

## PHỤ LỤC 1

### SỐ PHỨC

Ta biết rằng bình phương của một số thực là không âm, vì vậy trong trường số thực phương trình  $x^2 + 1 = 0$  vô nghiệm. Tuy nhiên nếu ta đưa vào số ảo  $i$  sao cho  $i^2 = -1$  thì phương trình trên trở thành  $x^2 - i^2 = (x - i)(x + i) = 0$ . Do đó phương trình có hai nghiệm  $x = \pm i$ . Tổng quát hơn ta có thể mở rộng trường số thực lên một trường số rộng hơn để mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

#### 1 CÁC DẠNG CỦA SỐ PHỨC

##### 1.1 Dạng đại số của số phức

$z = a + ib$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i^2 = -1$ .

$a$  được gọi là phần thực, ký hiệu  $a = \operatorname{Re} z$

$b$  gọi là phần ảo của  $z$ , ký hiệu  $b = \operatorname{Im} z$ .

Hai số phức  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$  bằng nhau được định nghĩa như sau:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}. \quad (8.1)$$

Tập hợp các số phức ký hiệu là  $\mathbb{C}$ .

##### 1.2 Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$ , ta định nghĩa:

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (8.2)$$

$$z_1 z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (8.3)$$

Ta có thể chứng minh được  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  là một trường con của  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

Số phức  $\bar{z} = a - ib$  được gọi là số phức liên hợp với số phức  $z = a + ib$ .

Số phức  $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$  có tính chất  $\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right)(a + ib) = 1$  nên được gọi là số phức nghịch

đảo của số phức  $z = a + ib$ , ký hiệu  $z^{-1}$  hay  $\frac{1}{z}$ . Vậy

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}. \quad (8.4)$$

Ta định nghĩa:  $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$ ;

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \frac{1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \quad (8.5)$$

### 1.3 Biểu diễn hình học của số phức

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc  $Oxy$ . Mỗi điểm  $M$  trong mặt phẳng hoàn toàn xác định bởi tọa độ  $(a, b)$  của nó. Mặt khác mỗi số phức  $z = a + ib$  cũng được xác định bởi phần thực  $a$  và phần ảo  $b$ . Vì vậy ta có thể đồng nhất số phức  $z = a + ib$  với điểm  $M(a, b)$ . Do đó các số phức được đồng nhất với các điểm của mặt phẳng mà ta gọi là mặt phẳng phức. Phép cộng của số phức:  $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$  tương ứng với phép cộng hai vectơ  $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ ;  $M_1(a_1, b_1), M_2(a_2, b_2)$ . Hai số phức liên hợp với nhau đối xứng nhau qua trục  $Ox$ .

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  được gọi là môđun của số phức  $z = a + ib$  và ta ký hiệu là  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Số đo  $\varphi$  của góc  $(Ox, \overrightarrow{OM})$  xác định sai khác bội số của  $2\pi$  được gọi là argument của số phức  $z$ , ký hiệu  $\text{Arg } z$ .

Nếu  $-\pi < \varphi \leq \pi$  thì  $\varphi$  được gọi là argument chính, ký hiệu  $\text{arg } z$ .

$(|z|, \text{arg } z)$  là tọa độ cực của  $M$  với trục cực  $Ox$ .

Tương ứng giữa tọa độ Đêcát và tọa độ cực

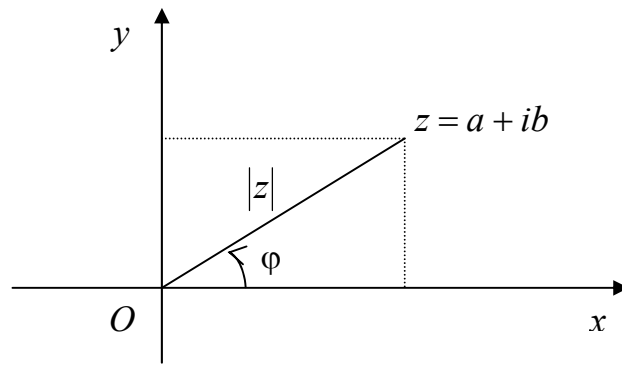
$$\begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \quad (8.6)$$

