PHỤ LỤC 1

SỐ PHỨC

Ta biết rằng bình phương của một số thực là không âm, vì vậy trong trường số thực phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm. Tuy nhiên nếu ta đưa vào số ảo i sao cho $i^2=-1$ thì phương trình trên trở thành $x^2-i^2 = (x-i)(x+i)=0$. Do đó phương trình có hai nghiệm $x=\pm i$. Tổng quát hơn ta có thể mở rộng trường số thực lên một trường số rộng hơn để mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

1 CÁC DẠNG CỦA SỐ PHỨC

1.1 Dạng đại số của số phức

$z=a+ib$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.

a được gọi là phần thực, ký hiệu $a=\operatorname{Re}z$

b gọi là phần ảo của z, ký hiệu $b=\operatorname{Im}z$.

Hai số phức $z_1=a_1+ib_1,\ z_2=a_2+ib_2$ bằng nhau được định nghĩa như sau:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}. \qquad \textbf{(8.1)}$$

Tập hợp các số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.

1.2 Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức $z_1=a_1+ib_1,\ z_2=a_2+ib_2$, ta định nghĩa:

$$z_1+z_2 := (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \qquad \textbf{(8.2)}$$

$$z_1z_2 := (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1). \qquad \textbf{(8.3)}$$

Ta có thể chứng minh được $(\mathbb{R},+,\cdot)$ là một trường con của $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Số phức $\bar{z}=a-ib$ được gọi là số phức liên hợp với số phức $z=a+ib$.

Số phức $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ có tính chất $\left(\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right)(a+ib)=1$ nên được gọi là số phức nghịch đảo của số phức $z=a+ib$, ký hiệu z^{-1} hay $\dfrac{1}{z}$. Vậy

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}. \quad \textbf{(8.4)}$$

Ta định nghĩa: $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$;

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \frac{1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}. \quad \textbf{(8.5)}$$

1.3 Biểu diễn hình học của số phức

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy. Mỗi điểm M trong mặt phẳng hoàn toàn xác định bởi toạ độ (a,b) của nó. Mặt khác mỗi số phức $z = a + ib$ cũng được xác định bởi phần thực a và phần ảo b. Vì vậy ta có thể đồng nhất số phức $z = a + ib$ với điểm $M(a,b)$. Do đó các số phức được đồng nhất với các điểm của mặt phẳng mà ta gọi là mặt phẳng phức. Phép cộng của số phức: $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ tương ứng với phép cộng hai vectơ $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$; $M_1(a_1, b_1), M_2(a_2, b_2)$. Hai số phức liên hợp với nhau đối xứng nhau qua trục Ox.

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là môđun của số phức $z = a + ib$ và ta ký hiệu là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Số đo φ của góc $(Ox, \overrightarrow{OM})$ xác định sai khác bội số của 2π được gọi là argument của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Arg} z$.

Nếu $-\pi < \varphi \le \pi$ thì φ được gọi là argument chính, ký hiệu $\arg z$.

$(|z|, \arg z)$ là toạ độ cực của M với trục cực Ox.

Tương ứng giữa toạ độ Đềcác và toạ độ cực

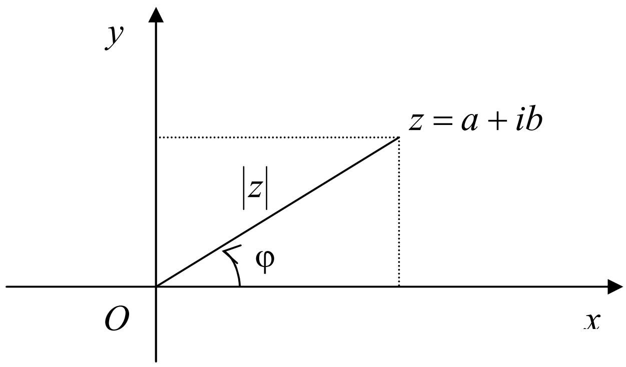
$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \quad \textbf{(8.6)}$$

Ngược lại

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \textbf{(8.7)}$$

Số phức $z = a + ib$ được viết lại *dạng lượng giác*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \textbf{(8.8)}$$



Tính chất:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

2) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$; $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} = \operatorname{Re} z$;

3) Giả sử $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ là đa thức với hệ số thực (xem Phụ lục 2) thì $p(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + ... + a_n\overline{z}^n = \overline{p(z)}$. Vì vậy nếu z_0 là nghiệm của phương trình $p(z) = 0$ thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm.

