BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E=\{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Biết phân bố ban đầu: $p_0=P\{X_0=0\}=0,3$; $p_1=P\{X_0=1\}=0,4$; $p_2=P\{X_0=2\}=0,3$.

Tính $P\{X_0=0,X_1=2,X_2=1\}$.

2. Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E=\{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a) Tính ma trận xác suất chuyển 2 bước.

b) Tính $P\{X_3=1|X_1=0\}$; $P\{X_3=1|X_0=0\}$.

c) Tìm phân bố dừng.

3. Xét bài toán truyền một bức điện gồm gồm các tín hiệu 0, 1 thông qua kênh có nhiều trạm và mỗi trạm nhận sai tín hiệu với xác suất không đổi bằng $\alpha\in(0,1)$. Giả sử X_0 là tín hiệu truyền đi và X_n là tín hiệu nhận được tại trạm n. Cho biết $\{X_n; n=0,1,2,...\}$ lập thành chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

a) Tính $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}$.

b) Tính $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}+P\{X_0=0,X_1=1,X_2=0\}$.

c) Tính $P\{X_5=0|X_0=0\}$.

4. Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E=\{a,b,c,d\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4\\ 0,2 & 0.3 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3\end{bmatrix}$$

a) Tìm xác suất chuỗi đi theo đường đi: $b-a-b-c-b-a$.

b) Tính xác suất $P\left\{X_1=a, X_3=c, X_4=b, X_5=a \middle| X_0=b\right\}$.

c) Tính $P^{(5)}$.

d) Tính $P\left\{X_5=a \middle| X_0=b\right\}$.

e) Tìm $\mathbf{P}(5)$ biết $\mathbf{P}(0)=\begin{bmatrix}0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1\end{bmatrix}$.

5. Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E=\{0,1\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix},\ 0<a<1,\ 0<b<1.$$

Giả sử phân bố đầu $P\{X_0=0\}=P\{X_0=1\}=0,5$.

a) Vẽ biểu đồ chuyển trạng thái.

b) Tìm phân bố dừng.

c) Tìm phân bố của X_n.

d) Tìm phân bố giới hạn khi $a+b\le 1$.

6. Hai công ti *A* và *B* cung cấp cho thị trường cùng một loại sản phẩm. Hiện tại công ti *A* chiếm 60% và công ti *B* chiếm 40% thị phần. Mỗi năm *A* mất 2/3 thị phần của mình cho *B* và *B* mất 1/2 thị phần cho *A*. Tìm tỉ lệ thị phần hai công ti chiếm được sau hai năm.

7. Cho chuỗi Markov $\{X_n; n=0,1,2,...\}$ với không gian trạng thái $E=\{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix}0,1 & 0,2 & 0,7\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\\ 0,6 & 0,1 & 0,3\end{bmatrix}$$

a) Tính ma trận xác suất chuyển qua hai bước.

b) Giả sử chuỗi có phân bố đầu: $P\{X_0 = 0\} = 0,3$; $P\{X_0 = 1\} = 0,4$; $P\{X_0 = 2\} = 0,3$. Tính $P\{X_2 = 0, X_0 = 2\}$, $P\{X_3 = 2, X_1 = 0\}$.

8. Cho chuỗi Markov $\{X_n; n = 0,1,2,...\}$ với không gian trạng thái $E = \{1,2,3\}$ và ma trận xác suất chuyển $P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}$. Giả sử chuỗi có phân bố đầu: $P\{X_0 = 1\} = 0,3$; $P\{X_0 = 2\} = 0,1$; $P\{X_0 = 3\} = 0,6$.

a) Tính ma trận xác suất chuyển qua hai bước.

b) Tính $P\{X_2 = 1; X_0 = 3\}$, $P\{X_3 = 2; X_1 = 1\}$.

c) Tìm phân bố của hệ tại thời điểm $n = 2$.

9. Cho chuỗi Markov $\{X_n; n = 0,1,2,...\}$ với không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển $P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$.

a) Tính $P\{X_3 = 1 | X_1 = 2\}$; $P\{X_3 = 1 | X_0 = 1\}$.

b) Tìm phân bố dừng.

10. Xét chuỗi Markov $\{X_n; n = 0,1,2,...\}$ với không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 & 0,0 \end{bmatrix}$$

a) Tính $P\{X_1 = 2; X_2 = 0; X_4 = 1 \mid X_0 = 0\}$.

b) Giả sử chuỗi có phân bố đầu:

$$P\{X_0 = 0\} = 0,3;\ P\{X_0 = 1\} = 0,4;\ P\{X_0 = 2\} = 0,3.$$

Tìm phân bố tại thời điểm $n = 2$.

11. Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, R là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } 0 < r < \infty \\ 0, & \text{nếu } r \le 0 \end{cases}$.

Giả sử Θ và R độc lập, $\lambda > 0$. Chứng minh rằng $X(t) = R\cos(\lambda t + \Theta)$ là một quá trình dừng với trung bình 0 và hàm tự tương quan $K_x(t) = \sigma^2 \cos \lambda t$.

12. Cho A là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $N(0;\sigma^2)$. Đặt $X(t) = A\cos(10\pi t)$. Tìm hàm mật độ xác suất của $X(t)$. Quá trình $\{X(t)\}_{t\in I}$ có phải là quá trình dừng không?

13. Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1 = -1\} = P\{Z_1 = 1\} = \dfrac{1}{2}$. Đặt $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$, λ là hằng số. Chứng minh $\{X(t)\}_{t\in I}$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.

14. Cho quá trình dừng $\{X(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ có trung bình $\mathrm{E}\,X(n) = 2$ và hàm tự tương quan $K_x(n) = \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{|n|}$. Tìm mật độ phổ.

15. Cho $X(t)$ là quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_X(t) = \sigma^2 e^{-5|t|}$, $-\infty < t < \infty$. Tìm mật độ phổ.

16. Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1 = -2\} = \dfrac{1}{3}$; $P\{Z_1 = 1\} = \dfrac{2}{3}$. Đặt $X(t) = Z_1 \sin \omega t + Z_2 \cos \omega t$, ω là một hằng số. Chứng minh $X(t)$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.

17. Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, R là biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất $P\{R = -1\} = \dfrac{1}{3}$; $P\{R = 1\} = \dfrac{2}{3}$. Giả sử Θ và R độc lập, chứng minh rằng $X(t) = R\cos(10t + \Theta)$ là một quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.

18. Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1 = -2\} = \dfrac{1}{3}$; $P\{Z_1 = 1\} = \dfrac{2}{3}$. Đặt $X(t) = Z_1 \sin \omega_0 t + Z_2 \cos \omega_0 t$, ω_0 là một hằng số.

Chứng minh $X(t)$ là một quá trình dừng, tìm hàm tự tương quan. Quá trình $X(t)$ có ergodic không?

19. Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, R là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng $\mathrm{E}\,R = \mu$ và phương sai $\mathrm{D}\,R = \sigma^2$. Giả sử Θ và R độc lập, chứng minh rằng $X(t) = R\cos(\omega t + \Theta)$, ω hằng số, là một quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.