CHƯƠNG VII
KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE
DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Euclide là người đầu tiên đã trình bày toán học một cách hệ thống trong bộ sách "Cơ sở", trong đó Euclide đã xây dựng môn hình học chỉ dựa trên năm tiên đề. Cuốn sách này được dùng làm sách giáo khoa cho đến tận thế kỷ 19. Không gian Euclide ban đầu được hiểu như là không gian thực 3 chiều với hệ tiên đề Euclide. Sự mở rộng sang không gian nhiều chiều xuất phát từ những công trình của Banach (1892-1945), nhà toán học Ba Lan.

Không gian afin được xây dựng trên nền là không gian véc tơ, trong đó ta chỉ khảo sát các phẳng và quan hệ song song. Không gian Euclide được xây dựng trên nền không gian véc tơ Euclide, trong đó ta có thể tính được độ dài, quan hệ trực giao, khái niệm góc.... Mặt phẳng và không gian ta gặp trong chương trình phổ thông là các không gian Euclide.

Không gian véc tơ Euclide là một không gian véc tơ với tích vô hướng. Tích vô hướng là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương. Khái niệm tích vô hướng được khái quát hoá từ khái niệm tích vô hướng đã gặp ở phổ thông, trong đó tích vô hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ là số thực $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

Hai véc tơ được gọi là trực giao nhau nếu tích vô hướng của chúng bằng 0. Hệ véc tơ gồm các véc tơ trực giao nhau được gọi là một hệ trực giao. Véc tơ có tích vô hướng với chính nó bằng 1 được gọi là véc tơ đơn vị. Một hệ trực giao gồm các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn. Cho một hệ véc tơ độc lập tuyến tính thì ta có thể tìm được một hệ trực chuẩn sao cho không gian sinh bởi hai hệ này là trùng nhau. Để tìm hệ trực chuẩn này ta sử dụng lược đồ trực chuẩn hoá Gram-Shmidt.

Trong viễn thông người ta hay dùng phương pháp này trong lý thuyết truyền dẫn tín hiệu, trong đó mỗi tín hiệu được biểu diễn dưới dạng một hàm số theo thời gian t. Tích vô hướng của hai tín hiệu $f(t), g(t)$ là $\langle f(t),g(t)\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt$. Lúc đó người ta tìm một hệ các tín hiệu chuẩn là một hệ trực chuẩn (bằng cách trực chuẩn hoá Gram-Shmidt), còn các tín hiệu khác được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu chuẩn này.

Ma trận trực giao là ma trận vuông có các véc tơ cột là một hệ trực chuẩn. Ma trận chuyển cơ sở của hai cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận của ánh xạ trực giao trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận trực giao khả nghịch và ma trận nghịch đảo bằng ma trận chuyển vị của nó.

Bài toán chéo hoá trực giao ma trận vuông A là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ là ma trận chéo. Ma trận vuông chéo hoá trực giao được khi và chỉ khi nó là ma trận đối xứng. Để chứng minh điều này ta sử dụng tự đồng cấu đối xứng.

Khái niệm dạng toàn phương có rất nhiều ứng dụng.

Một dạng toàn phương được xác định bởi duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng được gọi là dạng cực của dạng toàn phương đó. Ma trận của dạng cực cũng còn gọi là ma trận của dạng toàn phương. Vậy ma trận của một dạng toàn phương là ma trận đối xứng, do đó có thể chéo hoá trực giao được. Bằng phương pháp này ta có thể đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc (chỉ chứa các thành phần bình phương, ma trận của nó có dạng chéo). Ngoài ra ta có thể đưa về dạng chính tắc bằng một số phương pháp khác; chẳng hạn: phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi, thuật biến đổi ma trận ....

Khi đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc theo những phương pháp khác nhau thì các hệ số trên đường chéo của ma trận chéo có thể khác nhau, nhưng số các hệ số dương và hệ số âm luôn bằng nhau, được gọi là chỉ số quán tính của dạng toàn phương. Định lý Sylvester cho ta một tiêu chuẩn để nhận biết một dạng toàn phương là xác định dương hay xác định âm dựa vào các định thức con chính góc bên trái.

Dựa vào tính bất biến của chỉ số quán tính của dạng toàn phương ta có thể ứng dụng để phân loại các đường bậc 2 trong mặt phẳng (các đường conic: đường ellipse, hyperbol, parabol. Đây là 3 đường cong cơ bản đã được khảo sát ở phổ thông dưới dạng phương trình chính tắc) và các mặt bậc 2 trong không gian. Thực hiện phép đổi trục tọa độ để đưa đường bậc 2 trong mặt phẳng và mặt bậc 2 trong không gian về dạng chính tắc.

Hàm số chỉ đạt cực trị tại những điểm tới hạn (đạo hàm bậc nhất bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm). Khi hàm một biến số có đạo hàm bậc 1 triệt tiêu tại một điểm nào đó thì số gia của hàm phụ thuộc vào dấu của đạo hàm bậc 2 tại điểm này. Trường hợp hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 tại một điểm nào đó thì số gia của hàm tại điểm này phụ thuộc vào vi phân bậc 2, đó là một dạng toàn phương. Tuỳ theo tính chất xác định dương, xác định âm hay không xác định của dạng toàn phương này ta có thể kết luận hàm số đạt cực tiểu, cực đại hay không đạt cực trị tại điểm đã xét. Khi vi phân bậc 2 bằng 0 thì bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng rất may là trường hợp này ít gặp trong thực tế.

Dạng toàn phương còn được sử dụng trong bài toán bình phương cực tiểu, trong quy hoạch động, phân loại các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 ...

Học viên nên áp dụng thành thạo lược đồ trực chuẩn hóa Gram-Shmidt. Đổi cơ sở để đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc, đặc biệt chú trọng phương pháp chéo hóa trực giao.

7.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

7.1.1 Định nghĩa dạng song tuyến tính

Định nghĩa 7.1: *Một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V là một ánh xạ*

$$\begin{aligned} \eta : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \eta(u,v) \end{aligned}$$

sao cho khi cố định mỗi biến thì nó trở thành ánh xạ tuyến tính đối với biến kia.

Nghĩa là với mọi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, với mọi $u_1, u_2, v;\ u, v_1, v_2 \in V$ thì

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 \eta(u_1, v) + \alpha_2 \eta(u_2, v) \\ \eta(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \beta_1 \eta(u, v_1) + \beta_2 \eta(u, v_2). \end{aligned} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Định nghĩa 7.2: *Dạng song tuyến tính η được gọi là có tính:*

i) *Đối xứng: Nếu $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ với mọi $u, v \in V$;* **(7.2)**

ii) *Không âm: Nếu $\eta(u,u) \geq 0$ với mọi $u \in V$;* **(7.3)**

iii) *Không dương: Nếu $\eta(u,u) \leq 0$ với mọi $u \in V$;* **(7.4)**

iv) *Xác định: Nếu $\eta(u,u) = 0$ khi và chỉ khi $u = \mathbf{0}$.* **(7.5)**

Dạng song tuyến tính xác định và không âm được gọi là xác định dương. Ta dễ dàng thấy rằng η xác định dương khi và chỉ khi $\eta(u,u) > 0$ với mọi $u \neq \mathbf{0}$.

Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng. Ta thường ký hiệu tích vô hướng của u và v là $\langle u, v \rangle$ thay cho $\eta(u,v)$.

Ví dụ 7.1: Ánh xạ $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$

$$\eta(u,v) = 2x_1 y_1 - 5x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$$

Khi cố định $u = (x_1, x_2)$ thì $\eta(u,v) = 2x_1 y_1 - 5x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$ tuyến tính đối với (y_1, y_2), nghĩa là tuyến tính đối với biến v.

Tương tự khi cố định biến v thì $\eta(u,v)$ tuyến tính đối với biến u.

Vậy $\eta(u,v)$ là một dạng song tuyến tính.

Ngoài ra $\eta(u,v) \neq \eta(v,u)$ và $\eta(u,u) = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 7x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 5x_2^2 > 0$, với mọi $u = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$.

Dó đó $\eta(u,v)$ là một dạng song tuyến tính xác định dương nhưng không đối xứng.

7.1.2 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính

Giả sử $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Ma trận vuông cấp n có phần tử ở hàng i cột j là $\eta(e_i, e_j)$, ký hiệu:

$$A = [\eta]_{\mathscr{B}} = [a_{ij}]_{n\times n},\ a_{ij} = \eta(e_i, e_j) \qquad \textbf{(7.6)}$$

được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính* η *trong cơ sở* $\mathscr{B}$.

$\forall u, v \in V;\ u = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ và $v = y_1e_1 + ... + y_ne_n$

$$\eta(u,v) = \eta(x_1e_1 + ... + x_ne_n, y_1e_1 + ... + y_ne_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i, e_j)x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \qquad \textbf{(7.7)}$$

(7.7) *được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính* η *trong cơ sở* $\mathscr{B}$.

Nếu đồng nhất ma trận một hàng một cột $[a]$ với chính phần tử a, thì biểu thức tọa độ (7.7) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\eta(u,v) = [u]_{\mathscr{B}}^t [\eta]_{\mathscr{B}} [v]_{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(7.8)}$$

Ngược lại ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ xác định bởi (7.7) hoặc (7.8) là một dạng song tuyến tính có ma trận thoả mãn (7.6).

<u>Ví dụ 7.2</u>: Xét $\eta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $\forall\ u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$

$$\eta(u,v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

$\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ta có: $\eta(e_1, e_1) = 3$, $\eta(e_1, e_2) = -2$, …

Do đó ma trận của η trong cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

7.1.3 Biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử η là một dạng song tuyến tính trong không gian véc tơ V

$A=\left[a_{ij}\right]=[\eta]_{\mathscr{B}}$; $A'=\left[a'_{ij}\right]=[\eta]_{\mathscr{B}'}$ là hai ma trận của η trong hai cơ sở tương ứng $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ của V: $a_{ij}=\eta(e_i,e_j)$, $a'_{ij}=\eta(e'_i,e'_j)$.

Gọi $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$: $e'_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}e_i$

$$a'_{ij}=\eta(e'_i,e'_j)=\eta\left(\sum_{k=1}^{n}t_{ki}e_k,\sum_{l=1}^{n}t_{lj}e_l\right)=\sum_{k=1}^{n}t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n}\eta(e_k,e_l)t_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{kl}t_{lj}\right)$$

Vậy

$$A'=T^tAT \qquad \textbf{(7.9)}$$

Công thức này cũng được suy ra từ (7.8) như sau:

$$[u]_{\mathscr{B}}=T[u]_{\mathscr{B}'};\ [v]_{\mathscr{B}}=T[v]_{\mathscr{B}'}$$

$$\begin{cases}\eta(u,v)=[u]_{\mathscr{B}}^t[\eta]_{\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}=[u]_{\mathscr{B}'}^tT^t[\eta]_{\mathscr{B}}T[v]_{\mathscr{B}'}\\ \eta(u,v)=[u]_{\mathscr{B}'}^t[\eta]_{\mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}'}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ [\eta]_{\mathscr{B}'}=T^t[\eta]_{\mathscr{B}}T \qquad \textbf{(7.10)}$$

<u>Ví dụ 7.3</u>: Xét dạng song tuyến tính ở ví dụ 7.2. Xét cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ của $\mathbb{R}^3$:

$$e'_1=(1,3,4),\ e'_2=(2,0,3),\ e'_3=(3,1,2).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$: $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&0&1\\4&3&2\end{bmatrix}$.

