhất phải trả cho việc mua sản phẩm trung gian tính trên 1 đồng giá trị sản phẩm của mình.

c, Tổng các phần tử ở hàng thứ nhất là 0,05 + 0,25 + 0,34 = 0,64.

Ý nghĩa kinh tế: 0,64 nghĩa là cầu trung gian đối với sản phẩm của ngành 1 chiếm 64% tổng cầu.

d, Chi phí sản xuất cho sản phẩm của ngành 2 là 0,25+0,1+0,38 = 0,73, nghĩa là mỗi 1 đồng giá trị sản phẩm của ngành 2 gồm 0,73 đồng chi phí chi phí cho các sản phẩm đầu vào. Vậy tỉ phần giá trị gia tăng trong tổng giá trị sản phẩm của ngành 2 là 1 – 0,73 = 0,27, tức là 27%.

e, Ma trận tổng cầu: $X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3007,16 \\ 1631,11 \\ 2104,48 \end{bmatrix}$, từ đó suy ra mức tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1) Không giải hệ, hãy xét tính tương thích (có nghiệm) của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$.

2.2) Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

2.3) Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

2.4) Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$

2.5) Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

2.6) Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases}$.

2.7) Biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$.

2.8) Xác định các giá trị của tham số m sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + my - z = -2 \\ x - 3z = -3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + 8z = 3 \end{cases}$

i) Vô nghiệm.

ii) Có nhiều hơn 1 nghiệm.

iii) Có duy nhất nghiệm.

2.9) Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - 2y + 4z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

2.10) Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau vô nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

2.11) Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận X, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.12) Tìm ma trận X vuông cấp 2 thỏa mãn phương trình.

$$X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.13) Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $XA = B$.

2.14) Một hệ thống bao gồm hai ngành công nghiệp là than và thép, có yêu cầu đầu vào như dưới đây.

1. Để tạo ra sản lượng trị giá 1,00$, ngành than yêu cầu 0,1$ cho một sản phẩm của chính nó và 0,8$ cho thép.

2. Để tạo ra sản lượng trị giá 1,00$, ngành thép cần 0,1$ sản phẩm của chính nó và 0,2$ than đá.

a) Tìm D là ma trận đầu vào-đầu ra của hệ thống này.

b) Tìm ma trận đầu ra X trong phương trình X = DX + E, trong đó E là ma trận nhu cầu bên ngoài E = [10.000 20.000].

2.15) Hàm cung và hàm cầu đối với ba loại hàng hoá phụ thuộc lẫn nhau được cho bởi:

$Q_{s1} = 3P_1, Q_{s2} = -10 + 2P_2, Q_{s3} = -20 + 5P_3$,

$Q_{d1} = 120 - P_1 + P_2 + 2P_3, Q_{d2} = 150 + P_1 - 2P_2 + P_3, Q_{d3} = 250 + 2P_1 + 2P_2 - 3P_3$.

Hãy xác định giá cả và lượng cân bằng của thị trường ba hàng hoá trên.

CHƯƠNG III
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Khái niệm không gian véc tơ ban đầu có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ ....

Khái niệm không gian véc tơ 4 chiều được Einstein (Anh-xtanh) sử dụng trong thuyết tương đối. Ngày nay lý thuyết không gian véc tơ nhiều chiều được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác. Chẳng hạn, các vec tơ biểu diễn những đại lượng về giá cả, sản lượng đầu vào đầu ra, dân số, tuổi,.... trong kinh tế học.

Để học tốt chương này đòi hỏi người học phải nắm vững khái niệm không gian véc tơ với mức độ trừu tượng cao, còn các mô hình cụ thể là các không gian 2 chiều, 3 chiều ta đã biết ở chương trình phổ thông. Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn chiều, đó là các không gian có hệ sinh hữu hạn. Trong không gian như thế mọi véc tơ đều có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ sinh.

Sinh viên cần luyện tập tìm tọa độ của một véc tơ trong các cơ sở khác nhau. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ véc tơ cho trước. Tìm hạng của một hệ véc tơ, tìm chiều của không gian con.

3.1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

3.1.1. Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 3.1: *Giả sử V là tập khác $\varnothing$, K là một trường. V được gọi là không gian véc tơ trên trường K nếu có hai phép toán:*

- Phép toán trong $(+)$: $\begin{array}{l} V\times V\to V \\ (u,v)\mapsto u+v \end{array}$

- Phép toán ngoài $(\cdot)$: $\begin{array}{l} K\times V\to V \\ (\alpha,u)\mapsto \alpha u \end{array}$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u,v,w\in V$ *và* $\alpha,\beta\in K$

V1) $(u+v)+w=u+(v+w)$

V2) *Tồn tại* $\mathbf{0}\in V$ *sao cho* $u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u$

V3) *Với mỗi* $u\in V$ *có* $-u\in V$ *sao cho* $u+(-u)=(-u)+u=\mathbf{0}$

V4) $u+v=v+u$

V5) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

V6) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

V7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

V8) $1u = u$, *trong đó* 1 *là phần tử đơn vị của* K.

Khi $K = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K = \mathbb{C}$ thì V được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của K được gọi là các phần tử vô hướng.

<u>Ví dụ 3.1</u>: Giả sử K là một trường, xét $K^n = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \,\middle|\, x_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$

Ta định nghĩa: $(x_1,...,x_n) + (y_1,...,y_n) = (x_1 + y_1,...,x_n + y_n)$

$$\alpha(x_1,...,x_n) = (\alpha x_1,...,\alpha x_n),\ \forall \alpha \in K$$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là $\mathbf{0} = \underbrace{(0,...,0)}_{n \text{ phần tử}}$, phần tử đối của $x = (x_1,...,x_n)$ là $-x = (-x_1,...,-x_n)$.

Khi $K = \mathbb{R}$ ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$.

$K = \mathbb{C}$ ta có không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$.

<u>Ví dụ 3.2</u>: Ký hiệu $\mathbb{R}^X$ là tập các hàm số xác định trên tập con $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$. Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),\ \ (\alpha f)(t) = \alpha f(t),\ \ \ \forall t \in X$$

Rõ ràng với mọi hàm số f, g xác định trên tập con $X \subset \mathbb{R}$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $f+g$, αf cũng là các hàm số xác định trên tập con $X \subset \mathbb{R}$.

Với hai phép toán này $\mathbb{R}^X$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là $\mathbf{0}(t) = 0, \forall t \in X$, phần tử đối của f là $-f$ xác định bởi $(-f)(t) = -f(t), \forall t \in X$.

<u>Ví dụ 3.3</u>: Gọi $\mathbf{P}_n$ là tập các đa thức bậc $\leq n$, n là số nguyên dương cho trước:

$$\mathbf{P}_n = \left\{ p \,\middle|\, p = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n; a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 2.2 thì $\mathbf{P}_n$ là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\mathbf{0}$.

Ví dụ 3.4: Gọi $\mathbf{P}$ là tập các đa thức

$$\mathbf{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}_n = \left\{ p \,\middle|\, p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n ; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng hai đa thức và phép nhân với một số với đa thức theo nghĩa thông thường ở Ví dụ 2.3 thì $\mathbf{P}$ là không gian véc tơ và $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3.1.2. Tính chất cơ bản của không gian vec tơ

1) Véc tơ $\mathbf{0}$ và véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất với mọi $u \in V$.

2) Có luật giản ước: $u + v = u + w \Rightarrow v = w$.

3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.

4) Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.

Chứng minh:

1) 2) hiển nhiên.

3) Với mọi $u \in V$, $(0+0)u = 0u + 0u$. Mặt khác $(0+0)u = 0u = 0u + \mathbf{0}$.

Theo luật giản ước ta có $0u = \mathbf{0}$.

Tương tự với mọi $u \in V$, $u + (-u) = \mathbf{0} = 0u = (1-1)u = 1u + (-1)u$.

Suy ra $(-1)u = -u$.

4) $\mathbf{0} + \alpha 0 = \alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0 \;\Rightarrow\; \alpha 0 = \mathbf{0}, \forall \alpha \in K$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ và giả sử $\alpha \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists \alpha^{-1} \in K$

$$\mathbf{0} = \alpha^{-1} 0 = \alpha^{-1}(\alpha u) = (\alpha^{-1}\alpha)u = 1u = u.$$

Từ định nghĩa của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

1) *Ta định nghĩa* $u - v := u + (-v)$, *khi đó*

$$u + v = w \Leftrightarrow u = w - v.$$

2) *Do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = (u_1 + \ldots + u_{n-1}) + u_n .$$

Tương tự $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n$

biểu thức này được gọi là *một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ* $u_1,...,u_n$.

Từ đây trở đi ta chỉ hạn chế ***xét các không gian véc tơ thực***.

3.1.3. Không gian véc tơ con

a. Định nghĩa và ví dụ

Giả sử tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn tính chất:

$$\forall u,v \in W: \quad u+v \in W; \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\forall u \in W,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha u \in W. \qquad \textbf{(3.2)}$$

Khi đó có thể xác định 2 phép toán từ không gian V thu hẹp vào W:

$$\begin{aligned}(+):\ & W \times W \to W \\ & (u,v) \mapsto u+v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cdot):\ & K \times W \to W \\ & \alpha,u) \mapsto \alpha u\end{aligned}$$

Hai phép toán này hiển nhiên thỏa mãn các điều kiện V1) , V4), V5), V6), V7), V8) của Định nghĩa 3.1.

Ngoài ra vì $W \neq \varnothing$ do đó tồn tại ít nhất véc tơ $u \in W$ suy ra $\mathbf{0} = 0u \in W$.

$\forall u \in W: -u = (-1)u \in W$.

Vậy W thỏa mãn các tiên đề V1) – V8) của không gian véc tơ. Nói cách khác với hai phép toán thu hẹp từ không gian véc tơ V vào W thì W là một không gian véc tơ .

Định nghĩa 3.2: Giả sử V là không gian véc tơ. Tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn điều kiện (3.1)-(3.2) được gọi là không gian véc tơ con của V (hay nói tắt: không gian con của V).

Định lý sau đây chỉ ra một tiêu chuẩn để kiểm tra tập con $W \subset V$ là không gian véc tơ con của V.

Định lý 3.1: *Giả sử W là tập con khác rỗng của V. Khi đó W không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi: Với mọi $u,v \in W$, với mọi $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u + \beta v \in W$.*

Chứng minh: ($\Rightarrow$): Với mọi $u,v \in W$, với mọi $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u \in W$, $\beta v \in W$ $\Rightarrow$ $\alpha u + \beta v \in W$.

($\Leftarrow$): $\forall u,v \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $u+v = 1u + 1v \in W$, $\alpha u = \alpha u + 0u \in W$.

Ví dụ 3.5: Từ định lý trên ta thấy rằng mọi không gian véc tơ con của V đều phải chứa véc tơ $\mathbf{0}$ của V.

Tập $\{\mathbf{0}\}$ chỉ gồm véc tơ không là không gian véc tơ con nhỏ nhất của V.

V là không gian véc tơ con lớn nhất của V.

Ví dụ 3.6: Tập $W_1 = \{u = (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.7: Tập $W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.8: Tập $W_3 = \{u = (x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.9: $\mathbf{P}_n$ là không gian con của $\mathbf{P}_m$ nếu $n \le m$, trong đó $\mathbf{P}_n$ là không gian các đa thức bậc $\le n$.

b. Không gian con sinh bởi một hệ các véc tơ

Định lý 3.2: *Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 3.1. ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Từ Định lý 3.2 suy ra rằng với mọi tập con S bất kỳ của V luôn tồn tại không gian con W bé nhất của V chứa S. W là giao của tất cả các không gian con của V chứa S.

Định nghĩa 3.3: Không gian W bé nhất chứa S được gọi là không gian sinh bởi hệ S, ký hiệu $W = \operatorname{span} S$, và S được gọi là hệ sinh của W.

Khi S hữu hạn thì W được gọi là không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Định lý 3.3: *$W = \operatorname{span} S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.*

Chứng minh: Gọi W' là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Ta chứng minh W' là không gian con bé nhất chứa S, nghĩa là $W' = W$.

1) Trường hợp S hữu hạn: $S = \{v_1, ..., v_n\}$ thì $W' = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$.

(i) Với mọi $v_i \in S$ thì $v_i = 1v_i \in W'$ vậy $S \subset W'$.

(ii) Với mọi $u \in W', v \in W' : u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n,\ v = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \in W'$; Với mọi $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\gamma u + \delta v = \gamma(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \delta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)$$
$$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)v_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)v_n \in W'.$$

Vậy W' là không gian con của V chứa S.