Ngược lại

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8.7)$$

Số phức  $z = a + ib$  được viết lại dạng lượng giác

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (8.8)$$



**Tính chất:**

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$$

$$2) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} = \operatorname{Re} z;$$

3) Giả sử  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  là đa thức với hệ số thực (xem Phụ lục 2) thì  $p(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n \bar{z}^n = \overline{p(z)}$ . Vì vậy nếu  $z_0$  là nghiệm của phương trình  $p(z) = 0$  thì  $\bar{z}_0$  cũng là nghiệm.

$$p(z), q(z) \text{ là hai đa thức với hệ số thực thì } \frac{p(\bar{z})}{q(\bar{z})} = \overline{\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right)}.$$

$$4) \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|;$$

$$6) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad |z|^2 = z \bar{z}; \quad |z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z};$$

$$7) \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2; \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2;$$

$$8) \overline{|z|} = |z|; \quad \operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

*Công thức Euler*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \tag{8.9}$$

Công thức (6.1) được viết lại  $z = |z| e^{i\varphi}$  gọi là *dạng mũ của số phức*.

#### 1.4 Luỹ thừa của số phức - Công thức Moivre

Cho số phức  $z = |z|e^{i\varphi}$ . Tích  $n$  lần  $\underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ lần}}$  được gọi là lũy thừa bậc  $n$  của  $z$ , ký hiệu  $z^n$ . áp dụng phương pháp quy nạp và các tính chất 4), 6) ở trên ta có

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Khi  $|z| = 1$  ta có công thức Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (8.10)$$

**Ví dụ 8.1:** Tìm các số thực  $x, y$  sao cho:

$$3i(x + iy) + (1 + 2i)(x + 2y) = 2 + i$$

Khai triển và đồng nhất phần thực phần ảo ta được:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

**Ví dụ 8.2:** Giải hệ phương trình với ẩn số phức  $z, w$ : 
$$\begin{cases} 2z + iw = 3 \\ 3z + w = 1 - 2i \end{cases}$$

Nhân  $i$  vào hai vế của phương trình thứ nhất xong cộng vào phương trình thứ hai ta được  $z = \frac{1+i}{3+2i} = \frac{5}{13} + \frac{i}{13} \Rightarrow w = \frac{-2}{13} - \frac{29}{13}i$ .

**Ví dụ 8.3:** a) Quỹ tích các điểm  $z$  sao cho  $|z - 2i| = 3$  là đường tròn tâm  $2i$  bán kính 3.

b) Quỹ tích các điểm  $z$  sao cho  $|z - 2i| = |z - 3|$  là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm  $3$  và  $2i$ .

c) Quỹ tích các điểm  $z$  sao cho  $|z + 3| + |z - 3| = 10$  là đường ellipse có tiêu điểm  $F_1(-3,0), F_2(3,0)$  độ dài trục lớn  $2a = 10$ .

**Ví dụ 8.4:** Theo (6.3):  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$ . Mặt khác

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi - i \sin^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \end{cases}$$

**Ví dụ 8.5:** Tính  $(-1 + \sqrt{3}i)^{10}$

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{3}i)^{10} &= \left[ 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^{10} = 2^{10} \left( \cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3} \right) \\ &= 2^{10} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{10} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^9 (-1 + \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

### 1.5 Căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức  $z$  là số phức  $w$  sao cho  $w^n = z$ . Ký hiệu  $w = \sqrt[n]{z}$  hay  $w = z^{\frac{1}{n}}$ .

Cho  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$

\*) Nếu  $z = 0$  thì  $w = \sqrt[n]{z} = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$

\*\*) Nếu  $z \neq 0$ . Xét  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi}$  thì

$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + k2\pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8.11)$$

Vậy có đúng  $n$  căn bậc  $n$  của  $z$  ứng với các giá trị  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Các căn bậc  $n$  này là các đỉnh của  $n$  giác đều nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\sqrt[n]{|z|}$ .