Áp dụng công thức (7.9) ta có ma trận của η trong cơ sở $\mathscr{B}'$:

$$A'=T^tAT=\begin{bmatrix}11&-48&33\\18&3&20\\1&-2&31\end{bmatrix}.$$

7.2 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.2.1 Định nghĩa dạng toàn phương

<u>Định nghĩa 7.3</u>: *Giả sử $\eta:V\times V\to\mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính xác định trên không gian véc tơ V. Ánh xạ $Q:V\to\mathbb{R}$ xác định bởi $Q(v)=\eta(v,v)$ được gọi là một dạng toàn phương trên V.*

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, $\forall v \in V$; $v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ theo công thức (7.7) và định nghĩa dạng toàn phương ta có biểu thức tọa độ:

$$Q(v) = \eta(v, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i, e_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Như vậy dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một đa thức đẳng cấp bậc 2.

Ngược lại ánh xạ $Q : V \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó là một đa thức đẳng cấp bậc 2 có dạng

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \text{, với } v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{7.11}$$

thì Q là một dạng toàn phương ứng với dạng song tuyến tính η có $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$.

Ví dụ 7.4: Xét dạng song tuyến tính ở ví dụ 7.1 $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$; $\eta(u, v) = 2x_1 y_1 - 5x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$.

Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^2$ tương ứng là $Q(u) = \eta(u, u) = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 7x_2^2$.

Ta có thể xây dựng các dạng song tuyến tính khác nhau xác định cùng 1 dạng toàn phương, chẳng hạn:

Xét các ánh xạ $\eta_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_1(u, v) = 2x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 7x_2 y_2$;

$\eta_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_2(u, v) = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - 6x_2 y_1 + 7x_2 y_2$;

$\eta_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_3(u, v) = 2x_1 y_1 - 4x_2 y_1 + 7x_2 y_2$;

…………………………………………………

là các dạng song tuyến tính và

$$\eta_1(u, u) = \eta_2(u, u) = \eta_3(u, u) = ... = \eta(u, u) = Q(u).$$

7.2.2 Dạng cực của dạng toàn phương

Ví dụ trên chứng tỏ cùng một dạng toàn phương Q có nhiều dạng song tuyến tính η sao cho $Q(v) = \eta(v, v)$. Tuy nhiên chỉ có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng η sao cho $Q(v) = \eta(v, v)$. Dạng song tuyến tính đối xứng η này được gọi là ***dạng cực của*** Q.

Dạng cực của Q được xác định bởi công thức:

$$\eta(u, v) = \frac{1}{2}\big(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)\big) \tag{7.12}$$

7.2.3 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương

Ma trận của dạng cực của Q trong cơ sở $\mathscr{B}$ cũng được gọi là ***ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}$***. Như vậy ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng.

Như vậy ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của dạng toàn phương Q có dạng cực η, ký hiệu $A=[Q]_{\mathscr{B}}$, được xác định như sau

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ a_{ij}=\eta(e_i,e_j)=\eta(e_j,e_i)=a_{ji} \tag{7.13}$$

Biểu thức tọa độ (7.11) có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$Q(v)=[v]_{\mathscr{B}}^t[Q]_{\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}} \tag{7.14}$$

<u>**Ví dụ 7.5**</u>: Dạng song tuyến tính η_1 là dạng cực của dạng toàn phương Q của ví dụ 7.4. Do đó ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$.

<u>**Ví dụ 7.6**</u>: Tìm ma trận của dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau: $\forall v=(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

$$Q(v)={x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2+4x_1x_3+4{x_3}^2+2x_2x_3.$$

Dạng cực tương ứng

$$\eta(u,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_1y_3+2x_3y_1+4x_3y_3+x_2y_3+x_3y_2.$$

Do đó ma trận A của Q trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

7.2.4 Biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trên Q trong cơ sở nào đó của V có dạng

$$Q(v)=\lambda_1{x_1}^2+\lambda_2{x_2}^2+...+\lambda_n{x_n}^2 \tag{7.15}$$

được gọi là biểu thức tọa độ dạng chính tắc của Q.

Trong các mục tiếp theo chúng ta xét một vài phương pháp tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chính tắc.

7.2.5 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của không gian véc tơ V biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \ a_{ij} = a_{ji} \ , \ v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ .$$

Ta thực hiện các phép đổi tọa độ sau:

♦ Trường hợp 1: Giả sử có $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$, ta có thể sắp xếp lại:

$$Q(v) = a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} xi \right)^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\, x_i x_j$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \\ y_j = x_j ; \ j = 2, ..., n \end{cases} \qquad \textbf{(7.17)}$$

thì $Q(v) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\, y_i y_j$

Tiếp tục quá trình này với biểu thức $\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\, y_i y_j$.

♦ Trường hợp 2: Nếu mọi $a_{ii} = 0$ và tồn tại $a_{ij} \neq 0$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$.

Đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_j = y_j \ ; \ j = 3, ..., n \end{cases} \qquad \textbf{(7.18)}$$

thì $Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\, y_i y_j$

có $a'_{11} = a_{12} \neq 0$, vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử cuối cùng ta nhận được:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \text{ và } Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 .$$

Xét hệ véc tơ có tọa độ là các cột của ma trận trên:

$$e'_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ \ldots, \ e'_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

Khi đó với mọi véc tơ $v \in V$: $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = z_1 e'_1 + \cdots + z_n e'_n$ và

$$Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 .$$

Nói cách khác $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là cơ sở cần tìm để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

<u>Ví dụ 7.7</u>: Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(v) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

Ta có $Q(v) = x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

thì $Q(v) = y_1^2 - 2y_2y_3$

Đặt $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ thì $Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Vậy trong cơ sở mới $e'_1 = (1,0,0)$, $e'_2 = (-3,1,1)$, $e'_3 = (-1,1,-1)$;

$\forall v \in \mathbb{R}^3$: $v = (x_1, x_2, x_3) = z_1 e'_1 + z_2 e'_2 + z_3 e'_3$ thì $Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$.

Ví dụ 7.8: Cho dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_2$, $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$: $Q(v) = a_0^2 - 2a_0 a_1 + 2a_1^2 + 4a_0 a_2 + 4a_2^2 + 2a_1 a_2$.

Ta có

$$\begin{aligned} Q(v) &= a_0^2 + 2a_0(-a_1 + 2a_2) + 2a_1^2 + 4a_2^2 + 2a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 - (-a_1 + 2a_2)^2 + 2a_1^2 + 4a_2^2 + 2a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 + a_1^2 + 6a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 + (a_1 + 3a_2)^2 - 9a_2^2 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} b_0 = a_0 - a_1 + 2a_2 \\ b_1 = a_1 + 3a_2 \\ b_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 + b_1 - 5b_2 \\ a_1 = b_1 - 3b_2 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow Q(v) = b_0^2 + b_1^2 - 9b_2^2$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ ma trận chuyển cơ sở } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy trong cơ sở mới $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1 + t$, $e'_3 = -5 - 3t + t^2$;

$\forall v \in \mathbf{P}_2$: $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1(1+t) + b_2(-5 - 3t + t^2)$ có $Q(v) = b_0^2 + b_1^2 - 9b_2^2$.

7.2.6 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi

Cho dạng toàn phương Q trong không gian véc tơ V với dạng cực tương ứng η và có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là $A = \left[a_{ij}\right]$: $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$; $i, j = 1, ..., n$.

Giả sử các định thức con chính của A đều khác không

$$D_1 = a_{11} \neq 0, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \; ..., \; D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \textbf{(7.19)}$$

Khi đó với mỗi $j = 1, ..., n$; hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j = 0 \\ \text{..} \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jj}x_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(7.20)}$$

là hệ Cramer do đó có duy nhất nghiệm, ký hiệu là $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{jj})$.

Xét hệ véc tơ

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{11}e_1 \\ f_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \qquad \textbf{(7.21)}$$

Ta sẽ chứng minh hệ véc tơ $\mathscr{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ là một cơ sở của V mà biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Quy ước $D_0 = 1$.

Từ điều kiện (7.19) và nghiệm của hệ (7.20) ta có:

$$\alpha_{jj} = \frac{D_{j-1}}{D_j} \neq 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Định thức của hệ $\mathscr{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ trong cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$ là $\alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn} \neq 0$ nên hệ $\mathscr{B}'$ độc lập tuyến tính vì vậy là một cơ sở của V.

Từ (7.20) và (7.21) suy ra:

$$\begin{cases} \eta(f_j, e_i) = a_{i1}\alpha_{1j} + a_{i2}\alpha_{2j} + \dots + a_{ij}\alpha_{jj} = 0;\ \forall\, i = 1, \dots, j-1 \\ \eta(f_j, e_j) = a_{j1}\alpha_{1j} + a_{j2}\alpha_{2j} + \dots + a_{jj}\alpha_{jj} = 1 \end{cases}$$

Do đó ta cũng có:

$$\begin{cases} \eta(f_j, f_i) = 0\ ;\ \forall\, i < j \\ \eta(f_j, f_j) = \eta(f_j, \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{jj}e_j) = \alpha_{jj}\eta(f_j, e_j) = \alpha_{jj} \end{cases}$$

Mặt khác dạng song tuyến tính η đối xứng nên $\eta(f_j, f_i) = 0$ với mọi $i > j$.

Vậy

$$\eta(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \dfrac{D_{j-1}}{D_j} & \text{nếu } i = j \end{cases} \quad \text{với mọi } i, j = 1, \dots, n \qquad \textbf{(7.22)}$$

Gọi A' là ma trận của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì :

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad T^t A T = A' = \left[\eta(f_i, f_j)\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Vậy biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} {y_1}^2 + \frac{D_1}{D_2} {y_2}^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_n} {y_n}^2 . \quad \textbf{(7.23)}$$

<u>Ví dụ 7.9</u>: Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(v) = {x_1}^2 - 4{x_2}^2 + {x_3}^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Có các định thức con chính:

$$D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8,\ D_3 = |A| = -9 .$$

Xét các hệ phương trình (7.20):

♦) $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1$; **(7.24)**

♦) $j = 2$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ nghiệm } x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = -\frac{1}{8} \quad \textbf{(7.25)}$$

♦) $j = 3$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{9},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{8}{9} . \quad \textbf{(7.26)}$$

Ta chọn cơ sở dạng (7.21)

(7.24) $\Rightarrow f_1 = e_1 = (1,0,0)$

(7.25) $\Rightarrow f_2 = -1/4e_1 - 1/8e_2 = \left(-1/4, -1/8, 0\right)$

(7.26) $\Rightarrow f_3 = -2/9e_1 + 1/3e_2 + 8/9e_3 = (-2/9, 1/3, 8/9)$.

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng:

$$\forall v = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3$$

$$Q(v) = \frac{1}{D_1}{y_1}^2 + \frac{D_1}{D_2}{y_2}^2 + \frac{D_2}{D_3}{y_3}^2 = {y_1}^2 - \frac{1}{8}{y_2}^2 + \frac{8}{9}{y_3}^2 .$$

Ví dụ 7.10: (Xem Ví dụ 7.8) Cho dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_2$, $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$:

$$Q(v) = a_0^2 - 2a_0 a_1 + 2a_1^2 + 4a_0 a_2 + 4a_2^2 + 2a_1 a_2 .$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

có các định thức con chính:

$$D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ D_3 = |A| = -9 .$$

Xét các hệ phương trình (7.20):

♦) $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1$; **(7.27)**

♦) $j = 2$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ nghiệm } x_1 = x_2 = 1 \qquad \textbf{(7.28)}$$

♦) $j = 3$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -\frac{1}{9}. \qquad \textbf{(7.29)}$$

Ta chọn cơ sở dạng (7.21)

(7.27) $\Rightarrow f_1 = 1$

(7.28) $\Rightarrow f_2 = 1 + t$

(7.29) $\Rightarrow f_3 = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}t^2$.