Giả sử W'' là không gian véc tơ con của V chứa S. Với mọi $u \in W'$, $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Vì W'' chứa S nên $v_1, ..., v_n \in W'' \Rightarrow u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in W''$. Do đó $W' \subset W''$.

Nói cách khác W' là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.

Vậy $W' = W = \operatorname{span} S$.

2) Trường hợp S vô hạn tập W' có dạng

$$W' = \left\{ \alpha_1 v_{i_1} + ... + \alpha_n v_{i_n} \,\middle|\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}; v_{i_1}, ..., v_{i_n} \in S; n = 1, 2, ... \right\}$$

Tương tự như trên ta có thể chứng minh W' là không gian véc tơ con nhỏ nhất chứa S.

Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Giả sử $S = \{ v_1, ..., v_n \}$ là hệ sinh của V khi đó:

$$u \in V = \operatorname{span}\{v_1, ..., v_n\} \Leftrightarrow u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n;\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(3.3)}$$

<u>Ví dụ 3.10</u>: a) Trong không gian véc tơ con $W_1 = \{ u = (x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R} \}$ ở Ví dụ 2.6. xét hai véc tơ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$. Khi đó:

$$u \in W_1 \Leftrightarrow u = (x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) = xe_1 + ye_2$$

Vậy $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$.

b) Không gian véc tơ con $W_2 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + 4z = 0 \right\}$ ở Ví dụ 2.7 có tính chất $u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = 3/2y - 2z$. Vậy

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2} y - 2z, y, z \right) = \left(\frac{3}{2} y, y, 0 \right) + (-2z, 0, z) = \frac{y}{2}(3,2,0) + z(-2,0,1)$$

Xét $v_1 = (3,2,0)$, $v_2 = (-2,0,1) \in W_2$, ta được $W_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

3.2. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VEC TƠ

3.2.1. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Khái niệm phụ thuộc tuyến tính khái quát hóa từ khái niệm 2 véc tơ cùng phương và 3 véc tơ đồng phẳng.

Hệ véc tơ không phụ thuộc tuyến tính gọi là hệ độc lập tuyến tính. Hệ các véc tơ độc lập tuyến tính có tính chất: nếu một véc tơ bất kỳ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ này thì cách viết đó là duy nhất.

Định nghĩa 3.7: *Cho hệ n véc tơ $S=\{u_1,...,u_n\}$ của V (các véc tơ này có thể trùng nhau). Hệ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu:*

$$\forall \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}:\ \alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1=...=\alpha_n=0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ $S=\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0}$.

Ví dụ 3.11: Hệ $\{e_1,e_2,e_3\}$ trong đó $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ là độc lập, vì nếu $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ thì $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ví dụ 3.12: • Hệ chứa véc tơ $\mathbf{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

• Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1=\alpha u_2$ hoặc $u_2=\alpha u_1$.

• Xét các véc tơ $u_1=(4,-2,8)$, $u_2=(-6,3,-12)$, $u_3=(3,-2,5)$. Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ phụ thuộc tuyến tính ($u_2=-3/2u_1$), nhưng $\{u_1,u_3\}$ độc lập tuyến tính.

Định lý 3.4: *1) Nếu $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính và $u=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$ thì cách viết này là duy nhất.*

2) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

3) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

4) Giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1,...,v_n$. Ngoài ra cách viết $u=\beta_1 v_1+...+\beta_n v_n$ là duy nhất.

Chứng minh: 1) Giả sử $u=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$ và $u=\beta_1 v_1+...+\beta_n v_n$ thì

$$\mathbf{0}=u-u=(\alpha_1-\beta_1)v_1+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n \Rightarrow \alpha_1-\beta_1=...=\alpha_n-\beta_n=0\ .$$

Do đ ó $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_n=\beta_n$. Vậy cách viết trên là duy nhất.

2) Giả sử hệ $S=\{u_1,...,u_m\}$ chứa hệ con $\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc, khi đó tồn tại $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0}$.

Chọn $\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1},...,\alpha_m \in \mathbb{R}$, trong đó $\alpha_{n+1}=...=\alpha_m=0$ và $\alpha_1,...,\alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n+\alpha_{n+1}u_{n+1}+...+\alpha_m u_m=\mathbf{0}$.

3) Giả sử hệ $S=\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0}$.

Giả sử $\alpha_1 \neq 0$ thì $u_1=-(\alpha_2/\alpha_1)u_2-...-(\alpha_n/\alpha_1)u_n$.

4): ($\Leftarrow$): suy từ 3).

($\Rightarrow$): Giả sử $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc khi đó tồn tại các số $\beta_1',...,\beta_n',\alpha \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\beta_1'v_1+...+\beta_n'v_n+\alpha u=\mathbf{0}$, vì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập nên $\alpha \neq 0$, do đó $u=-\dfrac{\beta_1}{\alpha}v_1-...-\dfrac{\beta_n}{\alpha}v_n$. Cách viết duy nhất suy từ tính chất 1).

3.2.2. Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

a. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

<u>Định nghĩa 3.8</u>: *Cho hệ S các véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ con S' của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) *S' là hệ độc lập tuyến tính.*

ii) *Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào S' thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính.*

Nói riêng $\{v_1,...,v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V nếu hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập và nếu thêm bất kỳ véc tơ khác của V ta có hệ mới là phụ thuộc.

<u>Định lý 3.5</u>: 1) *Nếu S' là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S thì mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của S' và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất (điều này suy từ tính chất 2.6).*

2) *Giả sử $\{v_1,...,v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1,...,v_n\}$.*

Thật vậy, nếu $\{v_1,...,v_n\}$ không tối đại thì tồn tại một véc tơ của S, ta ký hiệu v_{n+1}, sao cho hệ $\{v_1,...,v_n,v_{n+1}\}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ S hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{v_1,...,v_n,v_{n+1},...,v_{n+k}\}$ độc lập tuyến tính tối đại của S.

Ví dụ 3.13: Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại hệ véc tơ $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$:

$$u_1=(3,1,4),\ u_2=(2,-3,5),\ u_3=(5,-2,9),\ u_4=(1,4,-1).$$

- Hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ độc lập vì không tỉ lệ.
- Có thể kiểm tra được: $u_3=u_1+u_2$; $u_4=u_1-u_2$.

Vậy $\{u_1,u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Tương tự có thể kiểm tra được $\{u_1,u_3\}$, $\{u_1,u_4\}$, $\{u_2,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ cũng là các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Qua ví dụ ta nhận thấy một hệ véc tơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại. Tuy nhiên số các véc tơ của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều bằng nhau. Ta sẽ chứng minh điều này trong mục tiếp sau.

b. Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Định lý 3.6 (Định lý thế Steinitz (Xtêi-nít)): *Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n\le k$.*

Định lý 3.7: *Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn S các véc tơ của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Chứng minh: Giả sử $\{v_{i_1},...,v_{i_k}\}$ và $\{v_{j_1},...,v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S lần lượt có k phần tử và n phần tử. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Áp định lý thế 2.8 ta có $n\le k$ và $k\le n$, vậy $n=k$.

Định nghĩa 3.9: *Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S được gọi là hạng (rank) của S, ký hiệu $r(S)$.*

Qui ước hệ chỉ có véc tơ $\mathbf{0}$ có hạng là 0.

3.2.3. Cơ sở, số chiều của không gian vec tơ

Định nghĩa 3.10: *Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một cơ sở của V.*

Định lý 3.8: *Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *Hệ $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V.*

(ii) *Hệ $\{e_1,...,e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V.*

(iii) *Mọi véc tơ $u\in V$ tồn tại một cách viết duy nhất:*

$$u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \ , \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Chứng minh: (i)⇒(ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở và tính chất 3.5.

(ii)⇒(iii): Suy từ tính chất 2.6 và tính chất 2.7.

(iii)⇒(i): Rõ ràng $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là hệ sinh.

Giả sử $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \mathbf{0}$, ta cũng có $\mathbf{0} = 0e_1 + \ldots + 0e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Vậy $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một hệ sinh độc lập, do đó là một cơ sở.

<u>**Định nghĩa 3.11**</u>: $(x_1, \ldots, x_n)$ *trong* (3.6) *được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Ta ký hiệu tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là $(u)_{\mathscr{B}}$.

Vậy nếu u thỏa mãn (3.6) thì

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x_1, \ldots, x_n) \tag{3.7}$$

<u>**Ví dụ 3.14**</u>: Hai hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2\}$, với $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ và $e'_1 = (1,1), e'_2 = (4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Với mọi $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $u = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$.

Giả sử $u = (x, y) = x'e'_1 + y'e'_2 = x'(1,1) + y'(4,3) = (x' + 4y', x' + 3y')$.

Do đó $\begin{cases} x' + 4y' = x \\ x' + 3y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4y - 3x \\ y' = x - y \end{cases}$

Vậy:

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x, y); \ (u)_{\mathscr{B}'} = (4y - 3x, x - y). \tag{3.8}$$

Cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

<u>**Định lý 3.9**</u>: *Giả sử* V *là không gian véc tơ hữu hạn sinh và* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của* V. *Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ* $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ *là một cơ sở của* V.

Chứng minh: Giả sử V có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ không phải là cơ sở thì S không phải là hệ sinh, theo tính chất 2.6-3) tồn tại véc tơ, ta ký hiệu v_{k+1}, sao cho hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ

$\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k+m \le n$ (theo Bổ đề 2.8). Vậy $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm.

<u>Hệ quả 3.10</u>: *Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.*

<u>Định lý 3.11</u>: *Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 3.7 ta suy ra hai cơ sở bất kỳ của V đều có số phần tử bằng nhau.

<u>Định nghĩa 3.11</u>: *Số véc tơ của một cơ sở của V được gọi là số chiều của V, ký hiệu $\dim V$. Quy ước $\dim\{\mathbf{0}\}=0$.*

<u>Ví dụ 3.15</u>: Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ trong đó:

$$e_1=(1,0,...,0),\ e_2=(0,1,...,0),...,\ e_n=(0,0,...,1) \qquad \textbf{(2.11)}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbb{R}^n=n$.

<u>Ví dụ 3.16</u>: Hệ $\mathscr{B}=\{1,t,...,t^n\}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$, gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbf{P}_n=n+1$.

<u>Nhận xét</u>: Không gian $\mathbf{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ không hữu hạn sinh. Thật vậy, hệ $\{1,t,t^2,....\}$ có vô hạn véc tơ và độc lập tuyến tính nên không thể là hữu hạn sinh.

<u>Định lý 3.12</u>: *Giả sử $\dim V=n$ và $S=\{v_1,...,v_m\}$ là hệ m véc tơ của V. Khi đó:*

(i) *Nếu hệ S độc lập tuyến tính thì $m\le n$.*

(ii) *Nếu hệ S là hệ sinh của thì $m\ge n$.*

(iii) *Nếu $m=n$ thì hệ S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi S là hệ sinh.*

Chứng minh: Gọi $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Áp dụng Định lý 2.8 cho hai hệ $\mathscr{B}$ và S suy ra các điều cần chứng minh.

<u>Định lý 3.13</u>: *Giả sử S là hệ hữu hạn các véc tơ của V, S_0 là một hệ con của S. Đặt $W=\operatorname{span}S$. Khi đó:*

(i) *S_0 là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S khi và chỉ khi S_0 là một cơ sở của W, do đó $r(S)=\dim W$.*

(ii) *Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ S:*

- *Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ S;*
- *Cộng vào một véc tơ của hệ S một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của S; thì hệ S biến thành hệ S'.*

Đặt $W' = \operatorname{span} S'$ thì $W = W'$, do đó $r(S) = r(S') = \dim W$.

Chứng minh: (i) Giả sử S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S thì S_0 cũng sinh ra W, do đó S_0 là một cơ sở của W. Ngược lại nếu S_0 là một cơ sở của W thì S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của W, do đó cũng là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

$r(S) =$ số véc tơ của $S_0 = \dim W$.

(ii) Có thể kiểm chứng rằng $S' \subset W$ do đó $W' \subset W$. Tương tự cũng có $W \subset W'$.

Vậy $W = W' \Rightarrow r(S) = r(S')$.

<u>**Nhận xét**</u>: Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

<u>Cách 1</u>: Áp dụng định lý 2.16 bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó.

Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một cột, sau đó biến đổi lên các cột của bảng số (đổi vị trí 2 cột, nhân một số khác 0 vào 1 cột, cộng vào 1 cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác) để đưa bảng số tương ứng về bảng số mà các phần tử khác 0 có dạng hình thang. Khi đó các cột khác 0 tạo thành hệ véc tơ độc lập tuyến tính tối đại cần tìm.

$$\begin{matrix} * & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & * & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & * & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

trong đó * là các phần tử khác 0, các phần tử # có thể bằng 0.