**Ví dụ 8.6:** Tính căn bậc  $n$  của đơn vị.

Ta có  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ . Vậy các căn bậc  $n$  của 1 là:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{k2\pi}{n} + i \sin \frac{k2\pi}{n} = e^{i \frac{k2\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.12)$$

**Ví dụ 8.7:** Tính  $\sqrt[3]{(-2 + 2i)}$

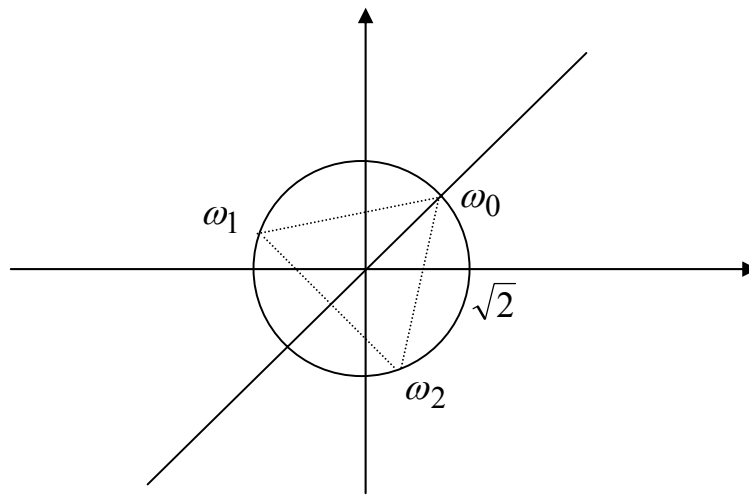
Ta có  $-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ .

Vậy  $\sqrt[3]{(-2 + 2i)} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{1}{3} \left( \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right) + i \sin \frac{1}{3} \left( \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right) \right);$

$$k = 0: \quad w_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i ;$$

$$k = 1: \quad w_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) ;$$

$$k = 2: \quad w_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$



## PHỤ LỤC 2

### ĐA THỨC

#### 1 Đa thức trên một vành nguyên

Cho  $K$  là một trong các tập số:  $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  hay  $\mathbb{Z}_p$ .

Với mỗi dãy  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  các phân tử  $a_n \in K$ . Biểu thức  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $a_n \neq 0$  được gọi là đa thức bậc  $n$  của biến (hay ẩn)  $x$ . Các số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  được gọi là các hệ số của đa thức.

Nếu  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$  thì ta được các đa thức không và cũng ký hiệu là 0. Tập hợp các đa thức biến  $x$  với hệ số thuộc  $K$  được ký hiệu là  $K[x]$ .

Các đa thức được ký hiệu  $p(x), q(x) \dots$

Hai đa thức  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $a_n \neq 0$ ;  $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ,  $b_m \neq 0$

Hai đa thức  $p(x), q(x)$  bằng nhau được ký hiệu và định nghĩa như sau:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n \end{cases} \quad (8.13)$$

#### 2 Vành đa thức

Trong tập  $K[x]$ , giả sử  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $a_n \neq 0$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, b_m \neq 0$$

Ta định nghĩa tổng  $p(x) + q(x)$  và tích  $p(x)q(x)$  của hai đa thức  $p(x), q(x)$  như sau:  $p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$

$$p(x)q(x) := c_0 + c_1x + \dots + c_{n+m}x^{n+m}, c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j}, k = 0, 1, \dots, n+m \quad (8.14)$$

Với quy ước  $a_j = 0$  nếu  $j > n$  và  $b_j = 0$  nếu  $j > m$ .

Ta có thể chứng minh được  $(K[x], +, \cdot)$  là một vành nguyên.

$$\text{bậc}(p(x) + q(x)) \leq \max(\text{bậc } p(x), \text{bậc } q(x)) \quad (8.15)$$

$$\text{bậc}(p(x)q(x)) \leq \text{bậc } p(x) + \text{bậc } q(x). \quad (8.16)$$

### 3 Phép chia đa thức - Nghiệm

**Định lý 1:** Với hai đa thức bất kỳ  $p(x), q(x)$ ;  $q(x) \neq 0$  đều tồn tại duy nhất hai đa thức  $s(x), r(x)$  sao cho  $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$  và nếu  $r(x) \neq 0$  thì bậc  $r(x) <$  bậc  $q(x)$ .

**Ví dụ 8.8:**  $2x^5 + 3x^3 = (x^2 + 2x + 5)(2x^3 - 4x^2 - 2x + 27) - 44x - 135$

**Định nghĩa 1:**  $r(x)$  được gọi là dư của phép chia  $p(x)$  cho  $q(x)$ . Nếu  $r(x) = 0$  thì ta nói  $p(x)$  chia hết cho  $q(x)$  hay  $q(x)$  là ước của  $p(x)$ .