$p(z), q(z)$ là hai đa thức với hệ số thực thì $\frac{p(\overline{z})}{q(\overline{z})} = \overline{\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right)}$.

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$;

6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \overline{z}$;

7) $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$; $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$;

8) $|\overline{z}| = |z|$; $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$.

Công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \textbf{(8.9)}$$

Công thức (6.1) được viết lại $z = |z|e^{i\varphi}$ gọi là *dạng mũ của số phức*.

1.4 Luỹ thừa của số phức - Công thức Moivre

Cho số phức $z=|z|e^{i\varphi}$. Tích n lần $\underbrace{z\cdot \ldots\ldots \cdot z}_{n\text{ lần}}$ được gọi là luỹ thừa bậc n của z, ký hiệu z^n. áp dụng phương pháp quy nạp và các tính chất 4), 6) ở trên ta có

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Khi $|z|=1$ ta có *công thức Moivre*:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad \textbf{(8.10)}$$

<u>Ví dụ 8.1</u>: Tìm các số thực x, y sao cho:

$$3i(x+iy)+(1+2i)(x+2y)=2+i$$

Khai triển và đồng nhất phần thực phần ảo ta được:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 5x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

<u>Ví dụ 8.2</u>: Giải hệ phương trình với ẩn số phức z, w: $\begin{cases} 2z+iw=3 \\ 3z+w=1-2i \end{cases}$

Nhân i vào hai vế của phương trình thứ nhất xong cộng vào phương trình thứ hai ta được $z=\dfrac{1+i}{3+2i}=\dfrac{5}{13}+\dfrac{i}{13} \Rightarrow w=\dfrac{-2}{13}-\dfrac{29}{13}i$.

<u>Ví dụ 8.3</u>: a) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z-2i|=3$ là đường tròn tâm $2i$ bán kính 3.

b) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z-2i|=|z-3|$ là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm 3 và $2i$.

c) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z+3|+|z-3|=10$ là đường ellípse có tiêu điểm $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ độ dài trục lớn $2a=10$.

<u>Ví dụ 8.4</u>: Theo (6.3): $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$. Mặt khác

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi-i\sin^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

Vậy $\begin{cases} \cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi \end{cases}$

Ví dụ 8.5: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{10}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^{9}\left(-1+\sqrt{3}i\right).$$

1.5 Căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z là số phức w sao cho $w^n=z$. Ký hiệu $w=\sqrt[n]{z}$ hay $w=z^{\frac{1}{n}}$.

Cho $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|e^{i\varphi}$

*) Nếu $z=0$ thì $w=\sqrt[n]{z}=0\quad\forall n=1,2,\ldots$.

**) Nếu $z\neq 0$. Xét $w=|w|(\cos\psi+i\sin\psi)=|w|e^{i\psi}$ thì

$$w^n=z\iff\begin{cases}|w|^n=|z|\\ n\psi=\varphi+k2\pi\end{cases}\iff\begin{cases}|w|=\sqrt[n]{|z|}\\ \psi=\dfrac{\varphi+k2\pi}{n};\ k=0,1,\ldots,n-1\end{cases}\qquad\textbf{(8.11)}$$

Vậy có đúng n căn bậc n của z ứng với các giá trị $k=0,1,\ldots,n-1$. Các căn bậc n này là các đỉnh của n giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{|z|}$.

Ví dụ 8.6: Tính căn bậc n của đơn vị.