<u>Cách 2</u>: Áp dụng tính chất 2.6 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \mathbf{0}$,
2. Giả sử $v_{i_j} \neq \mathbf{0}$, loại các véc tơ v_i tỉ lệ với v_{i_j},
3. Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ độc lập, khi đó $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_j\}$ độc lập khi và chỉ khi

v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$.

<u>Ví dụ 3.17</u>: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$$v_1=(1,1,1,1),\ v_2=(1,-1,1,-1),\ v_3=(1,3,1,3),\ v_4=(1,2,0,2),\ v_5=(1,2,1,2).$$

Giải: • <u>Cách1</u>:

$$\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2\end{matrix}\right. \rightarrow \left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0\end{matrix}\right.$$

(Cột 1 $\rightarrow$ cột 1, cột 2 - cột1 $\rightarrow$ cột 2, cột 3 - cột1 $\rightarrow$ cột 3, cột 4 - cột1 $\rightarrow$ cột 4, cột 5 - cột4 $\rightarrow$ cột 5)

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right. \rightarrow \left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right.$$

(Cột 3 + cột 2 $\rightarrow$ cột 3, cột 4 +(1/2) cột 2 - cột 5 $\rightarrow$ cột 4).

(-1/2cột 2 $\rightarrow$ cột 2, cột 5 $\rightarrow$ cột 3).

Vậy hệ véc tơ có hạng là 3.

• <u>Cách 2</u>: v_1, v_2 không tỉ lệ nên độc lập. Nếu $v_3=xv_1+yv_2$ thì

$$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\\ x+y=1\\ x-y=3\end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-1.$$

Vậy $v_3=2v_1-v_2$. Nghĩa là $\{v_1,v_2,v_3\}$ phụ thuộc.

Nếu $v_4=xv_1+yv_2$ thì $\begin{cases}x+y=1\\ x-y=2\\ x+y=0\\ x-y=2\end{cases}$, hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1,v_2,v_4\}$ độc lập.

Nếu $v_5=xv_1+yv_2+zv_4$ thì $\begin{cases}x+y+z=1\\ x-y+2z=2\\ x+y=1\\ x-y+2z=2\end{cases} \Rightarrow x=3/2,\ y=-1/2, z=0.$

Nghĩa là $v_5 = 3/2v_1 - 1/2v_2$. Do đó $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc.

Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

3.2.4. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, định lý sau nói lên cấu trúc tập nghiệm của hệ thuần nhất này.

Định lý 3.17: *Tập hợp nghiệm W của hệ thuần nhất là không gian con của $\mathbb{R}^n$ với số chiều là* $\dim W = n - r(A)$.

Ví dụ 3.18: Tập $W_2 = \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + 4z = 0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$ có chiều $\dim W_2 = 3 - 1 = 2$ (xem ví dụ 2.7).

Ví dụ 3.19: Đặt V_1, V_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}, \quad (II)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$.

Giải: Giải hệ phương trình (I) :

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1 \Leftrightarrow v = (8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4) = x_3(8, -6, 1, 0) + x_4(-7, 5, 0, 1)$$

$$V_1 = \left\{x_3(8, -6, 1, 0) + x_4(-7, 5, 0, 1) \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Tương tự, từ ví dụ 5.10 ta có

$$V_2 = \left\{x_3(3, 1, 1, 0) + x_4(-2, -2, 0, 1) \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm: $x_1 = -x_2 = x_3 = x_4$; x_4 tùy ý.

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \left\{ x_4(1,-1,1,1) \middle| x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

3.3. MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

Giả sử V là không gian n chiều với một cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1, ...e_n \}$.

$\{ v_1, ..., v_m \}$ là một hệ gồm m véc tơ của V có toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

Giả sử $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i ; j = \overline{1,m}$, khi đó ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m}$ có các cột là các toạ độ của các véc tơ $\{ v_1, ..., v_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{ v_1, ..., v_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$$A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m} ; \; v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad , j = \overline{1,m} \tag{3.10}$$

Ngược lại, với ma trận A cỡ $n \times m$ cho trước thì ta có hệ m véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của A.

Vậy khi không gian véc tơ V với cơ sở cố định $\mathscr{B} = \{ e_1, ...e_n \}$ thì có tương ứng 1 - 1 giữa các ma trận cỡ $n \times m$ với các hệ m véc tơ của V.

Nói riêng, nếu $u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ theo (2.9) ta ký hiệu tọa độ của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x_1, ..., x_n) \tag{3.11}$$

Ma trận của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.12)}$$

<u>Ví dụ 3.20</u>: Ma trận của hệ véc tơ $v_1 = (4,1,3,-2)$, $v_2 = (1,2,-3,2)$, $v_3 = (16,9,1,-3)$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $\mathscr{B} = \{ e_1,.....e_n \}$, $\mathscr{B}' = \{ e'_1,.....e'_n \}$ là hai cơ sở của V. Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$*. Nghĩa là nếu

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \ , j = \overline{1,n} \ldots$$

Thì

$$T = \left[t_{ij} \right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}, \qquad \textbf{(3.13)}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

Khi đó với véc tơ bất kỳ $u \in V$; $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$. Ta có:

$$\left[x_i \right]_{n\times 1} = \left[t_{ij} \right]_{n\times n} \left[x'_j \right]_{n\times 1} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Nghĩa là

$$[u]_{\mathscr{B}} = \left[t_{ij} \right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [u]_{\mathscr{B}'} \qquad \textbf{(3.15)}$$

(3.14), (3.15) *được gọi là công thức đổi tọa độ*

Nếu A, A' lần lượt là ma trận của $\{ v_1,...,v_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ thì

$$A=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} A' \qquad \textbf{(3.16)}$$

<u>Ví dụ 3.21</u>: Hai hệ véc tơ $\mathscr{B}=\{e_1,e_n\}, \mathscr{B}'=\{e'_1,e'_n\}$, với $e_1=(1,0), e_n=(0,1)$ và $e'_1=(1,1), e_n=(4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Theo công thức: $\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ u=xe_1+ye_2=(4y-3x)e'_1+(x-y)e'_2$;

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ là $T=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $T'=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1) Tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa trong các trường hợp sau có phải là không gian véc tơ không? Chỉ rõ tiên đề mà phép toán không thoả mãn.

a) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\\ \alpha(x,y,z)=(2\alpha x,2\alpha y,2\alpha z);\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'+1,z+z'+1)\\ \alpha(x,y,z)=(0,0,0);\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}.$

3.2) Xét các hàm số xác định trong đoạn $[a,b]\subset\mathbb{R}$ với các phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với số thực. Tập các hàm số sau có phải là không gian véc tơ không?

a) Tập các hàm liên tục trong đoạn $[a,b]$.

b) Tập các hàm số khả vi trong khoảng (a,b) (có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a,b)$).

c) Tập các hàm số bị chặn trong đoạn $[a,b]$.

d) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=0$.

e) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=1$.

f) Tập các hàm số không âm trong đoạn $[a,b]$.

3.3) Tập hợp các véc tơ có dạng sau có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

a) Các véc tơ có dạng $(x,0,0)$.

b) Các véc tơ có dạng $(x,1,1)$.

c) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=0$.

d) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=1$.

e) Các véc tơ có dạng (x,y,z), $2x-y+z=0$, $x+y-4z=0$.

3.4) Tìm x,y,z nếu $(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$.

3.5) Hãy biểu diễn véc tơ u thành tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,15)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,4,-7,7)$; $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$.

3.6) Hãy xác định λ sao cho u là tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,\lambda)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,3,5)$; $v_1=(3,2,5)$, $v_2=(2,4,7)$, $v_3=(5,6,\lambda)$.

3.7) Viết đa thức $p=-3+4x+x^2$ thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức :

$$p_1=5-2x+x^2,\ p_2=-3x+2x^2,\ p_3=3+x.$$

3.8) Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ trong cơ sở $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.9) Chứng minh $\{v_1,v_2,v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của u trong cơ sở này.

a) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$.

b) $u=(6,2,-7)$; $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$.

3.10) Mỗi hệ véc tơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

a) $u=(1,1,1)$, $v=(2,2,0)$, $w=(3,0,0)$.

b) $u=(2,-1,3)$, $v=(4,1,2)$, $w=(8,-1,8)$.

c) $u=(3,1,4)$, $v=(2,-3,5)$, $w=(5,-2,9)$, $s=(1,4,-1)$.

3.11) Các hệ véc tơ dưới đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

a) $u=(4,-2,6)$, $v=(6,-3,9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u=(2,-3,1)$, $v=(3,-1,5)$, $w=(1,-4,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u=(5,4,3)$, $v=(3,3,2)$, $w=(8,1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u=(4,-5,2,6)$, $v=(2,-2,1,3)$, $w=(6,-3,3,9)$, $s=(4,-1,5,6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

3.12) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$

a) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,0)$.

b) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $d=a+b$ và $c=a-b$.

c) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $a=b=c=d$.

3.13) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi hệ các véc tơ sau:

a) $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,2,-1/2)$.

b) $v_1=(1,0,0,-1)$, $v_2=(2,1,1,0)$, $v_3=(1,1,1,1)$, $v_4=(1,2,3,4)$, $v_5=(0,1,2,3)$.

c) $v_1=(1,1,1,1,0)$, $v_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $v_3=(2,2,0,0-1)$, $v_4=(1,1,5,5,2)$,

$v_5=(1,-1,-1,0,0)$.

3.14) Cho 3 véc tơ v_1,v_2,v_3 của không gian véc tơ V. Chứng minh:

a) Nếu $\{v_1,v_2\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$ cũng độc lập.

b) Nếu $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

3.15) Chứng minh nếu hai hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ và $\{u_1,...,u_m\}$ của không gian véc tơ V mà mỗi véc tơ của hệ này đều biểu thị thành tổ hợp tuyến tính của hệ kia thì hai hệ đó có cùng hạng.

3.16) Giả sử U,V và W là ba không gian véc tơ con của một không gian véc tơ. Chứng minh rằng $(U\cap V)+(U\cap W)\subset U\cap(V+W)$.

3.17) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ: $u_1=(1,2,-1,3)$, $u_2=(2,4,1,-2)$, $u_3=(3,6,3,-7)$ và $v_1=(1,2,-4,11)$, $v_2=(2,4,-5,14)$. Đặt U, V là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ lần lượt sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1,u_2,u_3\}$ và $\{v_1,v_2\}$. Chứng minh rằng $U=V$.

3.18) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x-y-z=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở của $V\cap W, V, W$.

3.19) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| y=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Xác định $V\cap W, V+W$. Tổng này có phải là tổng trực tiếp không?

3.20) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét:

$$V=\operatorname{span}\{(1,0,0,2);(0,2,1,-1);(-1,6,3,7)\},\ W=\operatorname{span}\{(3,2,0,1);(1,2,1,1)\}$$

Tìm số chiều của $V, W, V\cap W, V+W$.

3.21) Tìm điều kiện của x,y,z để $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ thuộc không gian véc tơ con sinh bởi: $u_1=(2,1,0)$, $u_2=(1,-1,2)$, $u_3=(0,3,-4)$.

3.22) Chứng minh rằng $W=\left\{(x,y,0) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ là không gian véc tơ con sinh bởi hai véc tơ u,v trong đó :

a) $u=(1,2,0)$, $v=(0,1,0)$.

b) $u=(2,-1,0)$, $v=(1,3,0)$.

3.23) Cho hai véc tơ $u_1=(1,-3,2)$, $u_2=(2,-1,1)$ của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết $(1,7,-4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

b) Viết $(2,-5,4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

c) Tìm các giá trị của k để $(1,k,5)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

d) Tìm điều kiện x,y,z để (x,y,z) viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

3.24) Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy biểu thị tuyến tính véc tơ α_4 qua các véc tơ còn lại

$$\alpha_1=(1,1,1,1);\ \alpha_2=(2,2,2,2);\ \alpha_3=(3,0,-1,1);\ \alpha_4=(-12,3,8,-2);$$

3.25) Véc tơ $v=(3,9,-4,-2)$ có thuộc không gian sinh bởi hệ véc tơ sau hay không

$$S=\{\ u_1=(1,-2,0,3)\,;\ u_2=(2,3,0,-1)\,;\ u_3=(2,-1,2,1)\ \}.$$

3.26) Tìm hệ nghiệm cơ bản và số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x_1+\ \ x_2+4x_3-20x_4=0\\4x_1+2x_2-7x_3-15x_4=0\\\ \ x_1-2x_2+5x_3-\ \ 3x_4=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}5x_1+4x_2-2x_3+x_4+6x_5=0\\2x_1+2x_2-x_3+4x_4+3x_5=0\\7x_1+6x_2-3x_3+3x_4+9x_5=0\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2x-y+7z+4t=0\\x+2y-3z+6t=0\end{cases}$; d) $\begin{cases}2x+4y+z+2t+3w=0\\\ \ x+2y+z+2t+4w=0\end{cases}$.