**Định nghĩa 2:** Số  $c \in K$  thoả mãn  $p(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = 0$  được gọi là nghiệm của đa thức  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

**Định lý 2:** Dư của phép chia  $p(x)$  cho  $x - c$  là  $p(c)$ .

**Hệ quả 3:**  $c$  là nghiệm của đa thức  $p(x)$  khi và chỉ khi  $x - c$  là ước của  $p(x)$ , nghĩa là  $p(x) = (x - c)^k s(x)$ .

Nếu  $p(x) = (x - c)^k s(x)$  ( $k$  nguyên,  $k \geq 1$ ) và  $s(c) \neq 0$  thì  $c$  được gọi là nghiệm bội  $k$  của đa thức  $p(x)$ .

**Định nghĩa 3:** Đa thức  $p(x) \in K[x]$  được gọi là bất khả quy nếu bậc  $p(x) \geq 1$  và nếu  $p(x) = q(x)s(x)$  thì một trong hai đa thức  $q(x), s(x)$  là hằng số khác 0 của  $K$ , nghĩa là  $p(x)$  chỉ chia hết cho  $kp(x)$ , với  $k \in K \setminus \{0\}$ . Chẳng hạn: Mọi đa thức bậc nhất là bất khả quy. Đa thức bậc  $\geq 2$  bất khả quy khi và chỉ khi nó vô nghiệm trong  $K$ .

**Định lý 4:** Mọi đa thức bậc  $\geq 1$  trên trường số phức  $\mathbf{C}$  đều có nghiệm.

**Hệ quả 5:** Mọi đa thức  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbf{C}[x]$  đều có thể phân tích thành  $p(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , trong đó các số phức  $x_k$  có thể trùng nhau.

**Hệ quả 6:** Mọi đa thức hệ số thực  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbf{R}[x]$  có thể phân tích thành tích các đa thức bất khả quy là đa thức bậc nhất hay đa thức bậc 2 có biệt thức  $\Delta$  âm:  $p(x) = a_n(x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{k_m} (x - x_1)^{l_1} \dots (x - x_s)^{l_s}$

với  $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1, \dots, m; 2k_1 + \dots + 2k_m + l_1 + \dots + l_s = n$ .

### 4 Ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau

**Định nghĩa 4:** Nếu hai đa thức  $p(x), q(x)$  cùng chia hết cho đa thức  $d(x)$  thì  $d(x)$  được gọi là ước chung của  $p(x), q(x)$ . Ngoài ra nếu mọi ước của  $p(x), q(x)$  đều là ước của  $d(x)$  thì  $d(x)$  gọi là ước chung lớn nhất của  $p(x), q(x)$ . Ký hiệu:



$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)).$$

Nếu  $d(x)$  là hằng số khác không thì  $p(x), q(x)$  được gọi là nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu  $(p(x), q(x)) = 1$ .

Chú ý rằng  $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$  xác định duy nhất sai khác một hằng số khác 0. Nghĩa là

$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)) \Leftrightarrow kd(x) = UCLN(p(x), q(x)), \text{ với } k \in K \setminus \{0\}.$$

Để tìm  $UCLN(p(x), q(x))$  ta thực hiện phép chia Euclide như sau:

➤ Giả sử bậc  $p(x) \geq$  bậc  $q(x)$  thì  $p(x) = q(x)s_1(x) + r_1(x)$ , bậc  $r_1(x) <$  bậc  $q(x)$ .

➤ Nếu  $r_1(x) = 0$  thì  $q(x) = UCLN(p(x), q(x))$ ;

➤ Nếu  $r_1(x) \neq 0$  lặp lại quá trình trên đối với  $q(x)$  và  $r_1(x)$

$$q(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x);$$

➤ Nếu  $r_2(x) \neq 0$  thì  $0 \neq$  bậc  $r_2(x) <$  bậc  $r_1(x)$ .

➤ Tiếp tục ...  $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)s_k(x) + r_k(x)$ ,

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)s_{k+1}(x) + c.$$

▪  $UCLN(p(x), q(x)) = UCLN(q(x), r_1(x)) = \dots = UCLN(r_k(x), c)$ .