Ta có $1=\cos 0+i\sin 0$. Vậy các căn bậc n của 1 là:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{k2\pi}{n}+i\sin\frac{k2\pi}{n}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}\ ;\ \ k=0,1,\ldots,n-1.\qquad\textbf{(8.12)}$$

Ví dụ 8.7: Tính $\sqrt[3]{(-2+2i)}$

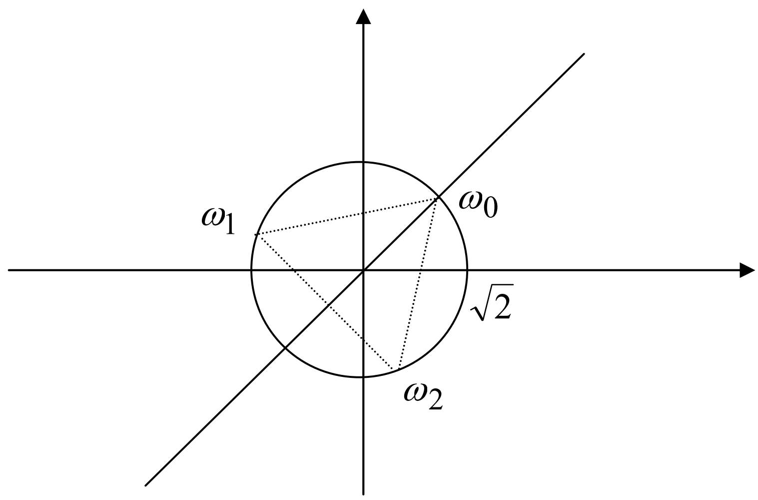
Ta có $-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Vậy $\sqrt[3]{(-2+2i)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)+i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\right);$

$$k=0: \quad w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i \ ;$$

$$k=1: \quad w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \ ;$$

$$k=2: \quad w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$



PHỤ LỤC 2

ĐA THỨC

1 Đa thức trên một vành nguyên

Cho K là một trong các tập số: $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ hay $\mathbb{Z}_p$.

Với mỗi dãy $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ các phân tử $a_n \in K$. Biểu thức $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $a_n \neq 0$ được gọi là đa thức bậc n của biến (hay ẩn) x. Các số $a_0, a_1, ..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.

Nếu $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ thì ta được các đa thức không và cũng ký hiệu là 0. Tập hợp các đa thức biến x với hệ số thuộc K được ký hiệu là $K[x]$.

Các đa thức được ký hiệu $p(x), q(x)$ ...

Hai đa thức $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $a_n \neq 0$; $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$, $b_m \neq 0$

Hai đa thức $p(x), q(x)$ bằng nhau được ký hiệu và định nghĩa như sau:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_0 = b_0, ..., a_n = b_n \end{cases} \tag{8.13}$$

2 Vành đa thức

Trong tập $K[x]$, giả sử $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $a_n \neq 0$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m, \ b_m \neq 0$$

Ta định nghĩa tổng $p(x) + q(x)$ và tích $p(x)q(x)$ của hai đa thức $p(x)$, $q(x)$ như sau: $p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$

$$p(x)q(x) := c_0 + c_1 x + ... + c_{n+m} x^{n+m}, \ c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}, \ k = 0, 1, ..., n+m \tag{8.14}$$

Với quy ước $a_j = 0$ nếu $j > n$ và $b_j = 0$ nếu $j > m$.

Ta có thể chứng minh được $(K[x], +, \cdot)$ là một vành nguyên.

$$\text{bậc}\left(p(x) + q(x)\right) \leq \max\left(\text{bậc}\, p(x), \text{bậc}\, q(x)\right) \tag{8.15}$$

$$\text{bậc}\left(p(x)q(x)\right) \leq \text{bậc}\, p(x) + \text{bậc}\, q(x). \tag{8.16}$$

3 Phép chia đa thức - Nghiệm

Định lý 1: Với hai đa thức bất kỳ $p(x), q(x)$; $q(x) \neq 0$ đều tồn tại duy nhất hai đa thức $s(x), r(x)$ sao cho $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ và nếu $r(x) \neq 0$ thì bậc $r(x) <$ bậc $q(x)$.