3.27) Dùng định nghĩa, hãy chứng tỏ các hệ véc tơ sau trong $\mathbb{R}^4$ là phụ thuộc tuyến tính.

a) $S_1=\{\ u_1=(3,2,4,7)\,;\ u_2=(4,-3,11,2)\,;\ u_3=(-5,3,-13,1)\,;\ u_4=(7,-1,15,9)\}$.

b) $S_2=\{\ v_1=(1,3,0,7)\,;\ v_2=(4,-3,11,2)\,;\ v_3=(6,3,11,16)\,;\ v_4=(1,-1,1,2)\}$.

3.28) Tìm $W_1\cap W_2$, trong đó : $W_1=\{(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$. W_2 là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hai vec tơ $(1,2,3)$ và $(1,-1,1)$.

3.29) Cho W_1,W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ xác định như sau:

$$W_1=\{(x,y,z,t)\,|\,x,y,z,t\in\mathbb{R};\,y+z+t=0\}\,;W_2=\{(x,y,z,t)\,|\,x,y,z,t\in\mathbb{R};\,x+y=0,\,z=2t\}$$

Tìm một cơ sở và chiều của các không gian véc tơ con W_1,W_2 và $W_1\cap W_2$.

3.30) Giả sử W_1,W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V sao cho $W_1\cup W_2=V$. Chứng minh $W_1=V$ hoặc $W_2=V$.

3.31) Giả sử $k_1,...,k_n$ là n số thực cho trước, trong $\mathbb{R}^n$ xét tập:

$$W=\{v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,k_1x_1+...k_nx_n=0\}$$

a) Chứng minh W là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng $\dim W=n-1$ nếu $k_1,...,k_n$ không đồng thời bằng 0.

CHƯƠNG IV

PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Phép biến đổi tuyến tính chính là ánh xạ giữa hai không gian vec tơ. Chúng nói lên mối liên hệ và sự tương ứng giữa hai không gian vec tơ ấy.

Phép biến đổi tuyến tính có nhiều ứng dụng trong xử lý dữ liệu, nén dữ liệu, xử lý ảnh,....

4.1 ÁNH XẠ

4.4.1 Định nghĩa và ví dụ

Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x$ với $x \in \mathbb{N}$ là quy luật cho tương ứng

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \ldots$$

Ta có thể định nghĩa ánh xạ một cách trực quan như sau:

<u>Định nghĩa 4.1</u>: Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y = f(x)$ của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:

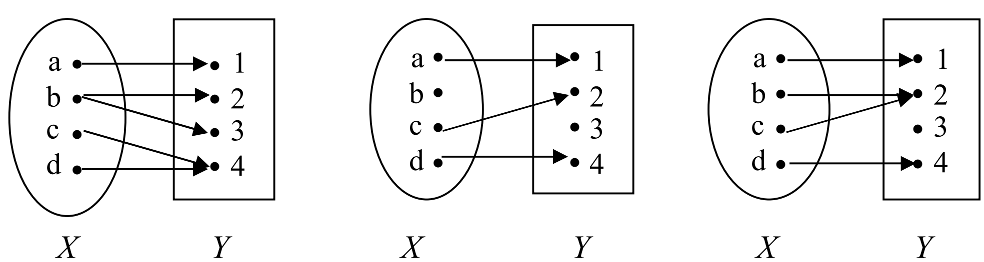
(i) Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $y = f(x) \in Y$,

(ii) Với mỗi $x \in X$ ảnh $f(x)$ là duy nhất.

Ta ký hiệu $\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$ hay $\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích.

<u>Ví dụ 4.1</u>:



Tương ứng a) Tương ứng b) Tương ứng c)

Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện (ii). Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện (i) của định nghĩa. Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ X vào Y.

Hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: X' \to Y'$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu thỏa mãn

$$\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x);\ \forall x \in X \end{cases} \quad \textbf{(4.1)}$$

Ví dụ 4.2: Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào $\mathbb{R}$. Chẳng hạn:

Hàm lôgarit $y = \ln x$ là ánh xạ $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \ln x$$

Hàm căn bậc hai $y = \sqrt{x}$ là ánh xạ $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}.$$

Định nghĩa 4.2: Xét ánh xạ $f: X \to Y$:

- Cho $A \subset X$, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của A qua ánh xạ f

$$f(A) = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\} \quad \textbf{(4.2)}$$

  Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f.

  Khi f là hàm số thì $f(X)$ được gọi là miền giá trị.

- Cho $B \subset Y$, ta ký hiệu và gọi tập sau là nghịch ảnh của B qua ánh xạ f

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \in B \right\}. \quad \textbf{(4.3)}$$

  Trường hợp B là tập hợp chỉ có một phần tử $\{y\}$ thì ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$. Vậy

$$f^{-1}(y) = \left\{ x \in X \,\middle|\, y = f(x) \right\}. \quad \textbf{(4.4)}$$

Ví dụ 4.3: Xét ví dụ ánh xạ $f: X \to Y$ là tương ứng c) của ví dụ 4.1.

Cho $A = \{a, b, c\} \subset X$, $B = \{2, 3, 4\} \subset Y$ thì

$$f(A) = \{1, 2\},\ \operatorname{Im} f = \{1, 2, 4\},\ f^{-1}(B) = \{b, c, d\},\ f^{-1}(2) = \{b, c\}.$$

4.1.2 Phân loại ánh xạ

a. Định nghĩa 4.3:

1) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt. Nghĩa là:

$$\forall x_1, x_2 \in X;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hay một cách tương đương:

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \textbf{(4.5)}$$

2) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X.

Vậy f là một toàn ánh khi thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau:

$$f(X) = Y \text{ hoặc } \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Mọi ánh xạ $f: X \to Y$ bất kỳ là toàn ánh lên tập giá trị $f(X)$.

3) Ánh xạ $f: X \to Y$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \qquad \textbf{(4.7)}$$

<u>Nhận xét</u>: Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$y = f(x),\ y \in Y \qquad \textbf{(4.8)}$$

trong đó ta xem x là biến ẩn và y là tham biến.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (4.29) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.

♦ Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (4.29) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (4.2) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

<u>Ví dụ 4.4</u>: Cho ánh xạ
$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto y = f(x) = x(x+1) \end{aligned}$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$.

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình luôn có 2 nghiệm thực

$$x_1 = \left(-1+\sqrt{1+4y}\right)/2, x_2 = \left(-1-\sqrt{1+4y}\right)/2.$$

Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f là đơn ánh.

Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh.

<u>Ví dụ 4.5</u>: Các hàm số đơn điệu chặt:

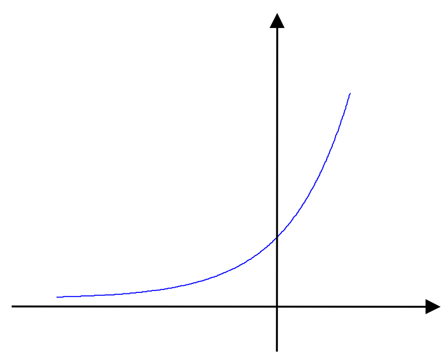
- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

<u>Ví dụ 4.6</u>: Xét 3 ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định và có các đồ thị tương ứng như sau :

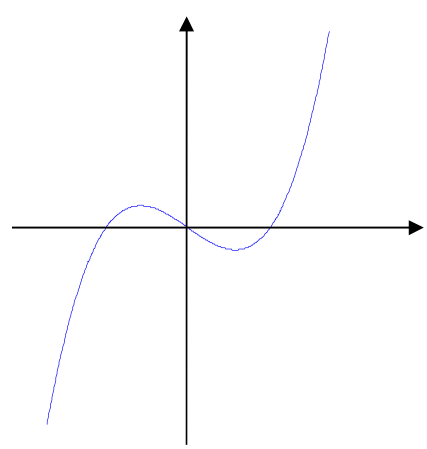
Hàm số $f(x) = 2^x$ có đạo hàm $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy f là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình (4.29) có không quá 1 nghiệm.



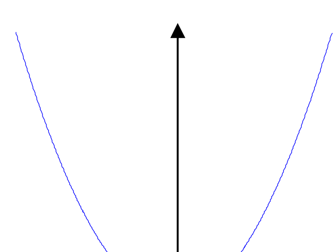
Hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị.

Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (4.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm. Vậy f là toàn ánh nhưng không đơn ánh.



Hàm số $h(x) = x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị ≥ 0.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình (4.29) có 2



b. Ánh xạ ngược của một song ánh

Định nghĩa 4.4: Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh, theo (4.28) với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. *Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f và được ký hiệu f^{-1}.* Vậy

$$f^{-1}: Y \to X \text{ và } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x). \qquad \textbf{(4.30)}$$

Có thể chứng minh được f^{-1} cũng là một song ánh.

Ví dụ 4.7: Hàm mũ cơ số a: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit cùng cơ số

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Ví dụ 4.8: Các hàm lượng giác ngược

Xét hàm $\begin{array}{c} \sin: [-\pi/2; \pi/2] \to [-1;1] \\ x \mapsto \sin x \end{array}$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh. Hàm ngược được ký hiệu

$$\begin{array}{c} \arcsin: [-1;1] \to [-\pi/2; \pi/2] \\ y \mapsto \arcsin y \end{array}$$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x, \ \forall x \in [-1;1], y \in [-\pi/2; \pi/2].$$

Tương tự hàm $\cos: [0;\pi] \to [-1;1]$ đơn điệu giảm chặt có hàm ngược

$$\arccos: [-1;1] \to [0;\pi];$$

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x.$$

Hàm ngược arctg, arccotg được xác định như sau

$x = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (-\pi/2;\pi/2)$.

$x = \operatorname{arccotg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{cotg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (0;\pi)$.

c. Hợp của hai ánh xạ

Định nghĩa 4.5: Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z, gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$. Vậy $g \circ f: X \to Z$ có công thức xác định ảnh

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \tag{4.31}$$

Ví dụ 4.9: Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x$ $g(x) = 2x^2 + 4$. Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4),\ g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4.$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

Nếu $f: X \to Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Hơn nữa ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $f: X \to Y$ là một song ánh khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ $g: Y \to X$ sao cho $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, lúc đó $g = f^{-1}$.

4.2 PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

4.2.1 Định nghĩa, ví dụ và tính chất

a. Định nghĩa 4.6: Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian W thoả mãn:

với mọi $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases} \tag{4.2}$$

được gọi là phép biến đổi tuyến tính (hay ánh xạ tuyến tính, đồng cấu tuyến tính) từ V vào W.

Khi $V = W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

b. Ví dụ 4.10: Xét các ánh xạ sau:

1) Ánh xạ không $\quad 0: V \to W$

$$u \mapsto 0(u) = \mathbf{0}$$

2) Ánh xạ đồng nhất $\quad \mathrm{Id}_V : V \to V$

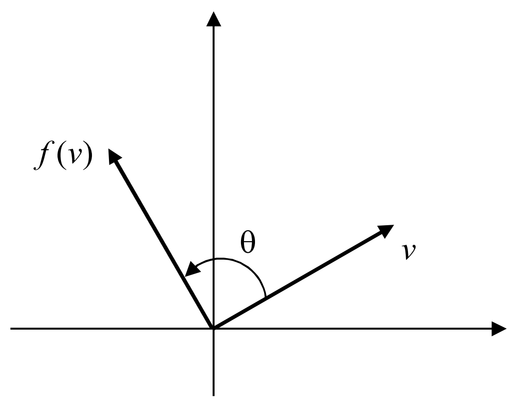
$$u \mapsto \mathrm{Id}_V(u) = u$$

3) Phép vị tự tỷ số $k \in \mathbb{R}$ $\quad f : V \to V$

$$u \mapsto f(u) = ku$$

4) Phép quay góc θ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



Ánh xạ 1), 2), 3), 4), 6) là ánh xạ tuyến tính.

2), 3), 6) là tự đồng cấu.

5) không phải là ánh xạ tuyến tính nếu $v_0 \neq \mathbf{0}$.

5) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, tương ứng $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_m)$$

xác định bởi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ngược lại ta có thể chứng minh được mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

c. Các tính chất

<u>**Định lý 4.1**</u>: *Nếu $f : V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính thì*

(i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ii) *với mọi* $v \in V$ *:* $f(-v) = -f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, ..., v_n \in V$.

Chứng minh: (i) $f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(ii) $f(v) + f(-v) = f(v + (-v)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(-v) = -f(v)$.

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo n. ■

Định lý 4.2: *Ánh xạ* $f : V \to W$ *là phép biến đổi tuyến tính khi và chỉ khi:*

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \qquad \textbf{(4.3)}$$

Chứng minh: Với mọi $u, v \in V$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta chứng minh điều kiện (4.2) tương đương điều kiện (4.3).

(4.2) $\Rightarrow$ (4.3): $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

(4.3) $\Rightarrow$ (4.2): $\begin{cases} f(u+v) = f(1u) + f(1v) = 1f(u) + 1f(v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = f(\alpha u + 0v) = \alpha f(u) + 0 f(v) = \alpha f(u). \end{cases}$ ■

Định lý 4.3: *Mỗi phép biến đổi tuyến tính từ* V *vào* W *hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của* V *; nghĩa là với cơ sở* $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ *cho trước của* V*, khi đó với mỗi hệ véc tơ* $u_1, ..., u_n \in W$*, tồn tại duy nhất một phép biến đổi tuyến tính* $f : V \to W$ *sao cho* $f(e_i) = u_i$, $i = 1, ..., n$. **(4.4)**

Chứng minh: *) Tồn tại: Với mọi $v \in V$, giả sử $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của v trong cơ sở $\mathcal{B}$, nghĩa là $v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Đặt $f(v) = x_1 u_1 + ... + x_n u_n \in W$.

Ta có thể kiểm chứng được rằng f là phép biến đổi tuyến tính và $f(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$.

*) Duy nhất: Giả sử $g : V \to W$ là phép biến đổi tuyến tính sao cho $g(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$ khi đó với bất kỳ $v \in V, v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$,

$$g(v) = g(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 g(e_1) + ... + x_n g(e_n) = x_1 u_1 + ... + x_n u_n = f(v)$$

Vậy $g = f$. ■

Hệ quả 4.4: *Cho* $f, g : V \to W$ *là hai phép biến đổi tuyến tính.* $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ *là một cơ sở của* V*. Khi đó*

$$f = g \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i); \forall i = 1, ..., n. \qquad \textbf{(4.5)}$$

d. Các phép toán của các phép biến đổi tuyến tính

d.1 Hom(V, W)

Cho hai không gian véc tơ V, W. Tập các phép biến đổi tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là $\mathrm{Hom}(V, W)$ (homomorphism).

Với $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto f(v) + g(v) \qquad \textbf{(4.6)}$$

là một ánh xạ tuyến tính, được ký hiệu $f + g$ và gọi là tổng của f và g.

Tương tự, với $k \in \mathbb{R}$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto kf(v) \qquad \textbf{(4.7)}$$

là phép biến đổi tuyến tính được ký hiệu là kf.

Vậy ta đã xác định hai phép toán: cộng hai phép biến đổi tuyến tính, nhân một số với phép biến đổi tuyến tính. Có thể chứng minh được với hai phép toán này thì $(\mathrm{Hom}(V, W), +, \cdot)$ có cấu trúc không gian véc tơ và $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

<u>**Ví dụ 4.11**</u>: Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x, y, z) = (3x - 5y + 2z, 4x + y - 6z),\ g(x, y, z) = (2x + 6y - 7z, x - 5z).$$

Ta có:

$$\Rightarrow 3f(x, y, z) = (9x - 15y + 6z, 12x + 3y - 18z), 2g(x, y, z) = (4x + 12y - 14z, 2x - 10z),$$

$$(3f - 2g)(x, y, z) = (5x - 27y + 20z, 10x + 3y - 8z).$$

d.2 EndV

Giả sử $f : V \to V'$ và $g : V' \to V''$ là hai phép biến đổi tuyến tính. Có thể chứng minh được rằng ánh xạ hợp $g \circ f : V \to V''$ cũng là một phép biến đổi tuyến tính.

Ký hiệu tập các tự đồng cấu của V là $\mathrm{End}\,V$ (endomorphism).

Với hai phép toán (4.6) , (4.7) thì $(\mathrm{End}\,V, +, \cdot)$ còn là một không gian véc tơ.

Vậy $\mathrm{End}\,V$ vừa có cấu trúc vành, vừa có cấu trúc không gian véc tơ.

Cho $f \in \mathrm{End}\,V$, ta ký hiệu

$$f^0 = \mathrm{Id}_V,\ f^1 = f,\ f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ lần}} \qquad \textbf{(4.8)}$$

<u>Ví dụ 4.3</u>: Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y) = (3x - 5y, 4x + y).$$

Khi đó $f^2(x,y) = (-11x - 20y, 16x - 19y)$

e. Nhân và ảnh của phép biến đổi tuyến tính

<u>Định nghĩa 4.7</u>: Với phép biến đổi tuyến tính $f:V \to W$ ta ký hiệu và định nghĩa

$$\mathrm{Ker} f = f^{-1}\{\mathbf{0}\}, \quad \mathrm{Im}\, f = f(V) \qquad \textbf{(4.8)}$$

là hạt nhân và là ảnh của f.

Vậy $\mathrm{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}$ là một không gian véc tơ con của V.

$$\forall v \in V: \ v \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.9)}$$

$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\}$ là một không gian véc tơ con của W.

$$\forall u \in W: \ u \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \exists v \in V: \ u = f(v) \qquad \textbf{(4.10)}$$

Ta ký hiệu và định nghĩa:

$$r(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \qquad \textbf{(4.11)}$$

là hạng của phép biến đổi f.

<u>Định lý 4.5</u>: *Với mọi phép biến đổi tuyến tính* $f:V \to W$

$$\dim V = r(f) + \dim \mathrm{Ker}\, f \qquad \textbf{(4.12)}$$

<u>Định lý 4.6</u>: *Cho phép biến đổi tuyến tính* $f:V \to W$. *Khi đó:*

(i) f *toàn ánh nếu và chỉ nếu* $r(f) = \dim W$.

(ii) f *đơn ánh nếu và chỉ nếu* $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$.

<u>Định lý 4.7</u>: *Giả sử* $\dim V = \dim W$ *và* $f:V \to W$ *là phép biến đổi tuyến tính từ* V *vào* W. *Khi đó:* f *đơn ánh khi và chỉ khi* f *toàn ánh, do đó song ánh.*

Chứng minh:

f toàn ánh $\Leftrightarrow r(f) = \dim W \Leftrightarrow r(f) = \dim V \Leftrightarrow f$ đơn ánh. ■

<u>Hệ quả 4.8:</u> *Giả sử* $f:V \to V$ *là một tự đồng cấu. Khi đó:* f *đơn ánh khi và chỉ khi* f *toàn ánh, do đó* f *là một song ánh.*

Ví dụ 4.5: Phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x,y) = (2x - y, x + y)$$

là một đơn ánh vì $f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (2x - y, x + y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

f đơn ánh do đó f là một song ánh vì vậy: với mọi $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tồn tại duy nhất $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x',y') = f(x,y) = (2x - y, x + y)$.

Như vậy f song ánh khi và chỉ khi hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - y = x' \\ x + y = y' \end{cases}.$$

Ta có thể tìm được nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{x' + y'}{3}$, $y = \dfrac{2y' - x'}{3}$.

4.2.2 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở

a. Ma trận biểu diễn của phép biến đổi tuyến tính

Theo Định lý 4.3, mọi phép biến đổi tuyến tính $f: V \to W$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V.

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó phép biến đổi tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$.

Mặt khác nếu $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận cỡ $m \times n$ có n cột là các tọa độ của các véc tơ $f(e_1), ..., f(e_n)$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$. Vì vậy với hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ cho trước thì phép biến đổi tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi ma trận:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \text{ với } f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j = 1, ..., n \qquad \textbf{(4.13)}$$

Định nghĩa 4.8: Ma trận A có các cột lần lượt là tọa độ của hệ véc tơ $f(e_1), ..., f(e_n)$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (công thức (4.24)) được gọi là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của V và $\mathscr{B}'$ của W. Ký hiệu:

$$A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Nếu f là một tự đồng cấu của không gian véc tơ V, khi đó ma trận A của f trong cùng một cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1,...,e_n \}$ của V được ký hiệu

$$A = [f]_{\mathscr{B}} \tag{4.15}$$

thay cho $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở chính tắc được gọi là *ma trận chính tắc*.

<u>Ví dụ 4.5</u>: Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y,z) = (2x + y - 4z, 3x + 5z)$

$$f(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1).$$

$$f(0,1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1).$$

$$f(0,0,1) = (-4,5) = -4(1,0) + 5(0,1).$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

<u>Nhận xét</u>: Bằng cách tính toán như ví dụ trên ta có thể kiểm tra được rằng phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ với công thức xác định ảnh:

$$f(x_1,...,x_m) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m, ..., a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m)$$

Có ma trận chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Nếu cố định cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1,...,e_n \}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}' = \{ \omega_1,...,\omega_m \}$ của W thì: Với mỗi phép biến đổi tuyến tính $f : V \to W$ tồn tại duy nhất ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$ xác định bởi (4.14).

Ngược lại, cho ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$. Xét hệ véc tơ $\{ u_1,...,u_n \}$ của W có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ là các cột của ma trận A, theo Định lý 4.3 tồn tại duy nhất phép biến đổi tuyến tính $f : V \to W$ thỏa mãn (4.4). Do đó $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \left[a_{ij} \right]_{m\times n} \in \mathscr{M}_{m\times n}$.

Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $\mathrm{Hom}(V,W)$ và $\mathscr{M}_{m\times n}$.

Định lý 4.21: *Tương ứng* $\quad \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathscr{M}_{m\times n}$

$$f \;\mapsto\; A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

xác định bởi (4.24) là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} + [g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\,;\;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon [\lambda f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \lambda [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \qquad \textbf{(4.27)}$$

$$r(f) = r([f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}). \qquad \textbf{(4.28)}$$

Chứng minh: $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{(f+g)(e_1),...,(f+g)(e_n)\}$, $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ và $[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{g(e_1),...,g(e_n)\}$. Do đó $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} + [g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Đẳng thức thứ hai của công thức (4.27) được chứng minh tương tự.

Để chứng minh công thức (4.28) ta nhận thấy rằng hạng $r(A)$ của ma trận $A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

Mặt khác $\mathrm{span}\{f(e_1),...,f(e_n)\} = f(V)$, do đó $r(A) = \dim f(V) = r(f)$. ■

Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f, g\colon V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V''$. V, V', V'' lần lượt có cơ sở là $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1,...,e'_m\}$, $\mathscr{B}'' = \{e_1'',...,e_l''\}$.

Giả sử $A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ và $B = [g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ là ma trận của g trong cơ sở $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ thì BA là ma trận của $g\circ f$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}''$. Thật vậy:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \text{ xác định bởi } f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \;;\; j = 1,...,n$$

$$B = [b_{ki}]_{l\times m}, \text{ xác định bởi } g(e'_i) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} e''_k \;;\; i = 1,...,m$$

$$g\circ f(e_j) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(e'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{ki} e''_k\right) = \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) e''_k .$$

Điều này chứng tỏ BA là ma trận của $g\circ f$.

$$[g\circ f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = [g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \qquad \textbf{(4.29)}$$

Khi $V = V' = V''$ và ta chọn cố định một cơ sở của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 4.22: *Tương ứng* $\operatorname{End}(V) \to \mathcal{M}_n$

$$f \mapsto A = [f]_{\mathcal{B}}$$

là một song ánh, trong đó $A = [f]_{\mathcal{B}}$ *là ma trận của* f *trong một cơ sở cố định* $\mathcal{B}$ *của* V *xác định bởi* (4.24), (4.26).

Hệ quả 4.23: *Cho* $f \in \operatorname{End} V$, $\mathcal{B}$ *là một cơ sở của* V. *Đặt* $A = [f]_{\mathcal{B}}$ *, khi đó:*

f *là tự đẳng cấu (song ánh) khi và chỉ khi* A *khả nghịch, đồng thời ma trận của* f^{-1} *trong cơ sở* $\mathcal{B}$ *có dạng* $\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = A^{-1}$.

