CHƯƠNG VI

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Ánh xạ tuyến tính (biến đổi tuyến tính) từ không gian véc tơ vào không gian véc tơ là một ánh xạ bảo toàn phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ. Ánh xạ tuyến tính là một nội dung chính của đại số tuyến tính. Một ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào chính không gian đó được gọi là tự đồng cấu tuyến tính (gọi tắt là tự đồng cấu) hay toán tử tuyến tính. Nhà toán học Peano (Italia) là người đầu tiên đưa ra khái niệm ánh xạ tuyến tính (1888).

Ánh xạ tuyến tính còn bảo toàn các không gian con qua các tập ảnh và ảnh ngược. Nghĩa là ảnh qua ánh xạ tuyến tính của một không gian con là một không gian con, ảnh ngược của không gian con cũng là không gian con. Đặc biệt ảnh $f(V)$ của ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ là không gian con của W được gọi là ảnh của f. Còn ảnh ngược $f^{-1}\{0\}$ là không gian véc tơ con của V được gọi là nhân của f. Chiều của không gian véc tơ ảnh $f(V)$ được gọi là hạng của f.

Ánh xạ tuyến tính và đơn ánh được gọi là đơn cấu, toàn ánh được gọi là toàn cấu, song ánh được gọi là đẳng cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu từ không gian này lên không gian kia thì ta nói hai không gian đó đẳng cấu. Có những tiêu chuẩn riêng để nhận biết một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu, đơn cấu hay đẳng cấu. Một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu khi và chỉ khi hạng của nó bằng chiều của không gian đích. Một ánh xạ tuyến tính là đơn cấu khi và chỉ khi nhân của nó chỉ gồm véc tơ không. Ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào một không gian véc tơ cùng chiều là toàn cấu khi và chỉ khi là đơn cấu (do đó là đẳng cấu), điều này cũng giống như ánh xạ giữa hai tập hữu hạn có cùng số phần tử.

Một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi ảnh của cở sở bất kỳ qua ánh xạ này. Vì vậy khi đã cho cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}'$ của W thì ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận của hệ véc tơ $\{ f(e_1), ..., f(e_n) \}$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$. Điều này giải thích tại sao đại số tuyến tính thường được xem là lý thuyết ma trận. Ma trận của tổng hai ánh xạ tuyến tính bằng tổng hai ma trận, ma trận của tích một số với một ánh xạ tuyến tính bằng tích của số này với ma trận xác định ánh xạ tuyến tính, ma trận của hợp hai ánh xạ tuyến tính bằng tích hai ma trận của chúng. Nói cách khác tương ứng giữa ánh xạ tuyến tính và ma trận của nó là một đẳng cấu bảo toàn phép cộng, phép nhân một số với ma trận và phép nhân hai ma trận. Hạng của ánh xạ tuyến tính bằng hạng của ma trận của nó. Ma trận của một tự đồng cấu trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Chính vì lý do này nên một bài toán về ma trận có thể giải quyết bằng phương pháp ánh xạ tuyến tính và ngược lại.

Công thức xác định ảnh của một ánh xạ tuyến tính có biểu thức tọa độ là một hệ phương trình tuyến tính. Tìm véc tơ thuộc không gian ảnh tương ứng với tìm điều kiện của vế sau để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm. Nhân của ánh xạ tuyến tính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với ánh xạ này.

Một bài toán quan trọng của lý thuyết ma trận là chéo hoá ma trận, đó là tìm một ma trận đồng dạng của ma trận cho trước mà ma trận đồng dạng này có các phần tử không ở trên đường chéo bằng không. Vấn đề này tương đương với việc tìm một cơ sở gồm các véc tơ riêng của tự đồng cấu xác định bởi ma trận đã cho. Thuật toán chéo hoá ở cuối chương sẽ giúp học viên giải quyết được bài toán dạng này. Bài toán chéo hóa ma trận có rất nhiều ứng dụng. Bài toàn chéo hóa trực giao ma trận được xét trong chương 7.

6.1 KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

6.1.1 Định nghĩa và ví dụ

<u>Định nghĩa 6.1</u>: *Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian W thoả mãn:*

với mọi $u,v\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

$$\begin{cases} f(u+v)=f(u)+f(v) \\ f(\alpha u)=\alpha f(u) \end{cases} \qquad \textbf{(6.1)}$$

được gọi là ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính hay gọi tắt là đồng cấu) từ V vào W.