▪ Nếu  $c = 0$  thì  $r_k(x) = UCLN(p(x), q(x))$ ;

▪ Nếu  $c \neq 0$  thì  $(p(x), q(x)) = 1$ .

### **Định lý 7:**

1)  $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$  khi và chỉ khi tồn tại các đa thức  $u(x), v(x)$  sao cho  $p(x)u(x) + q(x)v(x) = d(x)$ .

2)  $(p(x), q(x)) = 1$  khi và chỉ khi tồn tại các đa thức  $u(x), v(x)$  sao cho  $p(x)u(x) + q(x)v(x) = 1$ .

### **Định lý 8:**

1) Hai đa thức  $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$  của trường số phức là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi không có nghiệm chung nào.

2) Hai đa thức  $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$  trên trường số thực nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng không có nghiệm thực hay nghiệm phức chung nào.

**Hệ quả 9:**  $p(x), q(x)$  là hai đa thức trên trường số thực hay số phức thì:

$$(p(x), q(x)) = 1 \Leftrightarrow (p^m(x), q^n(x)) = 1, \text{ với mọi số nguyên dương } m, n.$$

**Chú ý:** Các đa thức bất khả quy với hệ số ứng với bậc cao nhất bằng 1 (ví dụ:  $x - c; x^2 + px + q, p^2 - 4q < 0$ ) đóng vai trò như các số nguyên tố trong vành  $\mathbb{Z}$ . Vì vậy ta có thể chuyển một cách tương tự các kết quả trong vành số nguyên  $\mathbb{Z}$  sang vành nguyên các đa thức  $K[x]$ . Chẳng hạn để tìm  $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$  ta phân tích  $p(x)$  thành tích các đa thức bất khả quy. Khi đó  $d(x)$  bằng tích các đa thức bất khả quy có mặt đồng thời trong  $p(x)$  và  $q(x)$ .

**Ví dụ 8.9:**

$$p(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2(x^2 + 2x + 3)^3$$
$$q(x) = (x - 3)^2(x + 1)^5(x^2 + 2x + 3)$$
$$\Rightarrow d(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 3).$$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đoàn Quỳnh (chủ biên); Đại số tuyến tính và hình học giải tích; ĐHQG-HN.
- [2] Kin Cương; Toán cao cấp - Tập 1- Đại số- NXB ĐH-GDCN, Hà Nội, 1990.
- [3] Lê Đình Thịnh, Phan Văn Hạp, Hoàng Đức Nguyên; Đại số tuyến tính, NXB KH-KT, Hà Nội 1998.
- [4] Ngô Thúc Lan; Đại số tuyến tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.
- [5] Ngô Việt Trung; Giáo trình Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội 2001.
- [6] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Toán cao cấp tập một; NXB GD 1996.
- [7] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Bài tập toán cao cấp tập một; NXB GD 1997.
- [8] Trần Văn Hãn; Đại số tuyến tính trong kỹ thuật, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.
- [9] Bellman R. ; Mở đầu lý thuyết ma trận. Bản dịch tiếng Việt: Nguyễn Văn Huệ, Hoàng Kiếm, NXB KH&KT Hà Nội 1978.
- [10] B. A. Cadobnitri...; Tuyển tập các bài toán vô địch sinh viên (tiếng Nga) NXB ĐH Maxcova 1987.
- [11] Carroll Wilde; Linear Algebra, 1987.
- [12] Edwin F. Beckenbach: Toán học hiện đại cho kỹ sư, bản dịch tiếng Việt, Hồ Thuần, Nguyễn Lâm, Lê Thiệu Phó, Phạm văn Ất, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.
- [13] J. M. Monier ; Algèbre 1, 2, bản dịch tiếng Việt NXB GD, 1999.
- [14] Lipshutz S. ; Linear Algebra, Mc Graw-Hill, 1987.
- [15] Lipshutz S. ; Theory and problems of Linear Algebra, Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill, 1968.
- [16] Poznyak E. G. & Ilrin V. A.; Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1986.
- [17] Proskuryakov I. U.; Problems in Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1978.
- [18] R. Sikorski; Boolean Algebras, Springer-Verlag 1969.