Ví dụ 4.20: Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 3x + y + 5z, x - y + z).$$

Chứng minh rằng f là một song ánh. Tìm công thức xác định ảnh của phép biến đổi ngược $f^{-1}(x, y, z)$.

Giải: Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ma trận A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Do đó f là một song ánh và ánh xạ ngược xác định như sau:

$$f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(6x - 4y + 8z, 2x - y + z, -4x + 3y - 5z).$$

b. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f : V \to W$ là phép biến đổi tuyến tính.

Gọi $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathcal{B}'_1}^{\mathcal{B}_1}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'_1 = \{e'_1, ..., e'_n\}$ của không gian V.

Gọi $P = \left[p_{ki}\right]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}_2}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'_2 = \{\omega'_1, ..., \omega'_m\}$ của W.

$A = [f]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$,

$A' = [f]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2$ thì

$$[p_{ki}]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2} [f]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2} = [f]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} [t_{ij}]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \qquad \textbf{(4.20)}$$

Hoặc

$$PA' = AP\,; \quad A' = P^{-1}AT \qquad \textbf{(4.21)}$$

Thật vậy: Giả sử $A = [f]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = [a_{ki}]_{m\times n} \Rightarrow f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\omega_k$

$$A' = [f]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2} = [a'_{ki}]_{m\times n} \Rightarrow f(e'_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\,\omega'_i$$

$$P = [p_{ki}]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2} \Rightarrow \omega'_i = \sum_{i=1}^{m} p_{ki}\omega_k$$

$$T = [t_{ij}]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \Rightarrow e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i\,.$$

Ta có:

$$f(e'_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\,\omega'_i = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{ki}\omega_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij}\right)\omega_k \quad (*)$$

Mặt khác:

$$f(e'_j) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}\right)\omega_k \quad (**)$$

(*) và (**) suy ra $\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}$ với mọi $j = 1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,m$.

Do đó $PA' = AT$. Vậy $A' = P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V. Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A' = T^{-1}AT \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$[f]_{\mathscr{B}'} = \left([t_{ij}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} [f]_{\mathscr{B}} [t_{ij}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(4.23)}$$

Ví dụ 4.21: Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận ứng với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ xác định như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$.

Giải:

Cách 1 (Tìm trực tiếp theo định nghĩa 4.6 công thức (4.24)-(4.26)):

Đặt $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3, e'_3 = e_2, e'_4 = e_4$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(e'_1) = f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + e'_4;$$

$$f(e'_2) = f(e_3) = -e_2 + 3e_3 + e_4 = 3e'_2 - e'_3 + e'_4;$$

$$f(e'_3) = f(e_2) = 2e_1 + 5e_3 + 2e_4 = 2e'_1 + 5e'_2 + 2e'_4;$$

$$f(e'_4) = f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4 = e'_1 + e'_2 + 2e'_3 + 3e'_4;$$

Vậy ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2 (Áp dụng công thức 4.22, 4.25, 3.12):

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 4.7: *Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.*

Công thức (4.22) cho thấy hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Mặt khác, nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa định thức của một tự đồng cấu f là

$$\det f = \det A \qquad \textbf{(4.24)}$$

trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở nào đó.

<u>Ví dụ 4.22</u>: Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x,y) = (x-2y, x, -3x+4y),\ g(x,y,z) = (x-2y-5z, 3x+4y)$$

Tìm ma trận chính tắc của $g \circ f$, tính $\det(g \circ f)$.

Giải : Gọi A, B lần lượt là ma trận chính tắc của f và g thì:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

và ma trận chính tắc của $g \circ f$ là $BA = \begin{bmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$.

Định thức: $\det(g \circ f) = \begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 70$.

c. Biểu thức tọa độ của phép biến đổi tuyến tính

Giả sử $f : V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính, $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của V

và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Nếu $(x_1, ..., x_n) = (v)_{\mathscr{B}}$ là tọa độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$,

$(y_1, ..., y_m) = (f(v))_{\mathscr{B}'}$ là tọa độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (xem 3.10)

và $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [a_{ij}]_{m \times n}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ thì

$$[f(v)]_{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [v]_{\mathscr{B}}\text{; nghĩa là } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.25)}$$

(4.25) *được gọi là biểu thức tọa độ của phép biến đổi tuyến tính* f.

Đặc biệt nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là phép biến đổi tuyến tính xác định bởi

$$(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

thì ma trận chính tắc của f là $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ (xem nhận xét 4.2). Ngược lại từ công thức (4.25) suy ra rằng mọi phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng trên, điều này giải thích công thức (4.2) của ví dụ 4.2.

d. Phép biến đổi tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Đẳng thức (4.25) có thể viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \textbf{(4.26)}$$

Điều này cho phép giải quyết các bài toán về phép biến đổi tuyến tính thông qua hệ phương trình tuyến tính.

Giả sử $f: V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính, $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Từ công thức (4.20), (4.21) xác định $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ và biểu thức tọa độ dưới dạng hệ phương trình tuyến tính (4.26) ta có các kết quả sau:

- Với mọi $u \in W$, $u = b_1\omega_1 + \cdots + b_m\omega_m$. Khi đó

$u \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ có nghiệm **(4.27)**

- Với mọi $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$;

  $v \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi $(x_1, \ldots, x_n)$ là nghiêm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.28)}$$

<u>Nhận xét 4.3</u>:

Từ hai định lý 4.21, 4.22 hệ quả 4.23, 4.24 và các ví dụ trên ta thấy rằng một bài toán về phép biến đổi tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận, hệ phương trình tuyến tính và ngược lại. Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính f với $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là đơn cấu hoặc toàn cấu, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng (4.25), (4.26) có duy nhất nghiệm.

4.2.3 BÀI TOÁN CHÉO HOÁ

Trong phần này ta giải quyết bài toán: Với tự đồng cấu tuyến tính f của không gian V, hãy tìm một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Bài toán trên cũng tương đương với bài toán: Cho ma trận A tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Ta sẽ chỉ ra khi nào bài toán này có lời giải, cách tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo hoặc cách tìm ma trận T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

a. Véc tơ riêng, giá trị riêng

Định nghĩa 4.9: λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1,...,x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ hay } \left(A-\lambda I\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.30)}$$

Khi đó $v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ là các nghiệm khác không của phương trình thuần nhất (4.29). Không gian nghiệm của (4.29) được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định nghĩa 4.20: *λ được gọi là một giá trị riêng của tự đồng cấu f nếu tồn tại véc tơ $v\in V$:*

$$v\neq \mathbf{0} \textit{ sao cho } f(v)=\lambda v \qquad \textbf{(4.31)}$$

v là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

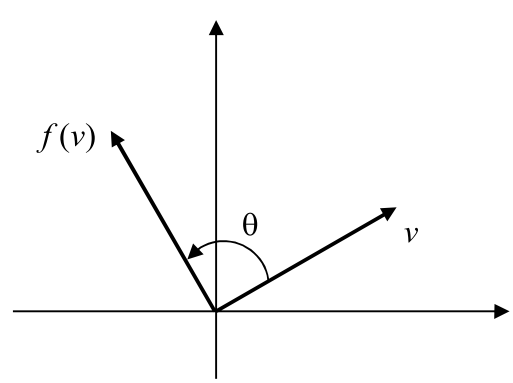
Ví dụ 4.24:

a) Xét ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_V : V\to V$.

Với mọi $v\in V$, $\mathrm{Id}_V(v)=v$.

Vậy 1 là một giá trị riêng của Id_V.

b) Phép quay góc θ (ví dụ 4.2)



$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto f_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

- Khi $\theta = 0$, f_θ là ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$: chỉ có giá trị riêng là 4.
- Khi $\theta = \pi$, f_θ: chỉ có giá trị riêng là -1.
- Khi $\theta \neq 0, \pi$, f_θ không có giá trị riêng.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x, y) = (3x - y, -2x + 4y)$.

Dễ dàng thấy $f(x, x) = 2(x, x)$. Vậy 2 là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v = (x, x)$; $x \neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng.

Định nghĩa 4.21: *Cho tự đồng cấu f của V. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, ký hiệu*

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \middle| f(v) = \lambda v \right\} = \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\, \mathrm{Id}_V \right) \qquad \textbf{(4.32)}$$

Rõ ràng rằng V_λ là không gian con của V.

Nếu λ là giá trị riêng thì V_λ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định lý 4.25: *1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.*

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v \neq \mathbf{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Nhận xét 4.4: Nếu $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\mathscr{B}$. Khi đó $v \in V$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f khi và chỉ khi $(v)_{\mathscr{B}}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của A. Nghĩa là:

$$v \in V; (v)_{\mathscr{B}} = (x_1, \ldots, x_n), v \neq \mathbf{0} : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.33)}$$

b. Đa thức đặc trưng

Định nghĩa 4.22: *A là một ma trận vuông cấp n. Định thức*

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad \textbf{(4.34)}$$

là một đa thức bậc n của λ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

Nếu f là một tự đồng cấu trong không gian véc tơ V có ma trận $A = [f]_{\mathscr{B}}$ trong một cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó của V. Khi đó định thức

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V\right) = \det(A - \lambda I) \qquad \textbf{(4.35)}$$

không phụ thuộc vào cơ sở của V, cũng được gọi là đa thức đặc trưng của f.

Định lý 4.26: λ_0 là giá trị riêng của A (tương ứng của f) khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A (tương ứng của f).

Chứng minh: λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $V_{\lambda_0} \neq \{\mathbf{0}\}$. Điều này tương đương với các điều sau: Ánh xạ $f - \lambda_0\,\mathrm{Id}_V$ không đơn cấu, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.33) có nghiệm không tầm thường.

Vậy λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $r\left(f - \lambda_0\,\mathrm{Id}_V\right) < n$; do đó $\det\left(f - \lambda_0\,\mathrm{Id}_V\right) = 0$ hoặc $\det\left(A - \lambda_0 I\right) = 0$. Nghĩa là $\mathscr{P}(\lambda_0) = 0$. ■

Ví dụ 4.25: Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu trong $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (xem ví dụ 4.24-c).

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_1 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x - y = 0 \Rightarrow y = x$.

Vậy $v = (x, x) = x(1,1),\ x \neq 0$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_2 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$.

Vậy $v = (x, -2x) = x(1, -2);\ x \neq 0$.

Ví dụ 4.26: Phép quay góc θ (ví dụ 4.2, 4.24-b) $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh $f_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Đa thức đặc trưng:

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det\left(f_\theta - \lambda\,\mathrm{Id}_V\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta .$$

Do đó f_θ chỉ có giá trị riêng khi $\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$.

c. Tự đồng cấu chéo hoá được

<u>Định nghĩa 4.23</u>: 1) *Tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.*

Từ định nghĩa này ta thấy rằng f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f.

2) Ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

<u>Định lý 4.28</u>: *Nếu $v_1,...,v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,...,\lambda_m$ của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh: Ta chứng minh quy nạp theo k rằng hệ $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập tuyến tính với $1 \le k \le m$.

* Khi $k = 1$ hệ một véc tơ $v_1 \ne \mathbf{0}$ là độc lập tuyến tính.

* Giả sử hệ $\{v_1,...,v_k\}$ với $1 \le k \le m-1$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh hệ $\{v_1,...,v_k, v_{k+1}\}$ độc lập. Thật vậy, giả sử

$$x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f(x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1x_1v_1 + ... + \lambda_kx_kv_k + \lambda_{k+!}x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (**)$$

Nhân λ_{k+1} vào (*) rồi trừ cho (**) ta được

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_1)x_1v_1 + ... + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)x_kv_k = \mathbf{0}$$

Vì $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập và các $\lambda_1,...,\lambda_m$ khác nhau từng đôi một suy ra

$$x_1 = ... = x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} = 0 .$$ ■

<u>Hệ quả 4.29</u>: *Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V (hoặc ma trận A vuông cấp n) có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được.*

Chứng minh: Vì đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt nên n véc tơ riêng tương ứng với n giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được. ■

<u>**Hệ quả 4.30**</u>: *Giả sử đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A vuông cấp n) chỉ có các nghiệm thực:*

$$\mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}...(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

với $m_1+...+m_k=n$ và các $\lambda_1,...,\lambda_k$ khác nhau từng đôi một.

Khi đó f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được khi và chỉ khi chiều của không gian riêng ứng với giá trị riêng λ_i bằng độ bội m_i của nghiệm. Nghĩa là

$$\forall\ i=1,...,k:\ \dim V_{\lambda_i}=m_i. \qquad \textbf{(4.38)}$$

Chứng minh: $(\Leftarrow)$: Trong mỗi V_{λ_i} ta chọn một cơ sở gồm m_i véc tơ. Hệ n véc tơ gộp lại từ các véc tơ của các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được.