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng:

$$v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1(1+t) + b_2\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2\right)$$

$$Q(v) = \frac{1}{D_1} b_0^2 + \frac{D_1}{D_2} b_1^2 + \frac{D_2}{D_3} b_2^2 = b_0^2 + b_1^2 - \frac{1}{9} b_2^2 .$$

Nhận xét 7.1:

1) Một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi khi mọi định thức con góc bên trái $D_k \neq o, \forall k = 1,2,...$ Vì vậy có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange nhưng chưa chắc có thể về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi. Chẳng hạn dạng toàn phương ở ví dụ 7.7 không sử dụng phương pháp Jacobi được vì $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

2) Các ví dụ 7.8, 7.10 cho thấy rằng cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau. Tuy nhiên số các hệ số dương và hệ số âm là như nhau. Ta sẽ chứng minh điều này qua luật quán tính.

7.2.7 Luật quán tính

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right] = [Q]_{\mathscr{B}}$; $A' = \left[a'_{ij}\right] = [Q]_{\mathscr{B}'}$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1,...,e'_n\}$ của V. Gọi $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$, theo công thức (7.9), (7.10) ta có $A' = T^t A T$.

Theo tính chất hạng của ma trận ta có $r(A') = r(T^t A T) \leq r(A)$. Mặt khác T khả nghịch nên $A = \left(T^t\right)^{-1} A' T^{-1} \Rightarrow r(A) \leq r(A')$. Vậy $r(A) = r(A')$.

Do đó ta có thể định nghĩa hạng của dạng toàn phương Q là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó.

Định lý 7.1 (Sylvester - Jacobi): Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

Chứng minh: Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,,\ \ a_{ij} = a_{ji} \,,\ \forall\ v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,.$$

Giả sử $\mathscr{B}' = \{e'_1,...,e'_n\}$, $\mathscr{B}'' = \{e''_1,...,e''_n\}$ là hai cơ sở sao cho biểu thức tọa độ của Q có dạng chính tắc: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} z_i e''_i$;

$$Q(v) = k_1 y_1^2 + ... + k_p y_p^2 - k_{p+1} y_{p+1}^2 - ... - k_r y_r^2 \tag{7.30}$$

$$Q(v) = l_1 z_1^2 + ... + l_q z_q^2 - l_{q+1} z_{q+1}^2 - ... - l_r z_r^2 \tag{7.31}$$

với $r = r(A)$ là hạng của A, các hệ số $k_1,...,k_r; l_1,...,l_r > 0$.

Ta chứng minh $p = q$ bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $p < q$ (trường hợp $q < p$ được chứng minh hoàn toàn tương tự).

Theo công thức đổi tọa độ ta có

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n \\ .... \\ y_n = b_{n1}x_1 + ... + b_{nn}x_n \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + ... + c_{1n}x_n \\ .... \\ z_n = c_{n1}x_1 + ... + c_{nn}x_n \end{cases} \tag{7.32}$$

(7.30) và (7.31) $\Rightarrow$

$$k_1y_1^2 + ... + k_py_p^2 + l_{q+1}z_{q+1}^2 + ... + l_rz_r^2 = l_1z_1^2 + ... + l_qz_q^2 + k_{q+1}y_{q+1}^2 + ... + k_ry_r^2 \tag{7.33}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một véc tơ $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i = \sum_{i=1}^{n} y_ie'_i = \sum_{i=1}^{n} z_ie''_i \neq \mathbf{0}$$

thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y_1 = ... = y_p = 0 \\ z_{q+1} = ... = z_r = z_{r+1} = ... = z_n = 0 \end{cases} \tag{7.34}$$

Thật vậy, các điều kiện (7.31) kết hợp với (7.32) xác định một hệ $n - q + p < n$ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$. Vì số phương trình ít hơn số ẩn nên tồn tại nghiệm $x_1^0, ..., x_n^0$ không đồng thời bằng 0.

Xét véc tơ $v_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i \neq \mathbf{0}$.

Mặt khác từ (7.33) và (7.34) $\Rightarrow z_1 = ... = z_q = z_{q+1} = ... = z_n = 0$.

$\Rightarrow v_0 = \sum_{i=1}^{n} z_ie''_i = \mathbf{0}$, mâu thuẩn. Vậy $p = q$. □

Định nghĩa 7.4: *Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương và số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương.*

Giả sử (p,q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V khi đó $p + q = r$ (hạng của Q).

- *Trường hợp $r = n$: Q được gọi là không suy biến;*
- *Trường hợp $p = n$: Q được gọi là xác định dương;*

- *Trường hợp $q = n$: Q được gọi là xác định âm.*

Rõ ràng

- Q xác định dương khi và chỉ khi $Q(v) > 0$, với mọi $v \neq \mathbf{0}$;
- Q xác định âm khi và chỉ khi $Q(v) < 0$, với mọi $v \neq \mathbf{0}$.

Nếu η là dạng cực của dạng toàn phương Q thì:

- Q xác định dương khi và chỉ khi η xác định dương;
- Q xác định âm khi và chỉ khi η xác định âm;
- Q không suy biến khi và chỉ khi η xác định.

Ví dụ 7.11: Dạng toàn phương Q ở Ví dụ 7.8, 7.10 có chỉ số quán tính dương là 2 và chỉ số quán tính âm là 1. Q không suy biến.

Định lý 7.2 (Sylvester): Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

(i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của A luôn dương.

(ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

Chứng minh: (i) Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Xét $V_k = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ và dạng toàn phương thu hẹp vào không gian véc tơ con V_k, $Q\big|_{V_k} : V_k \to \mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}_k = \{e_1, \ldots, e_k\}$ là ma trận con A_k cấp k nằm ở góc trái của ma trận A. Nếu Q xác định dương thì $Q\big|_{V_k}$ cũng xác định dương. Mặt khác theo luật quán tính ta suy ra rằng các giá trị trên đường chéo của ma trận dạng chính tắc của dạng toàn phương xác định dương là luôn luôn dương nên định thức của nó cũng dương. Vậy $\det A_k > 0$, với mọi $k = 1, \ldots, n$.

Ngược lại, giả sử $D_k = \det A_k > 0$, với mọi $k = 1, \ldots, n$. Theo phương pháp Jacobi (Mục 2.5) tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ sao cho biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n^2 .$$

Vậy Q xác định dương.

Trường hợp (ii) được chứng minh tương tự. □

7.3 TÍCH VÔ HƯỚNG, KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE

7.3.1 Định nghĩa tích vô hướng và tính chất

Định nghĩa 7.5: Một *dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng.*

Một không gian véc tơ với một tích vô hướng <,> được gọi là không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.12: *Xét không gian véc tơ* $\mathbb{R}^n=\{(x_1,...,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}; i=1,...,n\}$

Với $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$, *ta định nghĩa:*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+...+x_ny_n \qquad \textbf{(7.35)}$$

Có thể kiểm tra được công thức (7.35) xác định một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương. Vậy $\left(\mathbb{R}^n,\langle\ ,\ \rangle\right)$ là một không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.13: *Tích vô hướng có trọng số của không gian véc tơ* $\mathbb{R}^n$ *ứng với các hằng số dương* $c_1,...,c_n$ *được định nghĩa*

$$\langle x,y\rangle = c_1x_1y_1+...+c_nx_ny_n$$

Với $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Chẳng hạn

$$\langle u,v\rangle = 2u_1v_1+5u_2v_2,\ \ u=(u_1,u_2),\ \ v=(v_1,v_2)$$

Là một tích vô hướng có trọng số của $\mathbb{R}^2$.

Các hằng số $c_i>0$ là các trọng số, trọng số c_i lớn thì số hạng thứ i trong tích vô hướng cũng lớn theo. Tích vô hướng có trọng đặc biệt quan trọng trong thống kê và xử lý dữ liệu, khi ta muốn nhấn mạnh một thành phần nào đó so với các thành phần khác.

Ví dụ 7.14: Xét không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$ của các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Tích phân

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \qquad \textbf{(7.36)}$$

Xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$

Định nghĩa 7.6: *Giả sử* $\left(V,\langle\ ,\ \rangle\right)$ *là một không gian véc tơ Euclide.*

Với mỗi véc tơ $v \in V$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay môđun của véc tơ v qua biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{7.37}$$

Nếu $\|v\| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Tính chất 7.3: ***Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz***

Với mọi $u, v \in V$, luôn có

$$\left|\langle u, v\rangle\right| \le \|u\| \cdot \|v\| \tag{7.38}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Nếu một trong hai véc tơ bằng $\mathbf{0}$ thì cả hai vế của bất đẳng thức trên đều bằng 0, do đó bất đẳng thức nghiệm đúng.

Giả sử $v \ne \mathbf{0}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta có: $\langle u + tv, u + tv\rangle \ge 0$.

Mặt khác $F(t) = \langle u + tv, u + tv\rangle = t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, u\rangle + \|u\|^2$ là một tam thức bậc hai đối với t và luôn luôn không âm. Vì vậy $\Delta'_F = \left|\langle v, u\rangle\right|^2 - \|v\|^2\|u\|^2 \le 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Khi u, v phụ thuộc thì $u = kv$ (hoặc $v = ku$):

$$\left|\langle u, v\rangle\right| = \left|\langle kv, v\rangle\right| = |k| \cdot \|v\|^2 = \|kv\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Ngược lại nếu $\left|\langle u, v\rangle\right| = \|u\| \cdot \|v\|$ thì $\Delta'_F = 0$.

Do đó tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\langle u + t_0 v, u + t_0 v\rangle = 0 \Rightarrow u = -t_0 v$. □

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng (7.35) ta có bất ***đẳng thức Bunnhiacopsky:***

$$\left(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\right)^2 \le \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right) \tag{7.39}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = ty_1, \ldots, x_n = ty_n$.

7.3.2 Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Shmidt

Định nghĩa 7.7: *Hai véc tơ $u, v \in V$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu $\langle u, v\rangle = 0$.*

Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 7.4: *Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh: Giả sử hệ $S=\{v_1,...,v_n\}$ trực chuẩn, khi đó nếu $x_1v_1+...+x_nv_n=\mathbf{0}$ thì $x_i=\langle x_1v_1+...+x_nv_n,v_i\rangle=0$ với mọi $i=1,...,n$. Do đó S độc lập tuyến tính. □

Định lý 7.5: *Giả sử $S=\{u_1,...,u_n\}$ là một hệ các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian Euclide V. Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S'=\{v_1,...,v_n\}$ sao cho*

$$\operatorname{span}\{v_1,...,v_k\}=\operatorname{span}\{u_1,...,u_k\};\ \textit{với mọi}\ k=1,...,n.$$

Chứng minh: Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là **quá trình trực chuẩn hoá Gram-Shmidt**.

♦) $k=1$: Vì hệ S độc lập nên $u_1\neq\mathbf{0}$. Đặt $v_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.