Khi $V=W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

<u>Ví dụ 6.1</u>: Xét các ánh xạ sau:

1) Ánh xạ không $\quad 0: V \to W$

$$u \mapsto 0(u)=\mathbf{0}$$

2) Ánh xạ đồng nhất $\quad \mathrm{Id}_V: V \to V$

$$u \mapsto \mathrm{Id}_V(u)=u$$

3) Phép vị tự tỷ số $k\in\mathbb{R}$ $\quad f: V \to V$

$$u \mapsto f(u)=ku$$

4) Giả sử $W_1\oplus W_2\subset V$, xét phép chiếu lên thành phần thứ nhất:

$$\mathrm{Pr}_1: W_1\oplus W_2 \to V$$

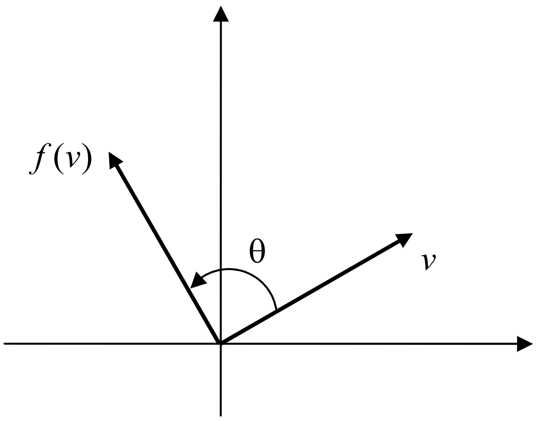
$$v_1+v_2 \mapsto v_1$$

5) Phép tịnh tiến theo véc tơ $v_0 \in V$, $f : V \to V$

$$u \mapsto u + v_0$$

6) Phép quay góc θ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



Ánh xạ 1), 2), 3), 4), 6) là ánh xạ tuyến tính.

2), 3) , 6) là tự đồng cấu.

5) không phải là ánh xạ tuyến tính nếu $v_0 \neq \mathbf{0}$.

7) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, tương ứng $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_m)$$

xác định bởi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.2)}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ngược lại ta có thể chứng minh được (xem mục 4) mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

6.1.2 Các tính chất

<u>Định lý 6.1</u>: *Nếu $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thì*

(i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ii) *với mọi* $v \in V$: $f(-v) = -f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, \forall v_1, ..., v_n \in V$.

Chứng minh: (i) $f(\mathbf{0}) = f(0\cdot\mathbf{0}) = 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(ii) $f(v) + f(-v) = f(v + (-v)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(-v) = -f(v)$.

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo n. ■

Định lý 6.2: *Ánh xạ $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi:*

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \qquad \textbf{(6.3)}$$

Chứng minh: Với mọi $u, v \in V$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta chứng minh điều kiện (6.1) tương đương điều kiện (6.3).

(6.1) $\Rightarrow$ (6.3): $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

(6.3) $\Rightarrow$ (6.1): $\begin{cases} f(u+v) = f(1u) + f(1v) = 1f(u) + 1f(v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = f(\alpha u + 0v) = \alpha f(u) + 0f(v) = \alpha f(u). \end{cases}$ ■

Định lý 6.3: *Mỗi ánh xạ tuyến tính từ V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V; nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ cho trước của V, khi đó với mỗi hệ véc tơ $u_1, ..., u_n \in W$:*

Tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ sao cho $f(e_i) = u_i, i = 1, ..., n$. **(6.4)**

Chứng minh: *) Tồn tại: Với mọi $v \in V$, giả sử $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của v trong cơ sở $\mathscr{B}$, nghĩa là $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Đặt $f(v) = x_1u_1 + ... + x_nu_n \in W$.

Ta có thể kiểm chứng được rằng f là ánh xạ tuyến tính và $f(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$.

*) Duy nhất: Giả sử $g: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $g(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$ khi đó với bất kỳ $v \in V, v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$,

$$g(v) = g(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1g(e_1) + ... + x_ng(e_n) = x_1u_1 + ... + x_nu_n = f(v)$$

Vậy $g = f$. ■

Hệ quả 6.4: *$f, g: V \to W$ là hai ánh xạ tuyến tính. $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó*

$$f = g \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i); \forall i = 1, ..., n. \qquad \textbf{(6.5)}$$

6.1.3 Các phép toán của các ánh xạ tuyến tính

6.1.3.1 Hom(V,W)

Cho hai không gian véc tơ V, W. Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là $\text{Hom}(V,W)$ (homomorphism).