$(\Rightarrow)$: Giả sử f chéo hoá được, khi đó tồn tại cơ sở gồm các véc tơ riêng để ma trận f có dạng chéo

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \mu_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\ \mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\mu_1)...(\lambda-\mu_n)$

Suy ra các giá trị riêng $\mu_1,...,\mu_n$ phải trùng với $\lambda_1,...,\lambda_k$.

Vậy có đúng m_i giá trị riêng trong các $\mu_1,...,\mu_n$ bằng λ_i, $i=1,...,k$. Do đó có đúng m_i véc tơ riêng độc lập ứng với giá trị riêng λ_i, nghĩa là $\dim V_{\lambda_i}=m_i$. ■

d. Thuật toán chéo hoá

❖ <u>Bài toán 1</u>: Cho tự đồng cấu f trên không gian V. Hãy tìm cơ sở của V để ma trận f trong cơ sở này có dạng chéo.

❖ <u>Bài toán 2</u>: Cho ma trận A vuông cấp n. Tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Cho tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V. Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trong V và ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$ là $A=[f]_{\mathscr{B}}$. Khi đó bài toán 1 trở thành bài toán 2. Ngược lại, cho ma trận vuông A ta xét phép biến đổi tuyến tính

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Khi đó bài toán 2 trở thành bài toán 4.

Vì vậy, để giải hai bài toán này ta cần tìm cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f và ma trận cần tìm T chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$. Vậy ta cần thực hiện các bước sau:

<u>Bước 1</u>: Viết đa thức đặc trưng dạng:

$$\mathscr{P}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} ... (\lambda_k - \lambda)^{m_k} Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda)$ là đa thức không có nghiệm thực.

- Nếu $m_1 + \cdots + m_k < n$ (khi bậc của $Q(\lambda)$ ≥ 2): không chéo hóa được.
- Nếu $m_1 + \cdots + m_k = n$ thì $\lambda_1,...,\lambda_k$ là các giá trị riêng phân biệt; tiếp tục bước 2.

<u>Bước 2</u>: Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một cơ sở của không gian riêng V_{λ_i}. Các véc tơ riêng $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ có $(x_1,...,x_n)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình thuần nhất:

$$\left[A - \lambda_i I\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.39)}$$

$\dim V_{\lambda_i} = d_i = n - r\left(A - \lambda_i I\right)$.

- Nếu $d_i < m_i$ với i nào đó, $1 \leq i \leq k$ thì f không hoá chéo được.
- Nếu $d_i = m_i$, $\forall i: 1 \leq i \leq k$. Tiếp tục bước 3.

<u>Bước 3</u>: Với giá trị riêng λ_i, $i = 1,...,k$ ta đã chọn được m_i véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Gộp tất cả các véc tơ này ta được hệ gồm $m_1 + ... + m_k = n$ véc tơ riêng độc lập, đó là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm. Ma trận T có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$.

<u>Ví dụ 4.27</u>: Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A: $\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 9 & -5-\lambda & -3\\ -8 & 8 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

A có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$ nên chéo hóa được.

*) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=-1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases}3x-y=0\\ 4x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x\\ z=-4x\end{cases}$

Do đó $v\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow v=\left(x,3x,-4x\right)=x(1,3,-4)$ chọn $e'_1=(1,3,-4)$.

**) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá riêng $\lambda_2=1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases}x-y=0\\ 2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x\\ z=-2x\end{cases}$

Do đó $v\in V_{\lambda_2}\Leftrightarrow v=\left(x,x,-2x\right)=x(1,1,-2)$ chọn $e'_2=(1,1,-2)$.

***) Giá trị riêng $\lambda_3=3$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 9 & 1 & 6\\ -8 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$. Ta có $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 9 & 1 & 6\\ -8 & 0 & -6\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \dfrac{-4}{3}x \end{cases}$

Do đó $v \in V_{\lambda_3} \Leftrightarrow v = \left(x, -x, \dfrac{-4}{3}x \right) = \dfrac{x}{3}(3,-3,-4)$ chọn $e'_3 = (3,-3,-4)$.

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Đặt $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ thì $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 4.28</u>: Xét tự đồng cấu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = \left(3x - 2y, -2x + 3y, z\right).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Ma trận chính tắc của f: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

có hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

$v = \left(-y, y, 0\right) = y(-1,1,0)$ chọn $e'_1 = (-1,1,0)$.

**) Giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có véc tơ riêng $v = (x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x - y = 0$, z tuỳ ý.

$v = (x, x, z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)$ chọn $e'_2 = (1,1,0)$, $e'_3 = (0,0,1)$.

Chọn cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$; $f(e'_1) = 5e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$, $f(e'_3) = e'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A' = [f]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 4.29</u>: Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1-\lambda & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1$ (kép) và $\lambda_2 = 3$.

Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Biến đổi ta được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ \quad\ \ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow v = (x, 2x, x) = x(1,2,1)$$

Không gian riêng $V_{\lambda_2} = \{x(1,2,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ có $\dim V_{\lambda_2} = 1 < 2$ nên ma trận A không chéo hoá được.

4.3 GIỚI THIỆU ỨNG DỤNG CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

4.3.1. Ứng dụng vào mô hình tăng trưởng dân số

a. Mô hình Leslie về tăng trưởng dân số

Một trong những mô hình tăng trưởng dân số phổ biến nhất là mô hình dựa trên ma trận, được P. H. Leslie giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1945. Mô hình Leslie mô tả sự tăng trưởng của bộ phận nữ giới trong dân số, được giả định là có tuổi thọ tối đa, trong đó dân số không bị di cư, phát triển trong một môi trường không giới hạn. Những phụ nữ được chia thành các lớp tuổi, tất cả đều trải qua một số năm bằng nhau. Sử dụng dữ liệu về tỷ lệ sinh trung bình và xác suất sống sót của mỗi tầng lớp, mô hình có thể xác định sự tăng trưởng của dân số theo thời gian. Cụ thể, ma trận Leslie là một mô hình gia tăng dân số có cấu trúc theo tuổi, rời rạc, rất phổ biến trong hệ sinh thái dân số. Ma trận Leslie (còn được gọi là mô hình Leslie) là một trong những cách nổi tiếng nhất để mô tả sự gia tăng dân số (và phân bố tuổi dự kiến của chúng).

Bước đầu tiên trong quy trình này là nhóm dân số thành các nhóm tuổi có thời gian bằng nhau. Ví dụ: nếu tuổi thọ tối đa của một thành viên là M năm, thì n khoảng thời gian bên dưới biểu thị các lớp tuổi.

- $\left[0, \dfrac{M}{n}\right)$: lớp tuổi thứ nhất.
- $\left[\dfrac{M}{n}, \dfrac{2M}{n}\right)$: lớp tuổi thứ hai.
- ……….
- $\left[\dfrac{(n-1)M}{n}, M\right]$: lớp tuổi thứ n.

Ma trận phân phối tuổi là ma trận $X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ với x_i là số lượng phụ nữ ở lớp tuổi thứ i. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa: Ma trận L có dạng sau đây được gọi là ma trận Leslie:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

trong đó các b_i là các tham số tuổi, s_i là tham số sống, cụ thể:

- b_i là số lượng phụ nữ trung bình được sinh ra bởi một phụ nữ trong lớp thứ i. Do đó $b_i > 0$.

- s_i là xác suất để một thành viên của lớp tuổi thứ i sẽ sống sót để trở thành thành viên của lớp $i+1$ tuổi là s_i trong một chu kỳ $\frac{M}{n}$ năm. Do đó $0 \le s_i \le 1$.

- Phần tử ở hàng i cột j của ma trận Leslie cho biết có bao nhiêu cá nhân sẽ ở trong độ tuổi i ở bước thời gian tiếp theo đối với mỗi cá nhân trong giai đoạn j. Tại mỗi bước thời gian, vectơ tổng được nhân với ma trận Leslie để tạo ra vectơ tổng thể cho bước thời gian tiếp theo.

Từ các quan sát rằng x_0 tại thời điểm $t+1$ chỉ đơn giản là tổng của tất cả các phụ nữ được sinh ra từ bước thời gian trước đó và các phụ nữ còn sống đến thời điểm $t+1$ là các sinh vật có xác suất sống sót tại thời điểm t với xác suất s_k. Ta được $x_{k+1} = s_k x_k$. Ta có đẳng thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_t .$$

Viết gọn lại, ta có $X_{t+1} = LX_t$. Do đó theo quy nạp, ta có:

$$X_{t+1} = L^t X_0 .$$

Vậy nếu muốn biết véc tơ của sự phong phú về độ tuổi trong bất kỳ năm nào, ta chỉ cần nhân với ma trận Leslie một số lần thích hợp.

Ví dụ (Mô hình tăng trưởng dân số)

Một quần thể thỏ có các đặc điểm dưới đây.

a) Một nửa số thỏ sống sót qua năm đầu tiên. Trong số đó, một nửa sống sót qua năm thứ hai. Tuổi thọ tối đa là 3 năm.

b) Trong năm đầu tiên, những con thỏ không sinh con. Số lượng trung bình của

con cái là 6 trong năm thứ hai và 8 trong năm thứ ba.

Đàn thỏ (dân số) lúc này gồm 24 con thỏ ở lứa tuổi thứ nhất, 24 con ở lứa tuổi thứ hai,

và 20 thuộc lứa tuổi thứ ba. Hỏi trong 1 năm có bao nhiêu con thỏ ở mỗi lớp tuổi?

Vec tơ phân phối tuổi hiện tại là $X = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix}$.

Ý nghĩa:

- $x_1 = 24$ là số lượng thỏ có tuổi $0 \le tuoi < 1$.
- $x_2 = 24$ là số lượng thỏ có tuổi $1 \le tuoi < 2$.
- $x_3 = 20$ là số lượng thỏ có tuổi $2 \le tuoi < 3$.

Ma trận Leslie là $L = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$.

Sau một năm, vec tơ phân phối tuổi sẽ là:

$$X_2 = LX_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 304 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Kết luận: Sau 1 năm, có 304 con thỏ ở lứa tuổi thứ nhất, 12 con thỏ ở lứa tuổi thứ hai và 12 con thỏ ở lứa tuổi thứ ba.

b. Tăng trưởng dân số ổn định

Trong mục này, các giá trị riêng và vec tơ riêng sẽ được ứng dụng để khảo sát sự phân phối tuổi ổn định của một quần thể.

Ví dụ: Tìm vec tơ phân phối tuổi ổn định trong ví dụ trên.

Để giải bài toán này, ta cần tìm giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận Leslie, tức là tìm λ và X sao cho $LX = \lambda X$. Ta giải phương trình đặc trưng:

$$\det(L - \lambda I) = (\lambda + 1)^2 (2 - \lambda) = 0.$$

Hai nghiệm là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Chọn giá trị dương là 2. Giải hệ $(L - 2I)X = 0$ ta được $X = \begin{bmatrix} 16t \\ 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Từ đây kéo theo tỷ lệ ổn định của quần thể là 16:4:1.

Chẳng hạn, với $t = 2$ thì ta có vec tơ phân phối tuổi là $X = \begin{bmatrix} 32 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vậy phần trăm dân số trong mỗi lớp tuổi là không đổi theo tỷ lệ 16 : 4 : 1.

Bài toán luôn có nghiệm ổn định vì ta có định lý sau:

Định lý: *Mỗi ma trận Leslie có một giá trị riêng dương duy nhất và một vec tơ riêng tương ứng có các thành phần đều dương.*

4.3.2 Ứng dụng vào mô hình hồi quy tuyến tính đơn giản

a. Bài toán hồi quy tuyến tính

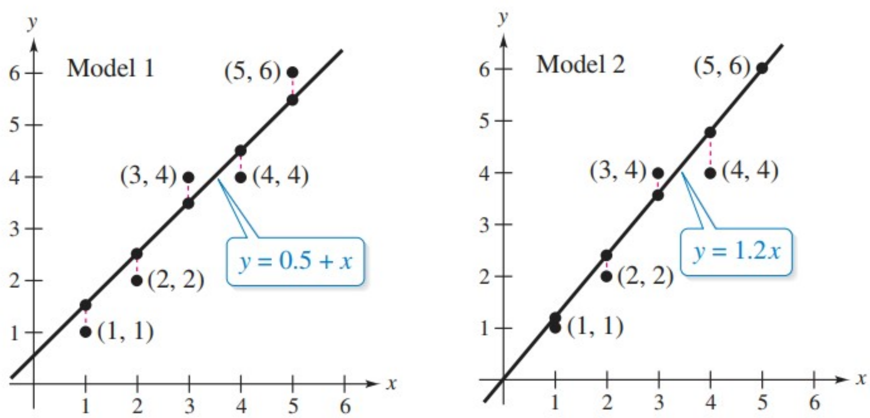
Mô hình hồi quy tuyến tính xuất hiện rất nhiều trong thống kê dữ liệu, kinh tế lượng và học máy (trí tuệ nhân tạo) … nhằm để khảo sát về sự thay đổi của một đại lượng theo một đại lượng khác thể hiện bởi một phương trình toán học. Francis Galton, trong một công trình xuất bản năm 1886, đã khẳng định rằng có một xu hướng về chiều cao của những đứa trẻ do cha mẹ cao không bình thường hoặc thấp không bình thường sinh ra. Xu hướng đó chi phối bởi phương trình toán học. Phương trình đơn giản nhất là phương trình tuyến tính.