♦) $k=2$: Xét $\overline{v_2}=-\langle u_2,v_1\rangle v_1+u_2$, ta có $\overline{v_2}\neq\mathbf{0}$ (vì nếu $\overline{v_2}=\mathbf{0}$ thì $u_2=kv_1$, điều này trái với giả thiết hệ S độc lập). Đặt $v_2=\dfrac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, hệ $\{v_1,v_2\}$ trực chuẩn và

$$\operatorname{span}\{v_1,v_2\}=\operatorname{span}\{u_1,u_2\}.$$

♦) Giả sử đã xây dựng được đến $k-1$. Nghĩa là tồn tại $\{v_1,...,v_{k-1}\}$ trực chuẩn sao cho $\operatorname{span}\{v_1,...,v_{k-1}\}=\operatorname{span}\{u_1,...,u_{k-1}\}$. Tương tự trên ta xét

$$\overline{v_k}=-\sum_{i=1}^{k-1}\langle u_k,v_i\rangle v_i+u_k \tag{7.40}$$

ta cũng có $\overline{v_k}\neq\mathbf{0}$ (vì nếu $\overline{v_k}=\mathbf{0}$ thì u_k là tổ hợp tuyến tính của $v_1,...,v_{k-1}$, do đó là tổ hợp tuyến tính của $u_1,...,u_{k-1}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập). Đặt

$$v_k=\frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|} \tag{7.41}$$

thì $v_k\perp v_i$; $i=1,...,k-1$. Vậy hệ $\{v_1,...,v_k\}$ trực chuẩn và

$$\operatorname{span}\{v_1,...,v_k\}=\operatorname{span}\{v_1,...,v_{k-1},\overline{v_k}\}=\operatorname{span}\{u_1,...,u_{k-1},u_k\}.$$ □

Ví dụ 7.15: Trong $\mathbb{R}^3$ xét hệ 3 véc tơ độc lập: $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(-1,1,1)$, $u_3=(1,2,1)$. Hãy trực chuẩn hoá hệ $S=\{u_1,u_2,u_3\}$

Bước 1: $\|u_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bước 2: $\overline{v_2} = -\langle u_2, v_1\rangle v_1 + u_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1,1,1) = \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

$$\overline{v_2} = \frac{2}{3}(-2,1,1) \Rightarrow v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Bước 3: $\overline{v_3} = -\langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 + u_3$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (1,2,1) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{v_3} = \frac{1}{2}(0,1,-1) \Rightarrow v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ véc tơ trực chuẩn hoá của hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$.

<u>Ví dụ 7.16</u>: Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2 với tích vô hướng xác định theo công thức (7.37),

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

cơ sở chính tắc $1, t, t^2$ không phải là một cơ sở trực chuẩn. Thực vậy,

$$\langle 1, t\rangle = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}, \quad \langle 1, t^2\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \quad \langle t, t^2\rangle = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$$

Trực chuẩn hóa Gram-Shmidt cơ sở này ta được hệ trực chuẩn

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = \sqrt{3}(2t-1), \quad u_3(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1).$$

7.3.3 Cơ sở trực chuẩn

<u>Định nghĩa 7.8</u>: *Một cơ sở của không gian véc tơ V đồng thời là hệ trực chuẩn được gọi là một cơ sở trực chuẩn.*

<u>Ví dụ 7.17</u>: Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ là cơ sở trực chuẩn.

<u>Định lí 7.6</u>: *Mọi hệ trực chuẩn của V đều có thể bổ sung thêm để trở thành cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh: Hệ gồm k véc tơ trực chuẩn S là hệ độc lập tuyến tính nên ta có thể bổ sung thêm để được một cơ sở của V. Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này để được một cơ sở trực chuẩn của V. Trong quá trình trực chuẩn hoá k véc tơ của hệ S không thay đổi vì vậy thực chất ta đã bổ sung vào hệ S để có cơ sở trực chuẩn của V. □

Hệ quả 7.7: *Mọi không gian véc tơ Euclide đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.*

Định lý 7.8: Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V, với mọi $u,v\in V$ ta có

i) $v=\langle v,e_1\rangle e_1+...+\langle v,e_n\rangle e_n$. **(7.42)**

ii) $\langle u,v\rangle=\langle u,e_1\rangle\langle v,e_1\rangle+...+\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle$. **(7.43)**

iii) $\|v\|^2=\langle v,e_1\rangle^2+...+\langle v,e_n\rangle^2$ **(7.44)**

Chứng minh: Các đẳng thức trên được suy ra từ các khẳng định sau:

Nếu $v=x_1e_1+...+x_ne_n$, $u=y_1e_1+...+y_ne_n$

thì $\langle v,e_i\rangle=\langle x_1e_1+...+x_ne_n,e_i\rangle=x_i$ với mọi $i=1,...,n$

và $\langle v,u\rangle=\langle x_1e_1+...+x_ne_n,y_1e_1+...+y_ne_n\rangle=x_1y_1+...+x_ny_n$. □

7.3.4 Không gian con trực giao, phần bù trực giao

Định nghĩa 7.9: *Véc tơ $v\in V$ trực giao với tập con $S\subset V$, ký hiệu $v\perp S$, nếu v trực giao với mọi véc tơ của S*

$$v\perp S\Leftrightarrow\langle v,u\rangle=0,\ u\in S \qquad \textbf{(7.45)}$$

Tập con S_1 trực giao với tập con S_2, ký hiệu $S_1\perp S_2$, nếu mọi véc tơ của S_1 đều trực giao với mọi véc tơ của S_2.

$$S_1\perp S_2\Leftrightarrow v\perp u;\ \forall v\in S_1,\forall u\in S_2 \qquad \textbf{(7.46)}$$

Định lý 7.9:

1) $$v\perp S\Leftrightarrow v\perp \operatorname{span}S. \qquad \textbf{(7.47)}$$

2) Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở của W, khi đó:

$$v\perp W\Leftrightarrow v\perp e_i;\ \forall i=1,...,k. \qquad \textbf{(7.48)}$$

3) Với mọi tập con $S\subset V$. Ký hiệu

$$S^{\perp}=\left\{v\in V\,\middle|\,v\perp u,\forall u\in S\right\}. \qquad \textbf{(7.49)}$$

Ta có:

Tập $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V **(7.50)**

$$S^{\perp} = \left(\operatorname{span} S\right)^{\perp} \tag{7.51}$$

$$V = \left(\operatorname{span} S\right) \oplus S^{\perp} \tag{7.52}$$

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span} S \tag{7.53}$$

4) Với mọi không gian con W của V. Ta có:

$$V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}, \ \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W \tag{7.54}$$

Hai không gian con W, $W^{\perp}$ được gọi là phần bù trực giao của nhau.

5) Nếu hệ véc tơ $\left\{e_1,...,e_k\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W và $\left\{e_{k+1},...,e_{k+m}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $W^{\perp}$ thì $\left\{e_1,...,e_k, e_{k+1},...,e_{k+m}\right\}$ là cơ sở trực chuẩn của V.

6) Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hương (7.35) xét hệ véc tơ :

$$u_1 = (a_{11},..., a_{1n}),\ \ldots,\ u_m = (a_{m1},..., a_{mn}).$$

Đặt $S = \left\{u_1,...,u_m\right\}$, khi đó:

$S^{\perp}$ là không gian nghiệm của hệ: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ **(7.55)**

Chứng minh: 1) Với mọi $u \in \operatorname{span} S$, $u = x_1u_1 + ... + x_ku_k$, $u_1,...,u_k \in S$

$$\Rightarrow \left\langle v,u\right\rangle = \left\langle v, x_1u_1 + ... + x_ku_k\right\rangle = x_1\left\langle v,u_1\right\rangle + ... + x_k\left\langle v,u_k\right\rangle = 0.$$

2) Hiển nhiên từ 1).

3) $\mathbf{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \varnothing$. Với mọi $v_1, v_2 \in S^{\perp}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $u \in S$:

$$\left\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u\right\rangle = \alpha\left\langle v_1,u\right\rangle + \beta\left\langle v_2,u\right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S^{\perp}.$$

Vậy $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V.

1) $\Rightarrow$ $S^{\perp} = \left(\operatorname{span} S\right)^{\perp}$.

Giả sử $\left\{e_1,...,e_k\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\operatorname{span} S$.

$\forall\, v \in V$, đặt $u = \left\langle v,e_1\right\rangle e_1 + ... + \left\langle v,e_k\right\rangle e_k \in \operatorname{span} S$.

Ta có: $\langle v-u, e_i \rangle = 0, \forall i = 1,...,k \Rightarrow v-u \in (\operatorname{span} S)^{\perp} = S^{\perp}$.

Vậy $V = (\operatorname{span} S) + S^{\perp}$.

Ngoài ra $\forall u \in (\operatorname{span} S) \cap S^{\perp}$ thì $\langle u,u \rangle = 0 \Rightarrow u = \mathbf{0}$, do đó $V = (\operatorname{span} S) \oplus S^{\perp}$.

Theo công thức (7.49) ta dễ dàng có $S \subset \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \Rightarrow \operatorname{span} S \subset \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.

Ngược lại với mọi $v \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subset V$, (7.52) $\Rightarrow$ $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in \operatorname{span} S$, $u_2 \in S^{\perp}$

$$\Rightarrow 0 = \langle v, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle$$

$$\Rightarrow u_2 = \mathbf{0} \Rightarrow v = u_1 \in \operatorname{span} S \Rightarrow \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subset \operatorname{span} S. \text{ Vậy } \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span} S.$$

4) Công thức (7.54) suy ra từ (7.51), (7.52) và $W = \operatorname{span} W$ nếu W là không gian véc tơ con. □

Ví dụ 7.18: Ký hiệu $W = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ thì $W^{\perp} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ và $\mathbb{R}^3 = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$.

Nhận xét 7.2: Gọi W là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

hoặc viết dưới dạng ma trận $AX = 0$.

Trong chương 6, theo công thức (6.27) ta có thể xem W là nhân của ánh xạ tuyến tính có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Mặt khác theo công thức (7.55) ta cũng có thể xem W là tập tất cả các véc tơ trực giao với mọi véc tơ hàng của A, do đó W là phần bù trực giao của không gian véc tơ sinh bởi các véc tơ hàng của A. Theo (7.52), (7.55) ta có $\dim W = n - r(A)$. Kết quả này cho một cách chứng minh khác của định lý 5.4 chương 5 và công thức (6.13) chương 6.

7.4 MA TRẬN TRỰC GIAO VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRỰC GIAO

7.4.1 Ma trận trực giao

Định nghĩa 7.10: *Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^t A = I$.*

Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^t$.

Ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận trực giao khi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j=k \\ 0 & \text{nếu } j\neq k \end{cases}; \qquad \textbf{(7. 56)}$$

δ_{jk} là ***ký hiệu Kronecker***.

Vậy ma trận A trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột tạo thành hệ trực chuẩn. Mặt khác vì $A^{-1}=A^t \Rightarrow AA^t = I$, do đó các véc tơ hàng của A cũng tạo thành hệ trực chuẩn.

$$\det\left(A^t A\right) = \det I = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1. \qquad \textbf{(7.57)}$$

Ví dụ 7.19: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ có các cột là hệ trực chuẩn (ví dụ 7.11), do đó A là ma trận trực giao.

Ví dụ 7.20: *Mọi ma trận vuông cấp 2 trực giao đều có dạng*

$$A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(7.58)}$$

Thật vậy, ta dễ dàng kiểm chứng hai ma trận A ở trên thoả mãn $A^t A = I$.

Ngược lại nếu $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ và $A^t A = I$ thì $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Do đó $\begin{cases} a^2+c^2=1 & (1) \\ ab+cd=0 & (2) \\ b^2+d^2=1 & (3) \end{cases}$

Mặt khác từ (7.57) và (2) & (3) suy ra b,d là nghiệm duy nhất của hệ phương trình Cramer $\begin{cases} ax+cy=0 \\ bx+dy=1 \end{cases} \Rightarrow b=-\dfrac{c}{\det A},\ d=\dfrac{a}{\det A}$.

♦) Nếu $\det A = 1$ thì $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ và $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

♦) Nếu $\det A = -1$ thì $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ và $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$.

Định lý 7.10: *Ma trận của một cơ sơ trực chuẩn viết trong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Như vậy mọi ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.*

Chứng minh: Gọi $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận của cơ sở trực chuẩn $\{v_1,...,v_n\}$ viết trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$.