Với $f,g \in \text{Hom}(V,W)$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto f(v)+g(v) \qquad \textbf{(6.6)}$$

là một ánh xạ tuyến tính, được ký hiệu $f+g$ và gọi là tổng của f và g.

Tương tự, với $k \in \mathbb{R}$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto kf(v) \qquad \textbf{(6.7)}$$

là ánh xạ tuyến tính được ký hiệu là kf.

Vậy ta đã xác định hai phép toán: cộng hai ánh xạ tuyến tính, nhân một số với ánh xạ tuyến tính. Có thể chứng minh được với hai phép toán này thì $(\text{Hom}(V,W),+,\cdot)$ có cấu trúc không gian véc tơ và $\dim \text{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

<u>Ví dụ 6.2</u>: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y,z) = (3x-5y+2z, 4x+y-6z),\ g(x,y,z) = (2x+6y-7z, x-5z).$$

Ta có: $2f(x,y,z) = (6x-10y+4z, 8x+2y-12z)$.

$$(3f-2g)(x,y,z) = (5x-27y+20z, 10x+3y-8z).$$

6.1.3.2 EndV

Giả sử $f: V \to V'$ và $g: V' \to V''$ là hai ánh xạ tuyến tính. Có thể chứng minh được rằng ánh xạ hợp $g \circ f : V \to V''$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Ký hiệu tập các tự đồng cấu của V là $\text{End}\, V$ (endomorphism).

Với hai phép toán cộng và hợp ánh xạ $(\text{End}\, V, +, \circ)$ có cấu trúc vành không giao hoán, có đơn vị, không nguyên.

Ngoài ra với hai phép toán (6.6) , (6.7) thì $\left(\text{End}\, V, +, \cdot\right)$ còn là một không gian véc tơ.

Vậy $\text{End}\, V$ vừa có cấu trúc vành, vừa có cấu trúc không gian véc tơ.

Cho $f \in \text{End}\, V$ và $p(t) = a_0 + \cdots + a_n t^n$ là một đa thức bậc n, ta ký hiệu

$$p(f) = a_0 \,\text{Id}_V + \cdots + a_n f^n;\ \text{trong đó}\ f^0 = \text{Id}_V,\ f^1 = f,\ f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ \text{lần}} \qquad \textbf{(6.7)}$$

<u>Ví dụ 6.3</u>: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y) = (3x-5y, 4x+y).$$

a) $f^2(x,y)=(-11x-20y,16x-19y)$

b) Xét đa thức $p(t)=50-9t+2t^2$.

$$p(f)(x,y)=\left(50\,\mathrm{Id}_V-9f+2f^2\right)(x,y)=(x+5y,-4x+3y).$$

6.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định lý 6.5: *Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính, khi đó:*

(i) *Nếu V_1 là không gian con của V thì $f(V_1)$ là không gian con của W. S là một hệ sinh của V_1 thì $f(S)$ là một hệ sinh của $f(V_1)$. Do đó* $\dim f(V_1)\le\dim V_1$.

(ii) *Nếu W_1 là không gian con của W thì $f^{-1}(W_1)$ là không gian con của V, ngoài ra nếu $W_1\subset f(V)$ thì* $\dim W_1\le\dim f^{-1}(W_1)$.

Chứng minh:

(i) • Với mọi $u_1,u_2\in f(V_1)$ tồn tại $v_1,v_2\in V_1$ sao cho $u_1=f(v_1)$, $u_2=f(v_2)$. Do đó với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\alpha u_1+\beta u_2=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)=f(\alpha v_1+\beta v_2)\in f(V_1).$$

• Với mọi $u\in f(V_1)$, tồn tại $v\in V_1$ sao cho $f(v)=u$.

Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một hệ sinh của V_1, khi đó: $v=x_1v_1+...+x_nv_n$

$\Rightarrow u=f(v)=f(x_1e_1+...+x_ne_n)=x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n)$

$\Rightarrow$ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $f(V_1)$.