# MỤC LỤC

<b>CHƯƠNG I: MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1. SƠ LƯỢC VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ .....</b>	<b>6</b>
1.1.1 Mệnh đề.....	6
1.1.2 Các phép liên kết logic mệnh đề.....	7
1.1.3 Các tính chất.....	8
<b>1.2. TẬP HỢP.....</b>	<b>8</b>
1.2.1 Khái niệm tập hợp.....	8
1.2.2 Cách mô tả tập hợp.....	9
1.2.3 Các tập số thường gặp .....	10
1.2.4 Tập con.....	10
1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp.....	11
1.2.6 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại.....	12
1.2.7 Phép hợp và giao suy rộng.....	13
<b>1.3. TÍCH DESCARTES VÀ QUAN HỆ.....</b>	<b>13</b>
1.3.1 Tích Descartes của các tập hợp .....	13
1.3.2 Quan hệ hai ngôi .....	14
1.3.3 Quan hệ tương đương .....	15
1.3.4 Quan hệ thứ tự .....	16
<b>1.4. ÁNH XẠ.....</b>	<b>18</b>
1.4.1 Định nghĩa và ví dụ.....	18
1.4.2 Phân loại các ánh xạ.....	19
1.4.3 Ánh xạ ngược của một song ánh.....	22
1.4.4 Hợp (tích) của hai ánh xạ.....	23
1.4.5 Lực lượng của một tập hợp.....	23
<b>1.5. GIẢI TÍCH TỔ HỢP- NHỊ THỨC NEWTON .....</b>	<b>24</b>
1.5.1 Sơ lược về phép đếm.....	24
1.5.2 Hoán vị, phép thế.....	25
1.5.3 Chỉnh hợp.....	26
1.5.4 Tổ hợp.....	27
1.5.5 Nhị thức Newton.....	29

1.6. CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ.....	30
1.6.1 Luật hợp thành trong.....	30
1.6.2 Nhóm.....	31
1.6.3 Vành.....	32
1.6.4 Trường.....	34
1.7. ĐẠI SỐ BOOLE.....	35
1.7.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole.....	35
1.7.2 Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu .....	36
1.7.3 Phương pháp xây dựng hàm Boole thỏa mãn giá trị cho trước .....	39
1.7.4 Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch.....	40
BÀI TẬP CHƯƠNG I .....	43
<b>CHƯƠNG II: KHÔNG GIAN VÉC TƠ.....</b>	<b>49</b>
2.1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ.....	50
2.1.1 Định nghĩa và các ví dụ.....	50
2.1.2 Tính chất.....	51
2.2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON.....	52
2.2.1 Định nghĩa và ví dụ.....	52
2.2.2 Không gian con sinh bởi một họ véc tơ .....	54
2.2.3 Tổng của một họ không gian véc tơ con .....	55
2.3. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH .....	57
2.4. HẠNG CỦA MỘT HỆ HỮU HẠN CÁC VÉC TƠ .....	58
2.4.1 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại .....	58
2.4.2 Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ .....	59
2.5. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ .....	60
BÀI TẬP CHƯƠNG II .....	65
<b>CHƯƠNG III: MA TRẬN .....</b>	<b>71</b>
3.1. KHÁI NIỆM MA TRẬN .....	72
3.2. CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN .....	73
3.2.1 Phép cộng .....	73
3.2.2 Phép nhân ma trận với một số .....	73
3.2.3 Phép nhân ma trận .....	75
3.2.4 Đa thức ma trận .....	77
3.2.5 Ma trận chuyển vị .....	77

3.3. MA TRẬN CỦA MỘT HỆ VÉC TƠ .....	78
3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ .....	78
3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở .....	79
3.4. HẠNG CỦA MA TRẬN .....	80
3.4.1 Định nghĩa và cách tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp .....	80
3.4.2 Các ma trận tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp .....	81
BÀI TẬP CHƯƠNG III .....	83
<b>CHƯƠNG IV: ĐỊNH THỨC</b> .....	87
4.1. HOÁN VỊ VÀ PHÉP THÉ .....	88
4.2. ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC .....	90
4.3. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC .....	94
4.4. CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC .....	96
4.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột .....	96
4.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột) .....	98
4.5. ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO .....	102
4.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo .....	102
4.5.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo .....	103
4.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan .....	105
4.6. TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC .....	106
BÀI TẬP CHƯƠNG IV .....	108
<b>CHƯƠNG V: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH</b> .....	115
5.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH .....	116
5.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính .....	116
5.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính .....	117
5.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính .....	117
5.2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM .....	118
5.3. PHƯƠNG PHÁP CRAMER .....	118
5.3.1 Hệ Cramer và cách giải .....	118
5.3.2 Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát .....	119
5.4. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO .....	121
5.5. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỦ GAUSS .....	122
5.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT .....	125