Theo công thức (7.42) ta có $v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i=\sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i,v_j\right\rangle e_i$

Từ (7.43) và giả thiết $\{v_1,...,v_n\}$ là cơ sở trực chuẩn ta có

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ik}=\left\langle v_j,v_k\right\rangle=\delta_{jk}$$

Vậy A là ma trận trực giao. □

7.4.2 Ánh xạ tuyến tính trực giao

Định nghĩa 7.11: *Giả sử $\left(V,\langle\ ,\ \rangle_V\right)$ và $\left(V',\langle\ ,\ \rangle_{V'}\right)$ là hai không gian véc tơ Euclide. Ánh xạ tuyến tính $f:V\to V'$ được gọi là ánh xạ trực giao nếu với mọi $u,v\in V$:*

$$\left\langle f(u),f(v)\right\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V \tag{7.59}$$

Nếu $f(u)=\mathbf{0}$ thì $0=\left\langle f(u),f(u)\right\rangle_{V'}=\langle u,u\rangle_V\Rightarrow u=\mathbf{0}$, do đó mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều đơn cấu. Vì vậy mọi tự đồng cấu tuyến tính trực giao là đẳng cấu.

Định lý sau chỉ ra rằng, nếu điều kiện (7.59) thoả mãn đối với mọi véc tơ của một cơ sở trực chuẩn nào đó thì f cũng là ánh xạ tuyến tính.

Định lý 7.11: Giả sử f là tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide V. $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Khi đó f trực giao khi và chỉ khi $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Nói cách khác:

$$\begin{cases}\left\langle f(u),f(v)\right\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V\\ \forall u,v\in V\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left\langle f(e_i),f(e_j)\right\rangle_{V'}=\left\langle e_i,e_j\right\rangle_V\\ \forall i,j=1,...,n\end{cases} \tag{7.60}$$

Chứng minh: (⇒): Hiển nhiên vì $e_i,e_j\in V$.

(⇐): Giả sử $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là cơ sở trực chuẩn thì với mọi $u,v\in V$:

$$v=x_1e_1+...+x_ne_n,\ u=y_1e_1+...+y_ne_n.$$

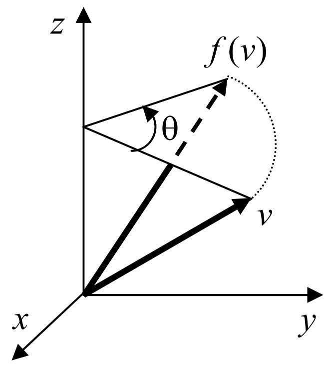
$$\left\langle f(v),f(u)\right\rangle=\left\langle x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n),y_1f(e_1)+...+y_nf(e_n)\right\rangle=x_1y_1+...+x_ny_n=\langle v,u\rangle.$$

7.4.3 Ma trận của tự đẳng cấu trực giao

Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận của tự đẳng cấu f trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$. Theo định lý 7.10 và định lý 7.11 thì tự đẳng cấu f là trực giao khi và chỉ khi A là một ma trận trực giao.

Vậy ma trận của tự đẳng cấu trực giao trong một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Ngược lại, nếu A là ma trận trực giao và f là tự đồng cấu tuyến tính có ma trận trong cơ sở trực chuẩn là A thì f là ánh xạ trực giao.

Ví dụ 7.21: Phép quay xung quanh trục z một góc quay θ:



$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)$$

Có ma trận trong cơ sở chinh tắc

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A là ma trận trực giao do đó f là ánh xạ trực giao.

Định lý 7.12: Mọi ma trận trực giao chỉ có các giá trị riêng là -1 hay 1.

Chứng minh: Giả sử f là tự đẳng cấu trực giao có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là A.

Giả sử $v\neq\mathbf{0}$ là một véc tơ riêng giá trị riêng λ. Khi đó

$$\langle f(v),f(v)\rangle=\langle\lambda v,\lambda v\rangle=\lambda^2\langle v,v\rangle.$$

Mặt khác $\langle f(v),f(v)\rangle=\langle v,v\rangle \Rightarrow \lambda^2\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$

Vì $\langle v,v\rangle\neq 0 \Rightarrow \lambda^2=1$. Vậy $\lambda=\pm1$. ∎

7.5 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN – TỰ ĐỒNG CẤU ĐỐI XỨNG

7.5.1 Bài toán chéo hoá trực giao

Cho ma trận A tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT là ma trận chéo.

Định lý 7.13(điều kiện cần): Nếu A chéo hoá trực giao được thì A là ma trận đối xứng.

Chứng minh: Nếu $T^t AT$ là ma trận chéo thì $\left(T^t AT\right)^t = T^t AT$. Do đó $T^t A^t T = T^t AT$.

Mặt khác vì T khả nghịch nên $A^t = A$. ■

Ngược lại, ta sẽ chứng minh nếu A đối xứng thì chéo hoá trực giao được.

7.5.2 Tự đồng cấu đối xứng

Định nghĩa 7.12: *Tự đồng cấu $f : V \to V$ được gọi là đối xứng nếu với mọi $u, v \in V$:*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \tag{7.61}$$

Định lý 7.14: Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó tự đồng cấu f là đối xứng khi và chỉ khi với mọi $i, j = 1, ..., n$,

$$\langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle \tag{7.62}$$

Chứng minh: Nếu f thỏa mãn (7.61) thì đương nhiên thỏa mãn (7.62).

Ngược lại, giả sử f thỏa mãn (7.62): $\forall\ v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $u = y_1e_1 + ... + y_ne_n$:

$$\langle f(v), u\rangle = \langle x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n), y_1e_1 + ... + y_ne_n\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle f(e_i), e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle v, f(u)\rangle$$ ■

Như vậy để chứng minh một tự đồng cấu là đối xứng thì thay vì chứng minh công thức (7.61) đúng với mọi $v, u \in V$ ta chỉ cần chứng minh công thức (7.62) đúng với một cơ sở nào đó.

7.5.3 Ma trận của một tự đồng cấu đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của tự đồng cấu f trong một cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. Theo công thức (7.42) ta có:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n}\langle f(e_j), e_i\rangle e_i \tag{7.63}$$

Vậy với mọi $i, j = 1, ..., n$: $a_{ij} = \langle f(e_j), e_i\rangle$.

Từ định lý 7.14 và công thức (7.63) ta có kết quả sau.

Định lý 7.15: f đối xứng khi và chỉ khi ma trận A của f trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Ví dụ 7.22: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, -x + 2y + z, 2x + y + 4z)$$

Ma trận trong cơ sở chính tắc: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

là ma trận đối xứng nên f là một tự đồng cấu đối xứng.

Ta cũng có thể kiểm tra lại điều kiện (7.62) như sau:

$$f(e_1) = (1,-1,2),\ f(e_2) = (-1,2,1),\ f(e_3) = (2,1,4);$$

$$\langle f(e_1), e_2 \rangle = -1 = \langle e_1, f(e_2) \rangle;\ \langle f(e_1), e_3 \rangle = 2 = \langle e_1, f(e_3) \rangle;\ \langle f(e_2), e_3 \rangle = 1 = \langle e_2, f(e_3) \rangle.$$

Định lý 7.16: Các giá trị riêng của một ma trận đối xứng là các số thực. Nói cách khác, đa thức đặc trưng của ma trận đối xứng vuông cấp n có n nghiệm thực.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng A cấp n. Giả sử $\lambda = a + ib$ là nghiệm của đa thức đặc trưng $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$. Khi đó theo Định lý 6.15 tồn tại hai véc tơ độc lập tuyến tính $u, v \in V$ sao cho $\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases}$

Do đó $\langle f(v), u \rangle = a\langle v, u \rangle - b\langle u, u \rangle$, $\langle v, f(u) \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle v, v \rangle$.

Vì f đối xứng suy ra $-b\langle u, u \rangle = b\langle v, v \rangle \geq 0 \Rightarrow b = 0$.

Vậy mọi nghiệm của đa thức đặc trưng là nghiệm thực. □

Định lý 7.17: Hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao nhau.

Chứng minh: Giả sử $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$; $v_1, v_2 \neq 0$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$

thì $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$ □

Định lý 7.18: Với mọi tự đồng cấu đối xứng f trong V đều tồn tại một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f. Nói cách khác mọi tự đồng cấu đối xứng đều chéo hóa trực giao được.

Chứng minh: Theo Định lý 7.16 f có véc tơ riêng u_1 ứng với giá trị riêng $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\|u_1\| = 1$. Đặt $W_1 = \{\lambda u_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{u_1\}$.

$$\forall v \in W_1^{\perp},\ \langle f(v), u_1\rangle = \langle v, f(u_1)\rangle = \langle v, \lambda_1 u_1\rangle = 0 \ \Rightarrow\ f(v) \in W_1^{\perp}.$$

Vậy $W_1^{\perp}$ bất biến đối với f và $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ nên ta có thể xét:

$$f_1 = f\big|_{W_1^{\perp}} : W_1^{\perp} \to W_1^{\perp},\ \dim W_1^{\perp} = \dim V - 1.$$

Quy nạp theo số chiều của không gian thì có cơ sở trực chuẩn $\{u_2, ..., u_n\}$ của $W_1^{\perp}$ gồm các véc tơ riêng của f_1. Do đó $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f. □

<u>Hệ quả 7.19</u>: Mọi ma trận đối xứng đều chéo hoá trực giao được.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận A trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. Theo Định lý 7.18 tồn tại cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì T trực giao và

$$T^t A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.64)}$$

trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của A. □

7.5.4 Thuật toán chéo hoá trực giao

Để chéo hoá trực giao một ma trận đối xứng A, nghĩa là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t A T$ có dạng chéo, ta thực hiện các bước sau:

<u>Bước 1</u>: Tìm các giá trị riêng của A (nghiệm của đa thức đặc trưng).

<u>Bước 2</u>: Với mỗi giá trị riêng tìm được ở bước 1, tìm một cơ sở của không gian riêng tương ứng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này.

<u>Bước 3</u>: Gộp các cơ sở đã được trực chuẩn hoá ở bước 2 ta có một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của A. Ma trận các véc tơ của cơ sở này là ma trận trực giao T cần tìm.

<u>Ví dụ 7.23</u>: Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 2\\ 4-\lambda & 3-\lambda & -1\\ 4-\lambda & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(4-\lambda) & 2 & 2\\ 0 & 1-\lambda & -3\\ 0 & -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(4-\lambda) & 4 & 2\\ 0 & -2-\lambda & -3\\ 0 & -2-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(4-\lambda) & 4 & 2\\ 0 & -2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-(4-\lambda)^2(\lambda+2).$$

♦ Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=-2$ là nghiệm khác không của hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases}x+2y \quad =0\\ \quad y-z=0\end{cases}\text{ có nghiệm }\begin{cases}x=-2y\\ y=z\end{cases}$$

Do đó $v\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow v=(-2y,y,y)=y(-2,1,1)$ chọn $v_1=(-2,1,1)$.

Trực chuẩn hoá được $u_1=(-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$.

♦ Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2=4$ (nghiệm kép) là nghiệm khác không của hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình $2x-y-z=0$

Do đó $v\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow v=(x,y,z)=\left(y/2+z/2,y,z\right)=y\left(1/2,1,0\right)+z\left(1/2,0,1\right)$.

Chọn $v_2=\left(1/2,1,0\right)$, $v_3=\left(1/2,0,1\right)$.

Trực chuẩn hoá hai véc tơ này ta có

$$u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),\ u_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

Vậy $T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ và $T^t AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.5.5 Đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hoá trực giao

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ có ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$ (ma trận đối xứng). Theo Hệ quả (7.19) ta có thể hoá chéo trực giao ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$, nghĩa là ta tìm được ma trận trực giao T để $T^t AT$ là ma trận chéo. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'$ gồm các véc tơ riêng của A. Vì vậy biểu thức (7.11) trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc (7.15).