Điều này suy ra $\dim f(V_1)\le\dim V_1$.

(ii) • Với mọi $v_1,v_2\in f^{-1}(W_1)$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$f(\alpha v_1+\beta v_2)\in\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)\in W_1\Rightarrow\alpha v_1+\beta v_2\in f^{-1}(W_1).$$

• Giả sử $\{u_1,...,u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính của W_1 và $\{v_1,...,v_n\}\subset f^{-1}(W_1)$ sao cho $f(v_i)=u_i$ thì $\{v_1,...,v_n\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Vậy $\dim W_1\le\dim f^{-1}(W_1)$ ■

Định nghĩa 6.2: *Với ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ ta ký hiệu và định nghĩa*

$$\mathrm{Ker}f=f^{-1}\{\mathbf{0}\},\quad \mathrm{Im}\,f=f(V) \qquad \textbf{(6.9)}$$

là hạt nhân và là ảnh của f.

Vậy $\mathrm{Ker}f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}$ là một không gian véc tơ con của V.

$$\forall v \in V:\ v \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(6.10)}$$

$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\}$ là một không gian véc tơ con của W.

$$\forall u \in W:\ u \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \exists v \in V:\ u = f(v) \qquad \textbf{(6.11)}$$

Ta ký hiệu và định nghĩa

$$r(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \qquad \textbf{(6.12)}$$

là hạng của ánh xạ f.

<u>Định lý 6.6</u>: *Với mọi ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$*

$$\dim V = r(f) + \dim \mathrm{Ker}\, f \qquad \textbf{(6.13)}$$

Chứng minh: Giả sử $\{e_1, ..., e_m\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Ker}\, f$ (khi $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ thì m = 0). Ta có thể bổ sung để $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_{m+k}\}$ là một cơ sở của V.

Ta sẽ chứng minh $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ là một hệ sinh, độc lập tuyến tính của $\mathrm{Im}\, f$ (do đó là một cơ sở).

- Với mọi $f(v) \in \mathrm{Im}\, f$; $v = x_1 e_1 + ... + x_m e_m + x_{m+1} e_{m+1} + ... + x_{m+k} e_{m+k} \in V$

$$f(v) = x_1 f(e_1) + ... + x_m f(e_m) + x_{m+1} f(e_{m+1}) + ... + x_{m+k} f(e_{m+k})$$
$$= x_{m+1} f(e_{m+1}) + ... + x_{m+k} f(e_{m+k}).$$

Vậy $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ là một hệ sinh của $f(V)$.

- Giả sử $y_1 f(e_{m+1}) + ... + y_k f(e_{m+k}) = \mathbf{0}$ thì $y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} \in \mathrm{Ker}\, f$

$$\Rightarrow\ y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} = z_1 e_1 + ... + z_m e_m$$

$$\Rightarrow\ y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} - z_1 e_1 - ... - z_m e_m = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow\ y_1 = ... = y_k = 0.$$

Vậy $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ độc lập tuyến tính ■

<u>Nhận xét 6.1</u>: Giả sử $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Ta có thể chứng minh được $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $\mathrm{Im}\, f$, do đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là cơ sở của $\mathrm{Im}\, f$.

Ví dụ 6.4: Xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,t) = \left(2x - y + 3z + 5t, 3x - 2y + 3z + 4t, x + 3z + 6t\right).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ của f. Từ đó suy ra hạng $r(f)$.

Giải: Theo (6.11): $\forall u \in \mathbb{R}^3$: $u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^4$: $u = f(v)$.

Nói cách khác $u = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = a \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = b \\ x & & +3z & +6t & = c \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & a \\ 3 & -2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 0 & 3 & 6 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & b-a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a+c \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $b - 2a + c = 0$. Do đó

$$u = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u = (a, 2a - c, c) = a(1,2,0) + c(0,-1,1).$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$.

Tương tự, từ (6.10) ta có: $v = (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi (x,y,z,t) là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = 0 \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = 0 \\ x & & +3z & +6t & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z - 6t \\ y = -3z - 7t \end{cases}$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{(-3,-3,1,0), (-6,-7,0,1)\}$.

$r(f) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$; $r(f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim \mathbb{R}^4$ (nghiệm đúng công thức 6.13).