BÀI TẬP CHƯƠNG V.....	129
<b>CHƯƠNG VI: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH</b> .....	133
<b>6.1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH</b> .....	134
6.1.1 Định nghĩa và ví dụ .....	134
6.1.2 Các tính chất .....	135
6.1.3 Các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính .....	136
<b>6.2. NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH</b> .....	138
<b>6.3. TOÀN CẦU, ĐƠN CẦU, ĐẲNG CẦU</b> .....	140
6.3.1 Toàn cầu .....	140
6.3.2 Đơn cầu .....	141
6.3.3 Đẳng cầu .....	142
<b>6.4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN</b> .....	143
6.4.1 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính .....	143
6.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau .....	147
6.4.3 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính .....	149
6.4.4 Ánh xạ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính .....	150
<b>6.5. CHÉO HOÁ MA TRẬN</b> .....	153
6.5.1 Không gian con bất biến .....	153
6.5.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng .....	153
6.5.3 Đa thức đặc trưng .....	155
6.5.4 Tự đồng cấu chéo hoá được .....	158
6.5.5 Thuật toán chéo hoá .....	159
BÀI TẬP CHƯƠNG VI .....	165
<b>CHƯƠNG VII: KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG</b> .....	173
<b>7.1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH</b> .....	175
7.4.1 Định nghĩa dạng song tuyến tính .....	175
7.4.2 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính .....	176
7.4.3 Biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính trong các cơ sở khác nhau .....	176
<b>7.2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG</b> .....	177
7.2.1 Định nghĩa dạng toàn phương .....	177
7.4.2 Dạng cực của dạng toàn phương .....	178
7.4.3 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương .....	179
7.4.4 Biểu thức tọa độ dạng chính tắc của dạng toàn phương .....	179

7.4.5	Đưa biểu thức tọa độ về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrang	180
7.4.6	Đưa biểu thức tọa độ về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi	182
7.4.7	Luật quán tính	186
7.3.	TÍCH VÔ HƯỚNG	189
7.1.1	Các định nghĩa vô hướng và tính chất	189
7.1.2	Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Shmidt	190
7.1.3	Cơ sở trực chuẩn	191
7.1.4	Không gian con trực giao, phần bù trực giao	192
7.4.	MA TRẬN TRỰC GIAO VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRỰC GIAO	194
7.4.1	Ma trận trực giao	194
7.4.2	Ánh xạ tuyến tính trực giao	196
7.4.3	Ma trận của tự đẳng cấu trực giao	197
7.5.	CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN – TỰ ĐỒNG CẤU ĐỐI XỨNG	197
7.5.1	Bài toán chéo hoá trực giao	197
7.5.2	Tự đồng cấu đối xứng	198
7.5.3	Ma trận của một tự đồng cấu đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn	198
7.5.4	Thuật toán chéo hoá trực giao	200
7.5.5	Đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao	202
7.6.	ĐƯỜNG BẬC 2 TRONG MẶT PHẪNG VÀ MẶT BẬC 2 TRONG KHÔNG GIAN	202
7.6.1	Hệ tọa độ trực chuẩn trong mặt phẳng	202
7.5.1.1	Tọa độ của một véc tơ và tọa độ của một điểm trong mặt phẳng	202
7.5.1.2	Các đường bậc 2 trong mặt phẳng	203
7.5.1.3	Phân loại đường bậc 2 trong mặt phẳng	204
7.6.2	Hệ tọa độ trực chuẩn trong không gian	207
7.6.2.1	Tọa độ của một véc tơ và tọa độ của một điểm trong không gian	207
7.6.2.2	Một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian	207
7.6.2.3	Phân loại các mặt bậc 2	210
	BÀI TẬP CHƯƠNG VII	214
	HƯỚNG DẪN, ĐÁP ÁN	221
	PHỤ LỤC	261
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	271
	MỤC LỤC	272