<u>Ví dụ 7.24</u>: Cho dạng toàn phương $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

Với mọi $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: $Q(v) = 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Ma trận của Q cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Theo Ví dụ 7.23 tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$e'_1 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}),\ e'_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),\ e'_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3;\ Q(v) = -2{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 + 4{x'_3}^2.$$

<u>Nhận xét 7.2</u>: Khi sử dụng phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi thì ma trận T nhận được nói chung không phải là ma trận trực giao, các cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ của ví dụ 7.7, 7.9 không phải là cơ sở trực chuẩn.

7.6 ĐƯỜNG BẬC 2 TRONG MẶT PHẲNG VÀ MẶT BẬC 2 TRONG KHÔNG GIAN

7.6.1 Hệ tọa độ trực chuẩn trong mặt phẳng

7.6.1.1 Tọa độ của một véc tơ, tọa độ của một điểm trong mặt phẳng

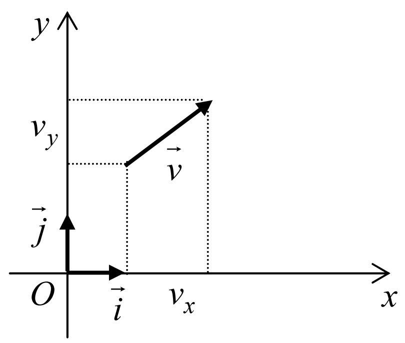
Trong mặt phẳng ta xét hai trục vuông góc $x'Ox$ và $y'Oy$ cắt nhau tại O theo chiều dương, tạo nên một hệ trục Oxy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc Descartes (Đề các) trong mặt phẳng. Trên Ox, Oy ta chọn hai véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Hệ $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

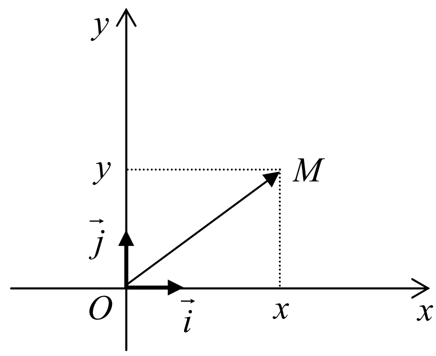
Cặp (v_x, v_y) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{v}$ nếu v_x, v_y là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống hai trục Ox, Oy.

Theo các phép toán cộng véc tơ, phép nhân một số với một véc tơ và tính vô hướng của hai véc tơ $\vec{u}\,\vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ thì

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \left\langle \vec{v}, \vec{i} \right\rangle \vec{i} + \left\langle \vec{v}, \vec{j} \right\rangle \vec{j}.$$

Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì (x, y) được gọi là tọa độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y)$. Nói cách khác tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ là tọa độ của điểm M. Hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là $(x_A, y_A); (x_B, y_B)$ thì véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.





7.6.1.2 Các đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng, ta xét 3 đường bậc 2 sau:

a) Đường Ellipse (Êlíp)

Cho F_1, F_2 cố định. Đường ellipse nhận tiêu điểm F_1, F_2 với độ dài trục lớn a là tập hợp:

$$(E) = \left\{ M \,\middle|\, MF_1 + MF_2 = 2a \right\};\; a > c \text{ với } F_1F_2 = 2c.$$

Nếu $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ thì phương trình của ellipse (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad a^2 = b^2 + c^2. \qquad \textbf{(7.65)}$$

a là độ dài trục lớn, b là độ dài trục bé.

Khi $a = b \Rightarrow c = 0$: ellipse (E) trở thành đường tròn tâm O bán kính a.

b) Hyperbol

Đường hyperbol nhận tiêu điểm F_1, F_2 với độ dài trục lớn a là tập hợp:

$$(H) = \left\{ M \middle| \; |MF_1 - MF_2| = 2a \right\},\ a < c \text{ với } F_1F_2 = 2c.$$

Nếu $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ thì phương trình của hyperbol (H) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2 \qquad \textbf{(7.66)}$$

c) Parabol:

Cho đường thẳng (Δ) và điểm F. Parabol có tiêu điểm F, đường chuẩn (Δ) là tập hợp:

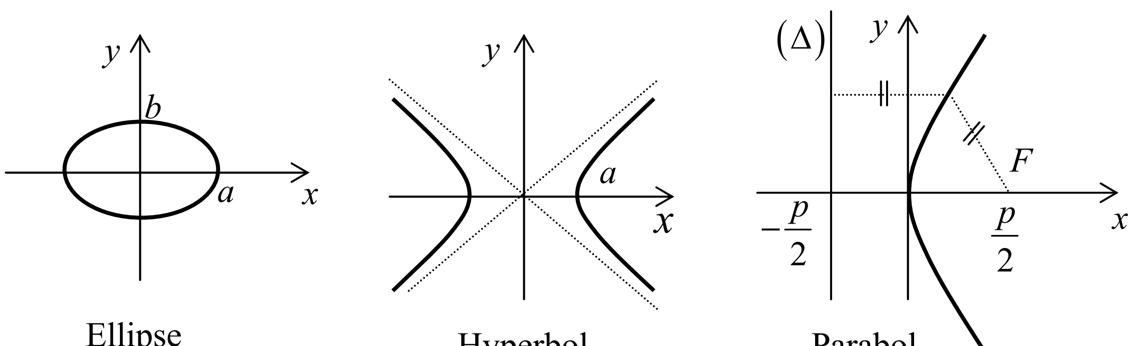
$$(P) = \left\{ M \middle| MF = d(M,\Delta) \right\}$$

trong đó $d(M,\Delta)$ là khoảng cách từ M đến đường thẳng (Δ).

Nếu $F(p/2,0)$, $(\Delta): x = -p/2$ thì (P) có phương trình:

$$y^2 = 2px \qquad \textbf{(7.67)}$$

(7.65), (7.66), (7.67) là phương trình chính tắc của 3 đường cô nic



Ellipse Hyperbol Parabol

7.6.1.3 Phân loại đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy. Một đường cong bậc 2 có phương trình tổng quát:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad \textbf{(7.68)}$$

trong đó a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng không.

Ta tìm một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc mới để trong hệ tọa độ này đường cong (7.68) có dạng chính tắc.

Xét ma trận đối xứng $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $a_{12}=a_{21}$.

Ma trận A đối xứng nên chéo hóa trực giao được, nghĩa là tồn tại ma trận trực giao T sao cho:

$$\det T=1 \text{ và } T^t AT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Theo ví dụ 7.17 và Hệ quả (7.19) ta có thể chọn $T=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Đặt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Như vậy hệ tọa độ mới $Ox'y'$ có được bằng cách quay hệ trục Oxy quanh gốc O một góc φ.

Phương trình đường bậc 2 có công thức (7.68) trong hệ tọa độ $Ox'y'$ là:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_1 x'+2a'_2 y'+a_0=0 \qquad \textbf{(7.69)}$$

(Trường hợp $a_{12}=0$ thì không cần bước này).

Dựa vào các hệ số $\lambda_1,\lambda_2,a'_1,a'_2,a_0$ ta có các đường bậc 2 sau:

1) Nếu $\lambda_1\lambda_2\neq 0$ phương trình (7.69) viết được thành

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2+a'_0=0$$

Tịnh tiến hệ tọa độ $Ox'y'$ đến hệ tọa độ ΩXY:

$$X=x'+\frac{a'_1}{\lambda_1},\ Y=y'+\frac{a'_2}{\lambda_2}, \text{ ta được:}$$

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+a'_0=0. \qquad \textbf{(7.70)}$$

a) $a'_0\neq 0$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1 a'_0<0$: (7.70) là phương trình một Ellipse;

b) $a'_0\neq 0$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1 a'_0>0$: (7.70) là phương trình một Ellipse ảo;

c) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: (7.70) là phương trình một Hyperbol;

d) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: Phương trình (7.70) có dạng $|\lambda_1|X^2 - |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình cặp đường thẳng cắt nhau.

e) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$: Phương trình (7.70) có dạng $|\lambda_1|X^2 + |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình một điểm.

2) Có một trong hai giá trị λ_1, λ_2 bằng 0:

a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 \neq 0$: Phương trình (7.68) có thể viết lại:

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_1(x' + a''_0) = 0 \qquad \textbf{(7.71)}$$

Đặt $X = x' + a''_0$, $Y = y' + \dfrac{a'_2}{\lambda_2}$ ta có: $Y^2 = -2\dfrac{a_1}{\lambda_2}X$.

Vậy (7.71) là một Parabol nhận trục ΩX làm trục đối xứng.

b) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $a'_2 \neq 0$: Đường cong (7.68) là một Parabol nhận trục ΩY làm trục đối xứng.

c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 = 0$ hay $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a'_2 = 0$: Đường cong (7.68) là một điểm.

<u>Ví dụ 7.25</u>: Cho đường bậc 2 có phương trình (G): $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$.

Xét dạng toàn phương: $Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$.

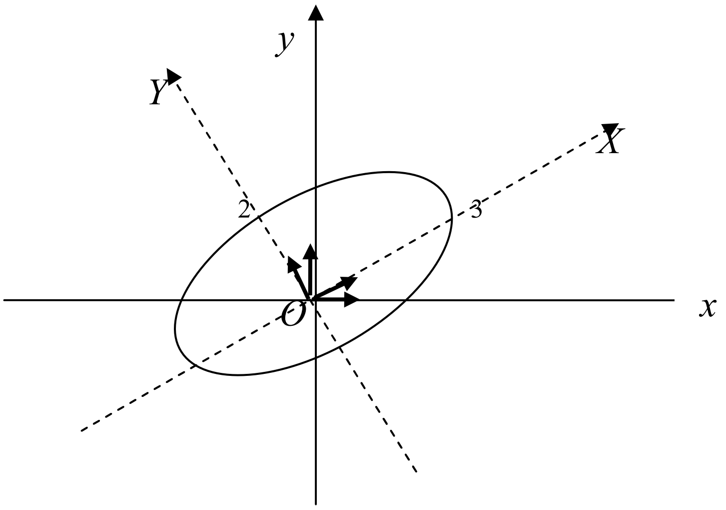
Ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ có giá trị riêng $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ chéo hoá trực giao ta được:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \\ \vec{j}' = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}X + \dfrac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}X + \dfrac{2}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$$

phương trình của (G) trong hệ tọa độ mới:

$$4X^2 + 9Y^2 = 36 \Rightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Vậy (G) là một ellipse có bán kính trục lớn bằng 3 và bán kính trục nhỏ bằng 2.



7.6.2 Hệ tọa độ trực chuẩn trong không gian

7.6.2.1 Tọa độ của một véc tơ và tọa độ của một điểm trong không gian

Trong không gian ta xét ba trục vuông góc chung gốc O: $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$; Tạo thành một hệ trục gọi là hệ trục tọa độ vuông góc Descartes trong không gian, viết tắt $Oxyz$. Trên ba trục tọa độ này ta chọn các véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ta chỉ xét hệ trục $Oxyz$ là hệ thuận, nghĩa là nếu đứng theo chiều véc tơ $\vec{k}$ ta sẽ thấy $\vec{i}$ quay sang $\vec{j}$ theo ngược chiều kim đồng hồ.