Mặt khác ngoài cơ sở $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$ của $\operatorname{Im} f$, theo nhận xét 6.1 và $r(f) = 2$ thì hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ đều là cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

6.3 TOÀN CẤU, ĐƠN CẤU, ĐẲNG CẤU

6.3.1 Toàn cấu

Định nghĩa 6.3: *Ánh xạ tuyến tính và toàn ánh được gọi là toàn cấu.*

Định lý 6.6: *Với ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$, các mệnh đề sau tương đương:*

(i) f *toàn cấu.*

(ii) *Ảnh của hệ sinh của V là hệ sinh của W.*

(iii) $r(f) = \dim W$.

Chứng minh: $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử $\{v_1,...,v_n\}$ là hệ sinh của V. Khi đó với mọi $u \in W$, tồn tại $v \in V$ sao cho $f(v) = u$ (vì $f(V) = W$).

$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n \Rightarrow u = f(v) = f(x_1v_1 + ... + x_nv_n) = x_1f(v_1) + ... + x_nf(v_n)$.

Vậy $\{f(v_1),..., f(v_n)\}$ là hệ sinh của W.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$ là hệ sinh của $W \Rightarrow W = \operatorname{span}\{f(e_1),..., f(e_n)\} = f(V) \Rightarrow f$ toàn cấu.

$(i) \Leftrightarrow f(V) = W \Leftrightarrow \dim f(V) = \dim W \Leftrightarrow r(f) = \dim W$. ■

6.3.2 Đơn cấu

Định nghĩa 6.4: *Ánh xạ tuyến tính và đơn ánh được gọi là đơn cấu.*

Định lý 6.7: *Với ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$, các mệnh đề sau tương đương:*

(i) f *đơn cấu.*

(ii) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) *Ảnh của hệ độc lập tuyến tính của V là hệ độc lập tuyến tính của W.*

(iv) $r(f) = \dim V$.

Chứng minh: $(i) \Rightarrow (ii)$: Hiển nhiên.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow \mathbf{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 = v_2$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Giả sử $\{v_1,...,v_m\}$ độc lập, ta chứng minh $\{f(v_1),..., f(v_m)\}$ độc lập:

$$\forall x_1,...,x_m \in \mathbb{R}: x_1f(v_1) + ... + x_mf(v_m) = \mathbf{0} \Rightarrow x_1v_1 + ... + x_mv_m \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow x_1v_1 + ... + x_mv_m = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = ... = x_m = 0.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $f(V)$. Do đó $r(f) = \dim V$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: $\left.\begin{matrix} \dim V = r(f) + \dim \operatorname{Ker} f \\ \dim V = r(f) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$. ■

Ví dụ 6.5: Ánh xạ tuyến tính xét ở ví dụ 6.4 không đơn cấu vì $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$, không toàn cấu vì $r(f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$.

6.3.3 Đẳng cấu

Định nghĩa 6.5: *Ánh xạ tuyến tính vừa đơn cấu vừa toàn cấu được gọi là đẳng cấu.*

Vậy đẳng cấu là một ánh xạ tuyến tính và song ánh.

Hai không gian V, W được gọi là đẳng cấu nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f: V \to W$.

Phép đẳng cấu $f: V \to V$ được gọi là *tự đẳng cấu* của không gian V. Tập hợp các tự đẳng cấu của V được ký hiệu là $\mathrm{Gl}(V)$.

Định lý 6.8: *V và W đẳng cấu khi và chỉ khi $\dim V = \dim W$.*

Chứng minh: $(\Rightarrow)$: Nếu $f: V \to W$ đẳng cấu thì

$$\left.\begin{array}{l} \dim V = r(f) \quad \text{(đơn cấu)} \\ \dim W = r(f) \quad \text{(toàn cấu)} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim W .$$

$(\Leftarrow)$: Ngược lại nếu $\dim V = \dim W = n$.

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ là cơ sở lần lượt của V và W. Gọi $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thoả mãn $f(e_i) = \omega_i$; $i = 1, ..., n$ (xem chứng minh định lý 6.3). Khi đó $r(f) = \dim V = \dim W \Rightarrow f$ đẳng cấu. ■

Ví dụ 6.6: Ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (2x - y, x + y)$$

là một đơn cấu vì $f(x, y) = (0,0) \Rightarrow (2x - y, x + y) = (0,0) \Rightarrow (x, y) = (0,0)$.

f đơn cấu do đó f là một đẳng cấu vì vậy: với mọi $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tồn tại duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x', y') = f(x, y) = (2x - y, x + y)$.