Phân tích hồi quy nghiên cứu sự phụ thuộc của một biến, được gọi là biến phụ thuộc (hay biến được giải thích) vào một hay nhiều biến khác, được gọi là biến độc lập (hay biến giải thích) nhằm ước lượng hay dự báo giá trị trung bình của biến phụ thuộc trên cơ sở các giá trị đã biết trước của các biến độc lập.

Bài toán hồi quy tuyến tính được phát biểu như sau: Giả sử ta có một bộ dữ liệu $\{(x_i, y_i)\}, i = 1, \ldots, N$ cho trước, tìm một hàm tuyến tính xấp xỉ "tốt nhất" của bộ dữ liệu trên.

Ví dụ: Xác định một đường thẳng phù hợp nhất với các điểm $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(5,6)$ trong hai đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = 1,2x$.

Ta có nhận xét: Các đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = 1,2x$ đều đi qua vùng giữa gần các bộ điểm đó. Vì vậy, muốn có xấp xỉ tốt nhất thì ta phải lấy được tổng của bình phương các sai số và tổng nào nhỏ hơn thì ta nhận.



(Ảnh minh hoạ trong sách của Larson)

Bảng giá trị của $y = x + 0,5$ Bảng giá trị của $y = 1,2x$

x_i	y_i	$f(x_i)$	$\left[y_i - f(x_i)\right]^2$
1	1	1,5	$(-0,5)^2$
2	2	2,5	$(-0,5)^2$
3	4	3,5	$(0,5)^2$
4	4	4,5	$(-0,5)^2$
5	6	5,5	$(0,5)^2$
Tổng			1,25

x_i	y_i	$f(x_i)$	$\left[y_i - f(x_i)\right]^2$
1	1	1,2	$(-0,2)^2$
2	2	2,4	$(-0,4)^2$
3	4	3,6	$(0,4)^2$
4	4	4,8	$(-0,8)^2$
5	6	6,0	$(0,0)^2$
Tổng			1,00

Từ hai bảng trên, ta thấy tổng bình phương các sai số ở bảng thứ hai nhỏ hơn bảng thứ nhất, vì vậy ta nhận đường thẳng $y = 1,2x$. Vậy từ ví dụ này ta thấy cần phải cực tiểu hoá tổng bình phương các sai số. Ta đến với phương pháp rất nổi tiếng sau đây của nhà toán học Gauss.

b. Phương pháp bình phương tối thiểu của Gauss

Định nghĩa: Cho bộ dữ liệu 2 chiều (tức bộ điểm) $\left\{\left(x_i, y_i\right)\right\}, i = 1,\ldots,N$ trong mặt phẳng. Đường thẳng xác định bởi hàm tuyến tính $f(x) = a_1 x + a_0$, sao cho tổng bình phương các sai số $\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f(x_i)\right]^2$, được gọi là đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu.

Để tìm đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu, ta xét hệ sau:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + [y_1 - f(x_1)] \\ y_2 = f(x_2) + [y_2 - f(x_2)] \\ \vdots \\ y_N = f(x_N) + [y_N - f(x_N)] \end{cases},$$

trong đó các $e_i = [y_i - f(x_i)]$ chính là các sai số xấp xỉ. Ta viết lại hệ trên dưới dạng:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_0 + [y_1 - f(x_1)] \\ y_2 = a_1 x_2 + a_0 + [y_2 - f(x_2)] \\ \vdots \\ y_N = a_1 x_N + a_0 + [y_N - f(x_N)] \end{cases}.$$

Đặt $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$. Khi đó hệ N phương trình tuyến tính trên trở thành dạng ma trận như sau: $Y = XA + E$.

Mệnh đề: *Với mô hình hồi quy như trên, xác định bởi hệ phương trình dạng ma trận $Y = XA + E$ thì đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu có các hệ số được xác định bởi công thức:*

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

trong đó tổng bình phương các sai số là $E^T E$ và các x_i là phân biệt.

Chứng minh.

Từ hệ phương trình xác định mô hình hồi quy, ta có

$$E = Y - XA \Rightarrow E^T E = (Y - XA)^T (Y - XA) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 .$$

Ta tìm $\min \frac{1}{2N} E^T E = \min_{(a_0,a_1)} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$.

Ta có điểm cực trị của hàm trên thoả mãn hệ $\begin{cases} \dfrac{\partial E^T E}{\partial a_0} = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial E^T E}{\partial a_1} = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} N a_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i a_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{cases}$. Ta có nghiệm của hệ phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{N} x_i \\ -\sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Đẳng thức trên tương đương với $A = \left(X^T X \right)^{-1} \left(X^T Y \right)$.

Vi phân cấp hai: $\dfrac{\partial^2 E^T E}{\partial a_0^2} = 1, \dfrac{\partial^2 E^T E}{\partial a_0 \partial a_1} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \dfrac{\partial E^T E}{\partial a_1^2} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$, ta có dấu của vi phân cấp hai $d^2(E^T E) = d^2 a_0 + \left(\dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) da_0 da_1 + \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) d^2 a_1$ được khảo sát như sau:

Xét $\Delta = b^2 - ac = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$. Ta có $\det(X^T X) = \dfrac{1}{N^2}(-\Delta)$ nên $X^T X$ khả nghịch, tức hệ trên có nghiệm duy nhất nếu và chỉ nếu $\Delta \neq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz-Buniakowsky, ta có $\Delta < 0$, do đó thì nghiệm $A = \left(X^T X\right)^{-1}\left(X^T Y\right)$ chính là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán bình phương tối thiểu.

Chú ý rằng $X^T X$ không khả nghịch nếu và chỉ nếu $x_1 = x_2 = \ldots = x_N = k$.

Ví dụ: Xác định đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu của các điểm $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(5,6)$.

Ta có các ma trận là:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra $X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$ và

$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 63 \end{bmatrix}$. Dễ thấy $\det X^T X \neq 0$ nên ma trận này khả nghịch và $(X^T X)^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$. Từ đó kéo theo

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 1,2 \end{bmatrix}.$$

Vậy đường hồi quy bình phương tối thiểu của bộ điểm trên là: $y = 1,2x - 0,2$.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1) Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nào dưới đây là phép biến đổi tuyến tính:

a) $f(x, y) = (2x, x + y)$ b) $f(x, y) = (x^2, y)$

c) $f(x, y) = (y, x)$ d) $f(x, y) = (x, y + 1)$

e) $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ f) $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

4.2) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(1,0,0) = (1,1),\ f(0,1,0) = (3,0),\ f(0,0,1) = (4,-7).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của f.

b) Tính $f(1,3,8)$, $f(x, y, z)$.

4.3) Chứng minh mọi phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ đều có dạng:

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Hãy tổng quát hoá đối với phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

4.4) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$:

a) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Ker} f$: $(5,10); (3,2); (1,1)$.

b) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Im} f$: $(1,-4); (5,0); (-3,12)$.

4.5) Viết ma trận chính tắc, tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, tìm một cơ sở của $f^{-1}(0)$ của các phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sau:

a) $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 5x + 6y - 4z, 7x + 4y + 2z)$

b) $f(x, y, z) = (2x - z, -x + 2z, 0)$

c) $f(x, y, z) = (2x + 2y - 8z, x + 6y + z, 3x + 6y - 9z, x + 5y)$

d) $f(x, y, z, t) = (x + 4y + 5z + 9t, 3x - 2y + z - t, -x - y - t, 2x + 3y + 5z + 8t)$.

4.6) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$; $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$.

4.7) Cho phép biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(v_1) = (1,0)$, $f(v_2) = (1,0)$, $f(v_3) = (0,1)$. Tìm công thức xác định ảnh $f(x,y,z)$.

4.8) Với hai ma trận cùng cấp bất kỳ A, B chứng minh: $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

4.9) Với hai ma trận vuông cấp n bất kỳ A, B, chứng minh bất đẳng thức Sylvester: $r(A) + r(B) - n \le r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

4.10) Tìm định thức của các tự đồng cấu f của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (2x - z, x + 2y - 4z, 3x - 3y + z).$$

4.11) Tìm các giá trị riêng, cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

4.12) Chứng tỏ rằng các ma trận sau không chéo hoá được:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

4.13) Chéo hóa hai ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

4.14) Tìm ma trận P làm chéo hoá A và xác định $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$

4.15) Trong mỗi trường hợp sau tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để phép biến đổi tuyến tính f có ma trận dạng chéo:

a) $f(x,y,z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$

b) $f(x,y,z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$

c) $f(x,y,z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$

d) $f(x,y,z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

4.16) Chứng minh rằng A và A^t có cùng đa thức đặc trưng.

4.17) Tìm đường thẳng hồi quy bình phương tối thiểu của các bộ điểm sau đây:

a) (−4, −1), (−2, 0), (2, 4), (4, 5).

b) (−5, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 5).

c) (−5, 10), (−1, 8), (3, 6), (7, 4), (5, 5).

d) (0, 6), (4, 3), (5, 0), (8, −4), (10, −5).

4.18) Một quần thể dân số có các đặc điểm dưới đây.

(a) Tổng cộng 75% dân số sống sót sau năm thứ nhất. Trong số 75% đó, 25% sống sót qua năm thứ hai. Tuổi thọ tối đa là 3 năm.

(b) Số con trung bình của mỗi thành viên của dân số là 2 năm đầu tiên, 4 ở năm thứ hai năm và 2 ở năm thứ ba.

Dân số hiện nay bao gồm 160 thành viên trong mỗi ba lớp tuổi. Sẽ có bao nhiêu thành viên ở mỗi lớp tuổi trong 1 năm? trong 2 năm?

4.19) Một nhà bán lẻ về gia dụng muốn biết nhu cầu sử dụng bếp từ. Nhu cầu này xem như là một hàm mà biến là giá. Các cặp “(giá, nhu cầu)” theo thứ tự trong từng tháng của cửa hàng là (25, 82), (30, 75), (35, 67) và (40, 55) biểu diễn giá là x (USD) và doanh số hàng tháng tương ứng y (cái).

a) Tìm đường hồi quy bình phương tối thiểu cho cho các dữ liệu trên.

b) Ước tính nhu cầu khi giá là 32.95 USD.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Ngọc Anh, Lê Bá Long, *Giáo trình Toán cao cấp 2*, Học viện Công nghệ BCVT, 2021.
2. Lê Bá Long; *Giáo trình Đại số*; Học viện công nghệ Bưu chính Viễn thông. NXB Bưu điện, 2008.
3. Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, NXB Đại học Kinh tế Quốc dân (Phần 1: Đại số tuyến tính), 2007.
4. Trần Văn Cúc, *Toán cao cấp cho ngành kinh tế,* Tập 1 và 2, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.
5. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Giáo trình Đại số tuyến tính,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2020.
6. Ngô Việt Trung, *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG Hà Nội 2001.
7. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Toán cao cấp tập một*, NXB GD 1996.
8. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Bài tập toán cao cấp tập một*, NXB GD 1997.
9. Ron Larson. *Elementary Linear Algebra*, Cengage Learning - USA, 2017.
10. David Poole, *Linear Algebra, a modern introduction,* Cengage Learning - USA, 2015.
11. Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski, *Linear Algebra for Economists*, Springer, 2011.
12. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, *Fundamental methods of Mathematical Economics,* McGraw-Hill Irwin, 2005.
13. Mike Rosser and Piotr L, *Basic Mathematics for Economists*, 3rd Edition, Routledge Taylor & Francis e-Library, 2016.
14. Lipshutz S., *Linear Algebra*, Mc Graw-Hill, 1987.