Với mọi véc tơ $\vec{v}$ ta có thể viết

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left\langle \vec{v}, \vec{i} \right\rangle \vec{i} + \left\langle \vec{v}, \vec{j} \right\rangle \vec{j} + \left\langle \vec{v}, \vec{k} \right\rangle \vec{k}$$

trong đó v_x, v_y, v_z lần lượt là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống các trục Ox, Oy, Oz.

(v_x, v_y, v_z) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{v}$, ký hiệu $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ được gọi là tọa độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y, z)$.

7.6.2.2 Một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian

a) Ellipsoid (Êlípxôít) là mặt (E) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*) Nếu 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau thì ta có mặt ellipsoid tròn xoay. Chẳng hạn nếu $a = b$ thì ta có mặt tròn xoay quanh trục $z'Oz$. Nếu $a = b = c = R$ thì ta có mặt cầu tâm O bán kính R;

*) Gốc O là tâm đối xứng, các mặt phẳng tọa độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao tuyến với các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ là các ellipse.

b) Hyperboloid một tầng (Hypécbôlôít) là mặt (H_1) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

*) Gốc O là tâm đối xứng;

*) Các trục tọa độ là trục đối xứng;

*) Các mặt phẳng tọa độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là một Hyperbol.

Tương tự có các Hyperboloid một tầng:

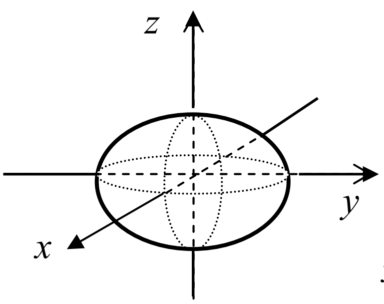
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

c) Hyperboloid hai tầng là mặt (H_2) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

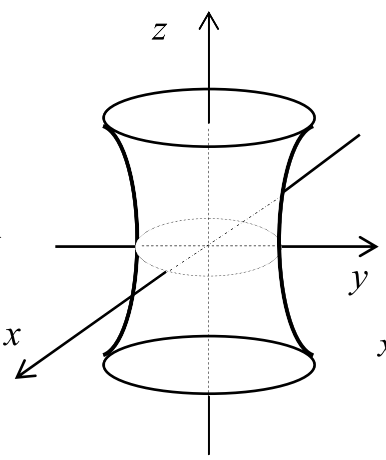
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

*) Mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ có phương trình $z=h$ sao cho $|h|>c$ cắt (H_2) theo một elippse;

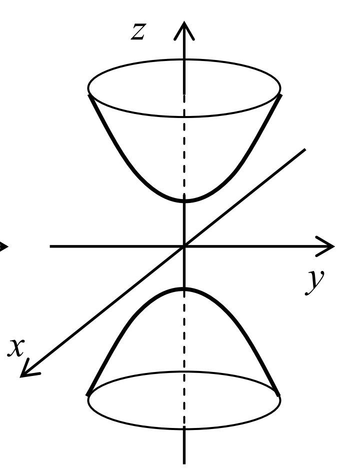
*) Giao của (H_2) với mặt phẳng chứa $z'Oz$ là một Hyperbol.



Ellisoid



Hyperboloid một tầng



Hyperboloid hai tầng

d) Paraboloid elliptic (Parabôlôít êlíptíc) theo trục Oz là mặt (P_1) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\,.$$

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng vuông góc trục $z'Oz$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy là một ellipse;

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là Parabol.

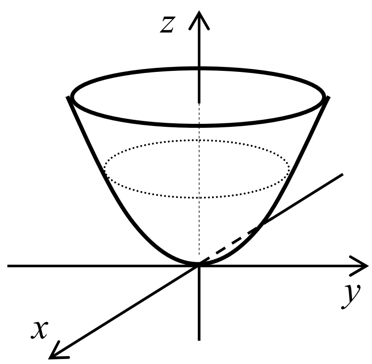
e) Paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa) theo trục Oz có phương trình

$$(P_2):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

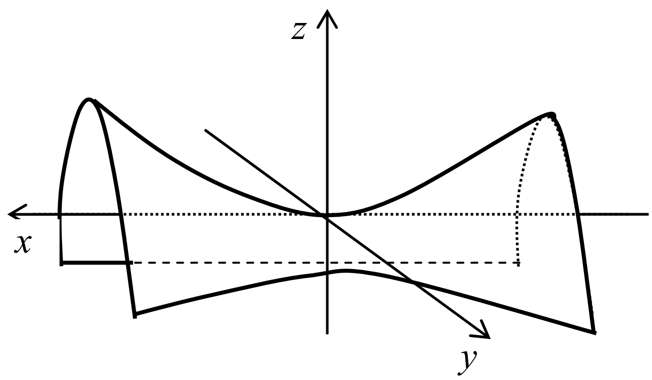
*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một Hyperbol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $x'Ox$ là một Parabol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $y'Oy$ là một Parabol.



Paraboloid elliptic



Paraboloid hyperbolic

Tương tự có các mặt paraboloid, hyperboloid theo trục Ox, Oy.

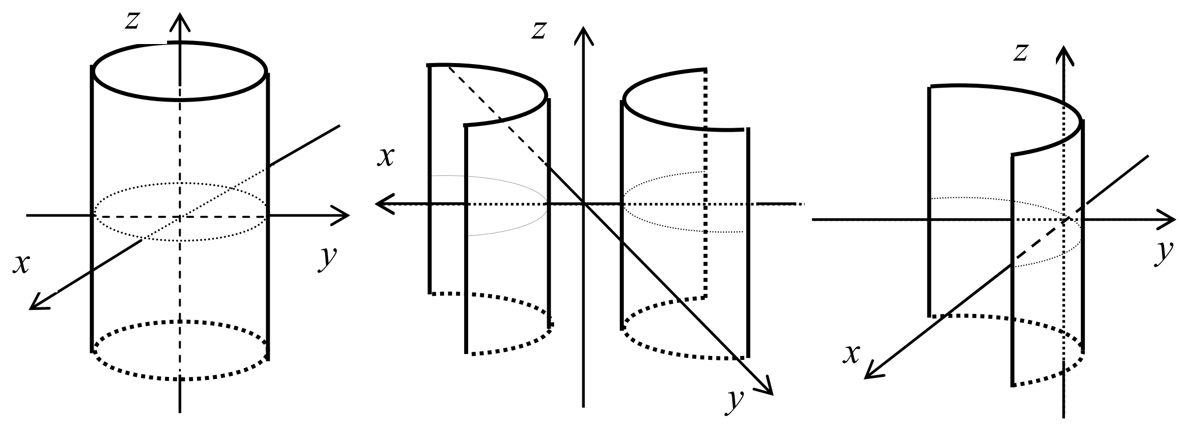
g) Các mặt trụ bậc 2

Các mặt trụ bậc 2 đối xứng qua mặt phẳng xOy

*) Trụ elliptic: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*) Trụ Hyperbolic: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*) Trụ Parabolic: $x^2=2py$.



Trụ elliptic Trụ Hyperbolic Trụ Parabolic

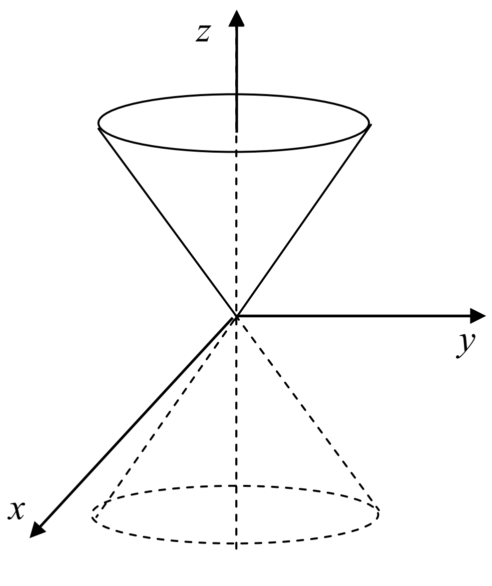
h) Các mặt nón

Các mặt nón đối xứng qua mặt phẳng xOy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

*) Giao với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ cặp đường thẳng.



Tương tự có các mặt trụ, mặt nón đối xứng qua mặt phẳng xOz, yOz.

7.6.2.3 Phân loại các mặt bậc 2

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ xét mặt (Q) bậc 2 có phương trình:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0 \qquad \textbf{(7.72)}$$

Xét dạng toàn phương

$$Q(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\,.$$

Ma trận chính tắc $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,3}}$ với $a_{ij}=a_{ji}$ là ma trận đối xứng nên tồn tại ma trận trực giao T sao cho $T^tAT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$. Có thể chọn T thỏa mãn $\det T=1$ (để hệ trục tọa độ mới tạo thành tam diện thuận).

Tương ứng với ma trận chuyển cơ sở T là chọn hệ trục tọa độ mới bằng cách quay quanh gốc tọa độ.

Công thức đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$.

Mặt bậc 2 (Q) có phương trình trong hệ trục tọa độ mới:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2b'_1\,x'+2b'_2\,y'+2b'_3\,z'+c=0 \qquad \textbf{(7.73)}$$

Tùy theo các giá trị của $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,b'_1,b'_2,b'_3,c$ mặt (Q) có các dạng sau:

a) *Các giá trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ khác 0* ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$)

Bằng cách tịnh tiến hệ trục tọa độ ta có thể đưa phương trình (7.73) về dạng:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2=C'. \qquad \textbf{(7.74)}$$

*) Nếu $C'\neq 0$

- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,C'$ cùng dấu: (Q) là Ellipsoid;
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ cùng dấu, C' trái dấu: (Q) là Ellipsoid ảo;
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là Hyperboloid một tầng hoặc hai tầng.

*) Nếu $C'=0$

- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là nón bậc 2.
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ cùng dấu: (Q) là nón ảo (một điểm).

Các trường hợp còn lại sau đây ta chỉ xét mỗi trường hợp một loại đại diện, các loại khác có kết quả tương tự.

b) *Có đúng một giá trị trong ba giá trị* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *bằng* 0.

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

*) $b'_3 \neq 0$: Tịnh tiến hệ tọa độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b'_3 Z = 0$.

Đây là phương trình Paraboloid elliptic nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$ và Paraboloid hyperbolic nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

*) $b'_3 = 0$: Tịnh tiến tọa độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = C'$.

- Nếu $C' \neq 0$: Đây là phương trình các mặt trụ.
- Nếu $C' = 0$: Đây là phương trình các cặp mặt phẳng cắt nhau hoặc truc $Z'Z$.

c) *Có đúng hai giá trị trong ba giá trị* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *bằng* 0.

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

*) b'_2, b'_3 không đồng thời bằng 0.

Bằng cách quay hệ trục tọa độ

$$\begin{cases} x'_1 = x''_1 \\ x'_2 = \dfrac{b'_3 x''_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} + \dfrac{b'_2 x''_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \\ x'_3 = -\dfrac{b'_2 x''_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} + \dfrac{b'_3 x''_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \end{cases}$$

Phương trình trên trở thành

$$\lambda_1\left(x''_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}\, x''_3 + c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1} = 0.$$

Thức hiện tịnh tiến trục toa độ ta đượcphương trình dạng:

$\lambda_1 X^2 + b''_2 Y = 0$: (Q) là mặt trụ Parabolic.

*) $b'_2 = b'_3 = 0$: Tịnh tiến hệ tọa độ ta có: $\lambda_1 X^2 = C'$. Do đó (7.72) là phương trình cặp mặt phẳng song song nếu $C' \neq 0$ và trùng nhau nếu $C' = 0$.