Như vậy f đẳng cấu khi và chỉ khi hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - y = x' \\ x + y = y' \end{cases}.$$

Ta có thể tìm được nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{x' + y'}{3}$, $y = \dfrac{2y' - x'}{3}$.

Ví dụ 6.7: Xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z)+(2x+5y+6z)t+(x+8z)t^2 .$$

Theo ví dụ 5.6 hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c \end{cases}$ tồn tại duy nhất nghiệm.

Do đó $\forall a+bt+ct^2 \in \mathbf{P}_2$, $\exists!(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(x,y,z) = a+bt+ct^2$.

Vậy f là một đẳng cấu.

Định lý 6.9: $\left(\mathrm{Gl}(V),\circ\right)$ *là một nhóm không giao hoán.*

Chứng minh: Ta dễ dàng chứng minh nếu f là tự đẳng cấu của V thì ánh xạ ngược f^{-1} cũng là tự đẳng cấu của V. Nếu f,g tự đẳng cấu thì $g\circ f$ cũng tự đẳng cấu.

Ta đã biết rằng ánh xạ từ một tập hữu hạn vào một tập hữu hạn có cùng số phần tử là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh (Nhận xét 1.3-5, chương 1). Điều này cũng còn đúng đối với ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ có cùng số chiều.

Định lý 6.10: *Giả sử* $\dim V = \dim W$ *và* $f:V\to W$ *là ánh xạ tuyến tính từ* V *vào* W. *Khi đó:* f *đơn cấu khi và chỉ khi* f *toàn cấu, do đó đẳng cấu.*

Chứng minh:

f toàn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim W \Leftrightarrow r(f) = \dim V \Leftrightarrow f$ đơn cấu. ■

6.4 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

6.4.1 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Theo định lý 6.3, mọi ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V (công thức (6.4)).

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

Mặt khác nếu $\mathscr{B}' = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận cỡ $m\times n$ có n cột là các tọa độ của các véc tơ $f(e_1),...,f(e_n)$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (công thức (3.10)). Vì vậy với hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ cho trước thì ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi ma trận:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n},\ \text{với}\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j=1,...,n \qquad \textbf{(6.14)}$$

Định nghĩa 6.6: *Ma trận A có các cột lần lượt là tọa độ của hệ véc tơ $f(e_1),...,f(e_n)$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (công thức (6.14)) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V và $\mathscr{B}'$ của W. Ký hiệu:*

$$A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \tag{6.15}$$

Nếu f là một tự đồng cấu của không gian véc tơ V, khi đó ma trận A của f trong cùng một cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V được ký hiệu

$$A=[f]_{\mathscr{B}} \tag{6.16}$$

thay cho $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở chính tắc được gọi là *ma trận chính tắc*.

Ví dụ 6.8: Xét ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y,z)=(2x+y-4z,3x+5z)$

$$f(1,0,0)=(2,3)=2(1,0)+3(0,1).$$

$$f(0,1,0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1).$$

$$f(0,0,1)=(-4,5)=-4(1,0)+5(0,1).$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Nhận xét 6.2: Bằng cách tính toán như ví dụ trên ta có thể kiểm tra được rằng ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ với công thức xác định ảnh:

$$f(x_1,...,x_m)=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m,...,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m)$$

Có ma trận chính tắc:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

Ví dụ 6.9: Toán tử đạo hàm $D:\ \mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_2$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn:

$$D(1)=0,\ D(t)=1,\ D(t^2)=2t,\ D(t^3)=3t^2.$$

Do đó có ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_3$ và $\mathbf{P}_2$ là $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Nếu cố định cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}'=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ của W thì: Với mỗi ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ tồn tại duy nhất ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ xác định bởi (6.14).

Ngược lại, cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Xét hệ véc tơ $\{u_1,...,u_n\}$ của W có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ là các cột của ma trận A, theo định lý 6.3 tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ thỏa mãn (6.4). Do đó $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\in\mathscr{M}_{m\times n}$.

Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $\mathrm{Hom}(V,W)$ và $\mathscr{M}_{m\times n}$.