Ví dụ 8.8: $2x^5 + 3x^3 = (x^2 + 2x + 5)(2x^3 - 4x^2 - 2x + 27) - 44x - 135$

Định nghĩa 1: *$r(x)$ được gọi là dư của phép chia $p(x)$ cho $q(x)$. Nếu $r(x) = 0$ thì ta nói $p(x)$ chia hết cho $q(x)$ hay $q(x)$ là ước của $p(x)$.*

Định nghĩa 2: *Số $c \in K$ thoả mãn $p(c) = a_0 + a_1c + ... + a_nc^n = 0$ được gọi là nghiệm của đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.*

Định lý 2: Dư của phép chia $p(x)$ cho $x - c$ là $p(c)$.

Hệ quả 3: c là nghiệm của đa thức $p(x)$ khi và chỉ khi $x - c$ là ước của $p(x)$, nghĩa là $p(x) = (x-c)^k s(x)$.

Nếu $p(x) = (x-c)^k s(x)$ (k nguyên, $k \geq 1$) và $s(c) \neq 0$ thì c được gọi là nghiệm bội k của đa thức $p(x)$.

Định nghĩa 3: *Đa thức $p(x) \in K[x]$ được gọi là bất khả quy nếu* bậc $p(x) \geq 1$ *và nếu $p(x) = q(x)s(x)$ thì một trong hai đa thức $q(x)$, $s(x)$ là hằng số khác 0 của K, nghĩa là $p(x)$ chỉ chia hết cho $kp(x)$, với $k \in K \setminus \{0\}$.* Chẳng hạn: Mọi đa thức bậc nhất là bất khả quy. Đa thức bậc ≥ 2 bất khả quy khi và chỉ khi nó vô nghiệm trong K.

Định lý 4: Mọi đa thức bậc ≥ 1 trên trường số phức $\mathbb{C}$ đều có nghiệm.

Hệ quả 5: Mọi đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ đều có thể phân tích thành $p(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_n)$, trong đó các số phức x_k có thể trùng nhau.

Hệ quả 6: Mọi đa thức hệ số thực $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ có thể phân tích thành tích các đa thức bất khả quy là đa thức bậc nhất hay đa thức bậc 2 có biệt thức Δ âm: $p(x) = a_n(x^2 + b_1x + c1)^{k_1}...(x^2 + b_mx + c_m)^{k_m}(x - x_1)^{l_1}...(x - x_s)^{l_s}$

với ${b_j}^2 - 4c_j < 0$, $j = 1,...,m$; $2k_1 + ... + 2k_m + l_1 + ... + l_s = n$.

4 Ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 4: *Nếu hai đa thức $p(x)$, $q(x)$ cùng chia hết cho đa thức $d(x)$ thì $d(x)$ được gọi là ước chung của $p(x)$, $q(x)$. Ngoài ra nếu mọi ước của $p(x)$, $q(x)$ đều là ước của $d(x)$ thì $d(x)$ gọi là ước chung lớn nhất của $p(x)$, $q(x)$. Ký hiệu:*

$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)).$$

Nếu $d(x)$ là hằng số khác không thì $p(x)$, $q(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu $(p(x), q(x)) = 1$.

Chú ý rằng $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ xác định duy nhất sai khác một hằng số khác 0. Nghĩa là

$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)) \Leftrightarrow kd(x) = UCLN(p(x), q(x)), \text{ với } k \in K \setminus \{0\}.$$

Để tìm $UCLN(p(x), q(x))$ ta thực hiện phép chia Euclide như sau:

- Giả sử bậc $p(x) \geq$ bậc $q(x)$ thì $p(x) = q(x)s_1(x) + r_1(x)$, bậc $r_1(x) <$ bậc $q(x)$.
- Nếu $r_1(x) = 0$ thì $q(x) = UCLN(p(x), q(x))$;
- Nếu $r_1(x) \neq 0$ lặp lập quá trình trên đối với $q(x)$ và $r_1(x)$

$$q(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x);$$

- Nếu $r_2(x) \neq 0$ thì $0 \neq$ bậc $r_2(x) <$ bậc $r_1(x)$.
- Tiếp tục ... $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)s_k(x) + r_k(x)$,

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)s_{k+1}(x) + c.$$

  - $UCLN(p(x), q(x)) = UCLN(q(x), r_1(x)) = ... = UCLN(r_k(x), c)$.
  - Nếu $c = 0$ thì $r_k(x) = UCLN(p(x), q(x))$;
  - Nếu $c \neq 0$ thì $(p(x), q(x)) = 1$.