<u>**Ví dụ 7.26**</u>: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$$(Q): 7x^2 + 7y^2 + 10z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 12x + 12y + 72z = 24$$

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A=\begin{bmatrix}7&1&2\\1&7&2\\2&2&10\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $|A-\lambda I|=(6-\lambda)^2(12-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \text{ có } \det T=1 \text{ và } T^tAT=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&12\end{bmatrix}$$

Đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ thì phương trình của mặt (Q) trong tọa độ mới:

$$6x'^2+6y'^2+12z'^2-12\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)$$
$$+12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)+72\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=24$$

$$\Rightarrow\quad 6\left(x'^2+2\sqrt{2}x'\right)+6\left(y'^2+4\sqrt{3}y'\right)+12\left(z'^2+2\sqrt{6}\right)=24$$

Tịnh tiến tọa độ: $X=x'+\sqrt{2}$, $Y=y'+2\sqrt{3}$, $Z=z'+\sqrt{6}$. Suy ra:

$$(Q):\ \frac{X^2}{30}+\frac{Y^2}{30}+\frac{Z^2}{15}=1.$$

Vậy (Q) là một Ellipsoid tròn xoay theo trục $Z'\Omega Z$.

Ω có tọa độ $\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$.

<u>Ví dụ 7.27</u>: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$$(Q): 2xy+2xz+2yz-6x-6y+6z=0.$$

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $|A-\lambda I|=(\lambda+1)^2(2-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ có } \det T=1 \text{ và } T^t AT=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Đổi tọa độ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ ta được phương trình của mặt (Q) trong tọa độ mới:

$$-x'^2-y'^2+2z'^2-6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)$$
$$-6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)+6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)=0.$$

$$\Rightarrow \quad -x'^2-\left(y'^2-4\sqrt{6}y'\right)+2\left(z'^2-\sqrt{3}z'\right)=0$$

Tịnh tiến tọa độ: $X=x'$, $Y=y'-2\sqrt{6}$, $Z=z'-\sqrt{3}/2$. Suy ra

$$(Q):\ \frac{2X^2}{45}+\frac{2Y^2}{45}-\frac{4Z^2}{45}=1.$$

Vậy (Q) là một Hyperboloid một tầng.

BÀI TẬP CHƯƠNG VII

7.1) Xét ánh xạ $\eta:\mathcal{M}_{m\times n}\times\mathcal{M}_{m\times n}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(A,B)=\mathrm{Tr}(B^tA)$. Trong đó $\mathcal{M}_{m\times n}$ là không gian các ma trận cỡ $m\times n$ và $\mathrm{Tr}A$ là vết của ma trận vuông A. Chứng minh η là một tích vô hướng.

7.2) Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét dạng song tuyến tính xác định bởi:

$$\eta\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=x_1x_2-2x_1y_2-2y_1x_2+5y_1y_2$$

a) Chứng minh $\left(\mathbb{R}^2,\eta\right)$ là không gian véc tơ Euclide.

b) Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở $\{(1,0),(0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

7.3) Giả sử $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ là hai véc tơ thuộc $\mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh rằng dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_1(u,v) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 + 7y_1y_2 .$$

b) Tìm các giá trị k để dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_2(u,v) = x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + ky_1y_2 .$$

c) Với các giá trị nào của $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thì dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_3(u,v) = ax_1x_2 + bx_1y_2 + cy_1x_2 + dy_1y_2 .$$

7.4) Chứng minh rằng:

(i) Tổng của hai tích vô hướng là một tích vô hướng.

(ii) Tích của một số dương với một tích vô hướng là một tích vô hướng.

7.5) Trong không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$.

a) Chứng minh bất đẳng thức hình bình hành $\|u+v\| + \|u-v\| = 2\|u\| + 2\|v\|$.

b) Công thức dạng cực $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

c) $\|u\| = \|v\|$ khi và chỉ khi $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.

d) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ khi và chỉ khi $\langle u,v\rangle = 0$.

7.6) Trong không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$. Chứng minh rằng: với mọi $u,v,w \in V$, $\|u-v\|^2 \le 2\left(\|u-w\|^2 + \|w-v\|^2\right)$.

7.7) Hai hệ véc tơ $\{u_1,...,u_n\}$, $\{v_1,...,v_n\}$ của không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$ được gọi là tương hỗ nếu $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \ne j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$; $i,j = 1,...,n$.

Chứng minh: a) Nếu $\{u_1,...,u_n\}$ độc lập tuyến tính thì mọi hệ $\{v_1,...,v_n\}$ tương hỗ của nó cũng độc lập tuyến tính.

b) Với mọi cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$ đều tồn tại duy nhất một cơ sở $\{v_1,...,v_n\}$ tương hỗ của nó. Khi đó nếu $u = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ thì $x_i = \langle u, v_i\rangle$ và $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

7.8) Cho W là không gian véc tơ con của không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$. Chứng minh rằng: với mọi $v \in V$, tồn tại duy nhất véc tơ $u_0 \in W$ sao cho $\|u_0 - v\|^2 \le \|u-v\|^2$ với mọi $u \in W$. u_0 được gọi là hình chiếu của v xuống W.

7.9) W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ Euclide $V, \langle , \rangle$. Giả sử $\dim W_1 < \dim W_2$. Chứng minh tồn tại véc tơ khác $\mathbf{0}$ của W_2 trực giao với mọi véc tơ của W_1.

7.10) Xét ánh xạ $\eta : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t MB)$, trong đó $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathcal{M}_2$ là không gian các ma trận vuông cấp 2.

Chứng minh rằng η là một dạng song tuyến tính.

Tìm ma trận của η trong cơ sở $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

7.11) Giả sử η là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$\eta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2 .$$

a) Tìm ma trận A của η trong cơ sở $\{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$.

b) Tìm ma trận B của η trong cơ sở $\{v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)\}$.

c) Tìm ma trận P chuyển từ cơ sở $\{u_i\}$ sang $\{v_i\}$, và nghiệm lại rằng $B = P^t AP$.

7.12) Tìm ma trận trực giao P sao cho $P^t AP$ có dạng chéo:

a) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7.13*) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng bậc 2 có hai giá trị riêng là α, β. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất có thể có của a_{12}.

7.14) Giả sử Q là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ V với dạng cực tương ứng là η. Nghiệm lại rằng $\eta(u, v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big)$, $u, v \in V$.

7.15) Giả sử η là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. Với mọi tập con $S \subset V$, ký hiệu:

$$S^{\perp}=\{v\in V:\eta(u,v)=0,\forall u\in S\}\,;\; S^{\mathsf{T}}=\{v\in V:\eta(v,u)=0,\forall u\in S\}.$$

a) Chứng minh rằng:

i) $S^{\perp}$, S^{T} là hai không gian véc tơ con của V.

ii) $S_1\subset S_2$ thì $S_2^{\perp}\subset S_1^{\perp}$ và $S_2^{\mathsf{T}}\subset S_1^{\mathsf{T}}$.

iii) $\{\mathbf{0}\}^{\perp}=\{\mathbf{0}\}^{\mathsf{T}}=V$.

b) Giả sử U, W là hai không gian véc tơ con của V. Chứng minh rằng

i) $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

ii) $(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.

7.16) Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con W của $\mathbb{R}^4$ trực giao với hai véc tơ $u_1=(1,-2,3,4)$ và $u_2=(3,-5,7,8)$

7.17) Giả sử W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$ sinh bởi $u=(1,2,3,-1,2)$ và $v=(2,4,7,2,-1)$. Hãy tìm một cơ sở của phần bù trực giao $W^{\perp}$ của W.

7.18) Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2, xét tương ứng

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

a) Chứng minh rằng $\langle,\rangle$ là một tích vô hướng.

b) Tìm một cơ sở của không gian con W trực giao với $q(t)=2t+1$.

c) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở chính tắc $\{1,t,t^2\}$.

7.19) Không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2 với tích vô hướng

$$\eta(A,B)=\mathrm{Tr}(B^tA).$$

a) Chứng minh rằng $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

b) Tìm một cơ sở của phần bù trực giao của:

(i) Các ma trận đường chéo.

(ii) Các ma trận đối xứng.

7.20) Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc. Tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$

e) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$

f) $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

7.21) Tìm phép biến đổi trực giao để đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$.

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

e) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

7.22) Tìm λ để các dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

7.23) Hãy đưa các đường bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng:

a) $3x^2+8xy-3y^2+180=0$

b) $17x^2+12xy+8y^2-80=0$

c) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$

d) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y-18=0$

e) $4x^2+9xy+12y^2-4x+6y+1=0$

7.24) Hãy đưa các mặt bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng:

a) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$;

b) $2xy - 6x + 10y + z = 31$;

c) $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz + 8x + 8y + 8z = 0$;

d) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz = 16$;

e) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z = 0$;

f) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 18x + 18y + 45 = 0$.

7.25) Cho f tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide $\left(V, \langle,\rangle\right)$. Chứng minh 3 mệnh đề sau tương đương:

(i) Với mọi $v \in V$, $\langle f(v), v\rangle = 0$;

(ii) Với mọi $v, u \in V$, $\langle f(v), u\rangle = -\langle f(u), v\rangle$;

(iii) Ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn là phản đối xứng.

7.26) a) A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh:

Với mọi $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $XAY^t = XBY^t \Rightarrow A = B$.

b) A, B là hai ma trận đối xứng cấp n. Chứng minh:

Với mọi $X \in \mathbb{R}^n$, $XAX^t = XBX^t \Rightarrow A = B$.

c) A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh A phản đối xứng khi và chỉ khi Với mọi $X \in \mathbb{R}^n$, $XAX^t = 0$.

7.27) Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là hai ma trận trực giao cấp n. Chứng minh rằng $\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\right| \le n$. Khi nào thì có đẳng thức.

7.28*) Giả sử $\mathscr{B}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide n chiều V. $\{v_1, ..., v_n\}$ là một hệ véc tơ của V:

a) Chứng minh $\left|\det_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_n\}\right| \le \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|$;

b) Xét trường hợp đẳng thức.

7.29*) a) Chứng minh rằng với mọi hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ của không gian Euclide V ta luôn có:

$$\begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \dots & \langle v_1,v_k\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & \langle v_2,v_k\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k,v_1\rangle & \langle v_k,v_2\rangle & \dots & \langle v_k,v_k\rangle \end{vmatrix} \geq 0$$

b) Nếu $\{e_1,\dots,e_k\}$ độc lập tuyến tính thì:

$$\langle v,v\rangle \geq -\frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_k \\ b_1 & & & \\ \dots & & \langle e_i,e_j\rangle & \\ b_k & & & \end{vmatrix}}{\left|\langle e_i,e_j\rangle\right|} \quad \text{với } b_i = \langle v,e_i\rangle .$$

Ngược lại, với mọi $b_1,\dots,b_k$ cho trước, tồn tại duy nhất v sao cho $b_i = \langle v,e_i\rangle$ và bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức.

c) Chứng minh rằng nếu A là ma trận của một dạng toàn phương xác định dương thì $Q(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \dots & & A & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ xác định âm.

7.30*) Cho η,φ là hai tích vô hướng trên không gian véc tơ n chiều V sao cho với mọi $u,v \in V : \eta(u,v) = 0 \Rightarrow \varphi(u,v) = 0$. Chứng minh tồn tại $k \in \mathbb{R}$: $\varphi(u,v) = k\eta(u,v)$.

7.31*) Cho Q là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ n chiều V có chỉ số quán tính (p,q). W là không gian véc tơ con của V. Chứng minh:

a) Nếu $Q|_W$ xác định dương thì $\dim(W) \leq p$.

b) Nếu $Q|_W$ xác định âm thì $\dim(W) \leq q$.

c) Nếu $\dim(W) > \max(p,q)$ thì $Q|_W$ không xác định, nghĩa là tồn tại một véc tơ $v \in W$, $v \neq 0$ sao cho $Q(v) = 0$.