<u>**Định lý 6.11**</u>: *Tương ứng* $\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathscr{M}_{m\times n}$

$$f\mapsto A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

xác định bởi (6.14) là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}+[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'};\ \forall\lambda\in\mathbb{R}:[\lambda f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\lambda[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \qquad \textbf{(6.17)}$$

$$r(f)=r([f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}). \qquad \textbf{(6.18)}$$

Chứng minh: $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{(f+g)(e_1),...,(f+g)(e_n)\}$, $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ và $[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{g(e_1),...,g(e_n)\}$. Do đó $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}+[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Đẳng thức thứ hai của công thức (6.17) được chứng minh tương tự.

Để chứng minh công thức (6.18) ta nhận thấy rằng hạng $r(A)$ của ma trận $A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

Mặt khác $\mathrm{span}\{f(e_1),...,f(e_n)\}=f(V)$, do đó $r(A)=\dim f(V)=r(f)$. ■

Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g:\ V\xrightarrow{f}V'\xrightarrow{g}V''$. V,V',V'' lần lượt có cơ sở là $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_m\}$, $\mathscr{B}''=\{e_1'',...,e_l''\}$.

Giả sử $A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ và $B=[g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ là ma trận của g trong cơ sở $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ thì BA là ma trận của $g\circ f$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}''$. Thật vậy:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\text{ xác định bởi } f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i\ ;\ j=1,...,n$$

$B=\left[b_{ki}\right]_{l\times m}$, xác định bởi $g(e'_i)=\sum_{k=1}^{l} b_{ki}e''_k$; $i=1,...,m$

$$g\circ f(e_j)=g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(e'_i)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{ki}e''_k\right)=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)e''_k .$$

Điều này chứng tỏ BA là ma trận của $g\circ f$.

$$\left[g\circ f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}=\left[g\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}\left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \tag{6.19}$$

Khi $V=V'=V''$ và ta chọn cố định một cơ sở của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 6.12: *Tương ứng* $\mathrm{End}(V)\to\mathscr{M}_n$

$$f\mapsto A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$$

là một đẳng cấu vành, trong đó $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$ *là ma trận của* f *trong một cơ sở cố định* $\mathscr{B}$ *của* V *xác định bởi* (6.14), (6.16).

Hệ quả 6.13: *Cho* $f\in\mathrm{End}V$, $\mathscr{B}$ *là một cơ sở của* V. *Đặt* $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$, *khi đó:*

f *là tự đẳng cấu khi và chỉ khi* A *khả nghịch, đồng thời ma trận của* f^{-1} *trong cơ sở* $\mathscr{B}$ *có dạng* $\left[f^{-1}\right]_{\mathscr{B}}=A^{-1}$.

Hệ quả 6.14: *Cho* $f\in\mathrm{End}V$, $\mathscr{B}$ *là một cơ sở của* V. *Giả sử* $p(t)=a_0+\cdots+a_nt^n$ *là một đa thức bậc* n. *Đặt* $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$; *theo* (6.8), (6.16) - (6.19) *ta có:*

Ma trận của $p(f)=a_0\,\mathrm{Id}_V+\cdots+a_nf^n$ *trong cơ sở* $\mathscr{B}$ *là* $p(A)=a_0I+\cdots+a_nA^n$.

Ví dụ 6.10: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z)=(x+2y+2z,3x+y+5z,x-y+z).$$

a) Chứng minh rằng f là một đẳng cấu. Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược $f^{-1}(x,y,z)$.

b) Cho đa thức $p(t)=2-4t+3t^2$. Viết ma trận chính tắc của $p(f)$.

Giải: a) Ma trận chính tắc của f là $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&5\\1&-1&1\end{bmatrix}$. A khả nghịch và

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -4 & 8\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 3 & -5\end{bmatrix}.$$

Do đó f là một đẳng cấu và ánh xạ ngược xác định như sau:

$$f^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{2}(6x-4y+8z, 2x-y+z, -4x+3y-5z).$$

b) Ma trận chính tắc của $p(f)$:

$$A^2=\begin{bmatrix}9 & 2 & 14\\ 11 & 2 & 16\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow p(A)=2I-4A+3A^2=\begin{bmatrix}25 & -2 & 34\\ 21 & 4 & 28\\ -7 & 4 & -8\end{bmatrix}.$$

6.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính.