Định lý 7:

1) $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ khi và chỉ khi tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ sao cho $p(x)u(x) + q(x)v(x) = d(x)$.

2) $(p(x), q(x)) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ sao cho $p(x)u(x) + q(x)v(x) = 1$.

Định lý 8:

1) Hai đa thức $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ của trường số phức là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi không có nghiệm chung nào.

2) Hai đa thức $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ trên trường số thực nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng không có nghiệm thực hay nghiệm phức chung nào.

Hệ quả 9: $p(x), q(x)$ là hai đa thức trên trường số thực hay số phức thì:

$$(p(x), q(x)) = 1 \Leftrightarrow (p^m(x), q^n(x)) = 1, \text{ với mọi số nguyên dương } m, n.$$

Chú ý: Các đa thức bất khả qui với hệ số ứng với bậc cao nhất bằng 1(ví dụ: $x - c; x^2 + px + q, p^2 - 4q < 0$) đóng vai trò như các số nguyên tố trong vành $\mathbb{Z}$. Vì vậy ta có thể chuyển một cách tương tự các kết quả trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$ sang vành nguyên các đa thức $K[x]$. Chẳng hạn để tìm $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ ta phân tích $p(x)$ thành tích các đa thức bất khả qui. Khi đó $d(x)$ bằng tích các đa thức bất khả qui có mặt đồng thời trong $p(x)$ và $q(x)$.

Ví dụ 8.9:

$$p(x) = (x-2)^3 (x+1)^2 (x^2 + 2x + 3)^3$$

$$q(x) = (x-3)^2 (x+1)^5 (x^2 + 2x + 3)$$

$$\Rightarrow d(x) = (x+1)^2 (x^2 + 2x + 3).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên); Đại số tuyến tính và hình học giải tích; ĐHQG-HN.

[2] Kin Cương; Tóan cao cấp - Tập 1- Đại số- NXB ĐH-GDCN, Hà Nội, 1990.

[3] Lê Đình Thịnh, Phan Văn Hạp, Hoàng Đức Nguyên; Đại số tuyến tính, NXB KH-KT, Hà Nội 1998.

[4] Ngô Thúc Lanh; Đại số tuyến tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.

[5] Ngô Việt Trung; Giáo trình Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội 2001.

[6] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Toán cao cấp tập một; NXB GD 1996.

[7] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Bài tập toán cao cấp tập một; NXB GD 1997.

[8] Trần Văn Hãn; Đại số tuyến tính trong kỹ thuật, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.

[9] Bellman R. ; Mở đầu lý thuyết ma trận. Bản dịch tiếng Việt: Nguyễn Văn Huệ, Hoàng Kiếm, NXB KH&KT Hà Nội 1978.

[10] B. A. Cadobnitri...; Tuyển tập các bài toán vô địch sinh viên (tiếng Nga) NXB ĐH Maxcơva 1987.

[11] Carroll Wilde; Linear Algebra, 1987.

[12] Edwin F. Beckenbach: Toán học hiện đại cho kỹ sư, bản dịch tiếng Việt, Hồ Thuần, Nguyễn Lâm, Lê Thiệu Phố, Phạm văn Ất, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.

[13] J. M. Monier ; Algèbre 1, 2, bản dịch tiếng Việt NXB GD, 1999.

[14] Lipshutz S. ; Linear Algebra, Mc Graw-Hill, 1987.

[15] Lipshutz S. ; Theory and problems of Linear Algebra, Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill, 1968.

[16] Poznyak E. G. & Ilrin V. A.; Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1986.

[17] Proskuryakov I. U.; Problems in Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1978.

[18] R. Sikorski; Boolean Algebras, Springer-Verlag 1969.

MỤC LỤC