

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Cho không gian tiền Hilbert $H, \langle \cdot, \cdot \rangle$. Chứng minh rằng: với mọi $u, v, w \in H$,

$$\|u - v\|^2 \leq 2(\|u - w\|^2 + \|w - v\|^2).$$

2. Cho không gian tiền Hilbert $H, \langle \cdot, \cdot \rangle$. Chứng minh rằng:

a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ (Đẳng thức hình bình hành).

b) Công thức dạng cực $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$.

c) $\|u\| = \|v\|$ khi và chỉ khi $\langle u + v, u - v \rangle = 0$.

d) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ khi và chỉ khi $\langle u, v \rangle = 0$.

3. Trong không gian véc tơ \mathbb{R}^3 xét hệ véc tơ S :

$$u_1 = (3, 2, 1), u_2 = (-1, 1, 1), u_3 = (1, -4, 5)$$

- a) Chứng tỏ rằng S là một hệ trực giao và là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .

- b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (x, y, z)$ trong cơ sở S.

4. Trong \mathbb{R}^4 xét họ 3 véc tơ độc lập tuyến tính $S = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$$u_1 = (1, 1, 0, 1); u_2 = (0, 1, 1, 0); u_3 = (1, 0, 0, 1).$$

Hãy trực chuẩn hóa Gram-Schmidt họ véc tơ S.

5. Trong không gian véc tơ \mathbf{P}_2 các đa thức bậc ≤ 2 , xét tương ứng

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

- a) Chứng minh rằng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tích vô hướng.

- b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở chính tắc $\{1, t, t^2\}$ của \mathbf{P}_2 .

6. Cho $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 10 và $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -5 < t < 0 \\ 3 & \text{nếu } 0 < t < 5 \end{cases}$

- a. Tìm chuỗi Fourier của $x(t)$.

b. $x(t)$ nhận giá trị bao nhiêu tại $t = -5, 0, 5$ để chuỗi Fourier hội tụ về $x(t)$ với mọi $t \in [-5; 5]$.

7. Cho $x(t) = 2t, 0 < t < 4$.

a. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm sin.

b. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm cos.

8. Viết chuỗi Fourier dạng phức của các hàm số sau :

a) $x(t) = |t|, -\pi \leq t \leq \pi$.

b) $x(t) = t, 0 < t < 2$.

c) $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\frac{\pi}{2} < t < 0, \\ 1 & \text{nếu } 0 < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

9. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \Pi(t/T) \sin \omega_0 t$. b. $\Lambda(t/T) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$.

10. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \begin{cases} e^{-t/T} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, T > 0$. b. $x(t) = e^{-|t|/T}, T > 0$.

c. $x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}, a > 0$. d. $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{nếu } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu } |t| > 1 \end{cases}$

11. a. Tìm biến đổi Fourier của $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -T < t < T \\ 0 & \text{nếu } |t| > T \end{cases}$

b. Hãy suy ra giá trị của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda T \cos \lambda t}{\lambda} d\lambda$.

c. Tính $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

d. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $x(t)$ ở câu a, suy ra giá trị của tích phân:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

12. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

- a. $\sin^3 t$ b. $\cos^4 \omega t$ c. $e^{-2t} \cosh 3t$
 d. $(1 + te^{-t})^3$ e. $\cosh 2t \cos t$ f. $e^{-t} \sin 2t \cos 4t$.

13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

- a. $t \cosh 3t$ b. $t \cos \omega t \cosh at$ c. $t^3 \sin t$
 d. $\frac{\sin 4t}{t}$ e. $\frac{\cos at - \cos bt}{t}$ f. $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.

14. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

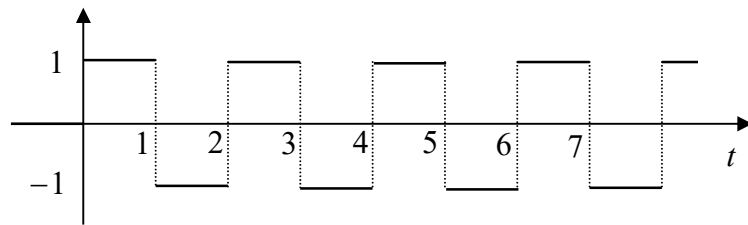
- a. $\eta(t-b) \cos^2(t-b)$ b. $x(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{nếu } t > 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < t < 1 \end{cases}$
 c. $x(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{nếu } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$ d. $x(t) = \begin{cases} \cos t & \text{nếu } 0 < t < \pi \\ \sin t & \text{nếu } t > \pi \end{cases}$.

15. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

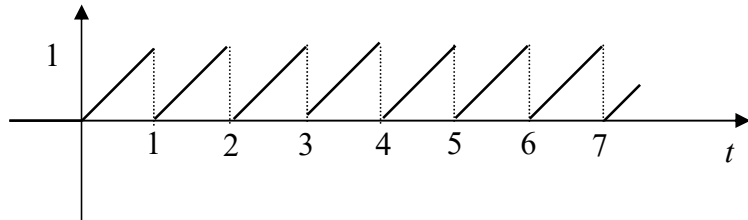
- a. $x(t) = \int_0^t (u^2 - u + e^{-u}) du$ b. $x(t) = \int_0^t (u+1) \cos \omega u du$
 c. $x(t) = \int_0^t \cos(t-u) e^{2u} du$ d. $x(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du$.

16. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn có đồ thị hoặc xác định như sau:

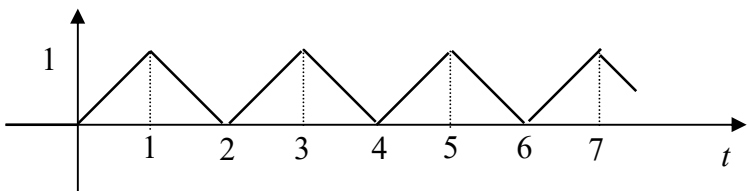
a.



b.



c.



d. $x(t) = |\cos t|$.

17. Sử dụng công thức định nghĩa Laplace tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \sin t \, dt$

b. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} \, dt$

c. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} \, dt$

d. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} \, dt$

e. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \, dt$.

18. Tìm hàm gốc của các hàm số sau:

a. $\frac{s^2}{(s-1)^3}$

b. $\frac{s+3}{s^2+6s+11}$

c. $\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d. $\frac{4s+12}{s^2+8s+16}$

e. $\frac{s^3}{(s^2+4)^2}$

f. $\frac{3s+2}{(s^2-4s+6)^2}$.

19. Tìm hàm gốc:

a. $\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

b. $\frac{1}{s^3(s^3+1)}$

c. $\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

d. $\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}$

e. $\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$

f. $\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$.

20. Tìm hàm gốc:

a. $\frac{s^4-9s^3+16s^2-4s+5}{s^5-4s^4+5s^3}$

b. $\frac{1}{s^4} + \frac{e^{-2s}}{(s+3)^4}$

c. $\frac{e^{-\frac{s}{3}}}{s(s^2+1)}$

d. $\frac{1}{\sqrt{s^3}}$

e. $\frac{1}{\sqrt{2s+3}}$

f. $\frac{e^{4-3s}}{\sqrt{(s+4)^5}}$.

21. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+2x'+x = t^2 e^t$,

$x(0) = x'(0) = 0$.

- b. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 6e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
- c. $x'' - x = 4\sin t + 5\cos 2t$, $x(0) = -1, x'(0) = -2$.
- d. $x'' + 9x = \cos 2t$, $x(0) = 1, x(\pi/2) = -1$.

22. Giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số biến thiên:

$$tx'' + 2x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, x'(\pi) = 0.$$

23. Giải hệ phương trình:

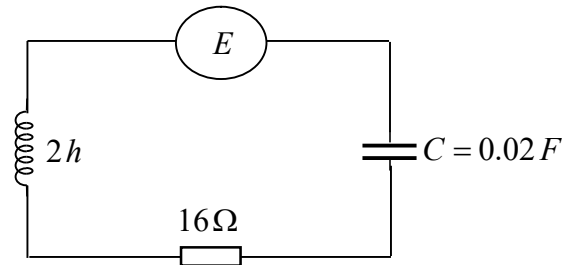
a.
$$\begin{cases} x' + y' = t \\ x'' - y = e^{-t} \end{cases} \quad \text{với điều kiện đầu} \quad \begin{cases} x(0) = 3, x'(0) = -2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = \sin t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \quad \text{với điều kiện đầu} \quad \begin{cases} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} -3x'' + 3y'' = te^{-t} - 3\cos t \\ tx'' - y' = \sin t \end{cases} \quad \text{với điều kiện đầu} \quad \begin{cases} x(0) = -1, x'(0) = 2 \\ y(0) = 4, y'(0) = 0 \end{cases}$$

24. Cho mạch điện cho trong hình 2.18 được nối tiến với suất điện động E volts, điện dung $0,02$ farads, hệ số tự cảm 2 henry và điện trở 16 Ohms. Tại thời điểm $t = 0$ điện lượng ở tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch bằng 0 . Tìm điện lượng và cường độ dòng điện tại thời điểm t nếu:

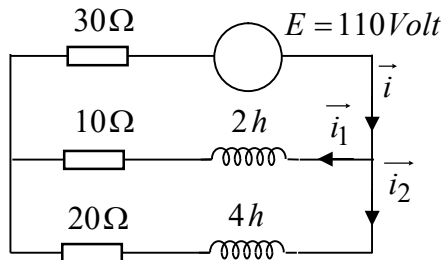
- a. $E = 300$ (Volts)
- b. $E = 100 \sin 3t$ (Volts)



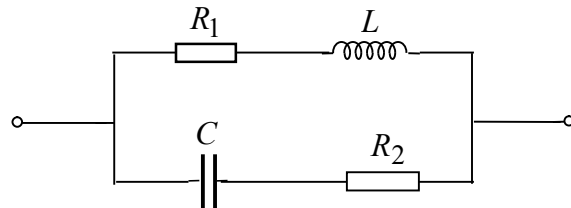
Hình 2.18

25. Cho mạch điện cho trong hình 2.19. Xác định cường độ trong các nhánh biến rằng cường độ ban đầu bằng 0 .

26. Tìm trở kháng ảnh tương đương của hai mạch rẽ cho trong hình 2.20:



Hình 2.19



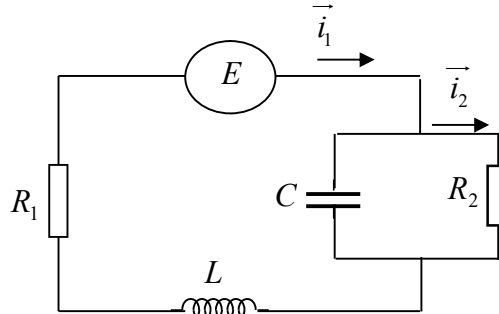
Hình 2.20

27. Cho mạch điện như hình 2.21:

$$E = 500 \sin 10t \quad L = 1 \text{ henry}$$

$$R_1 = 10 \text{ ohms} \quad R_2 = 10 \text{ ohms}$$

$$C = 0,01 \text{ farad}.$$



Hình 2.21

Cho điện thế ở tụ điện và cường độ i_1, i_2 bằng không tại thời điểm $t = 0$. Tìm điện lượng tại tụ điện tại thời điểm $t > 0$.

28. Tìm biến đổi Wavelet của hàm $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$, biết wavelet mẹ là

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{nếu } t \notin [0, 1). \end{cases}$$

29. Cho hàm Wavelet nón Mexico $\Psi(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$. Tìm biến đổi wavelet của hàm

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -1 \leq t < 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$