Gọi $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_1=\{e_1,...,e_n\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_1=\{e'_1,...,e'_n\}$ của không gian V.

Gọi $P=\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_2=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_2=\{\omega'_1,...,\omega'_m\}$ của W.

$A=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$,

$A'=\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_2$ thì

$$\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \qquad \textbf{(6.20)}$$

Hoặc

$$PA'=AP;\quad A'=P^{-1}AT \qquad \textbf{(6.21)}$$

Thật vậy: Giả sử $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}=\left[a_{ki}\right]_{m\times n}\Rightarrow f(e_i)=\sum_{i=1}^{m}a_{ki}\omega_k$

$$A'=\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}=\left[a'_{ki}\right]_{m\times n}\Rightarrow f(e'_j)=\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\,\omega'_i$$

$$P=\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}\Rightarrow \omega'_i=\sum_{i=1}^{m}p_{ki}\omega_k$$

$$T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \Rightarrow e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \,.$$

Ta có:

$$f(e'_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\,\omega'_i = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} p_{ki}\omega_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ki} a'_{ij} \right) \omega_k \quad (*)$$

Mặt khác:

$$f(e'_j) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} t_{ij} \right) \omega_k \quad (**)$$

(*) và (**) suy ra $\sum_{i=1}^{m} p_{ki} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} t_{ij}$ với mọi $j = 1,...,n$; $k = 1,...,m$.

Do đó $PA' = AT$. Vậy $A' = P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V . Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A' = T^{-1}AT \qquad \textbf{(6.22)}$$

$$\left[f\right]_{\mathscr{B}'} = \left(\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \right)^{-1} \left[f\right]_{\mathscr{B}} \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(6.23)}$$

<u>**Ví dụ 6.11**</u>: Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận ứng với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ xác định như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$.

Giải:

<u>Cách 1</u> (Tìm trực tiếp theo định nghĩa 6.6 công thức (6.14)-(6.16)):

Đặt $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3, e'_3 = e_2, e'_4 = e_4$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(e'_1) = f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + e'_4 \,;$$

$$f(e'_2) = f(e_3) = -e_2 + 3e_3 + e_4 = 3e'_2 - e'_3 + e'_4 \,;$$

$f(e'_3) = f(e_2) = 2e_1 + 5e_3 + 2e_4 = 2e'_1 + 5e'_2 + 2e'_4$;

$f(e'_4) = f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4 = e'_1 + e'_2 + 2e'_3 + 3e'_4$;

Vậy ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Cách 2</u> (Áp dụng công thức 6.22, 4.25, 3.12):

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>**Định nghĩa 6.7**</u>: *Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.*

Công thức (6.22) cho thấy hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Mặt khác, nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa định thức của một tự đồng cấu f là

$$\det f = \det A \qquad \textbf{(6.24)}$$

trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở nào đó.

<u>**Ví dụ 6.12**</u>: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (x - 2y, x, -3x + 4y),\ g(x, y, z) = (x - 2y - 5z, 3x + 4y)$$

Tìm ma trận chính tắc của $g \circ f$, tính $\det(g \circ f)$.

Giải: Gọi A, B lần lượt là ma trận chính tắc của f và g thì:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

và ma trận chính tắc của $g \circ f$ là $BA = \begin{bmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$.

Định thức: $\det(g \circ f) = \begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 70$.

6.4.3 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Nếu $(x_1, ..., x_n) = (v)_{\mathscr{B}}$ là tọa độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$,

$(y_1, ..., y_m) = (f(v))_{\mathscr{B}'}$ là tọa độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (xem 3.10)

và $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [a_{ij}]_{m \times n}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ thì

$$[f(v)]_{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [v]_{\mathscr{B}}; \text{ nghĩa là } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.25)}$$

(6.25) *được gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính* f.

Đặc biệt nếu $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \, ..., \, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

thì ma trận chính tắc của f là $[a_{ij}]_{m \times n}$ (xem nhận xét 6.2). Ngược lại từ công thức (6.25) suy ra rằng mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng trên, điều này giải thích công thức (6.2) của ví dụ 6.1.

6.4.4 Ánh xạ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Đẳng thức (6.25) có thể viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ .... \\ y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \textbf{(6.26)}$$

Điều này cho phép giải quyết các bài toán về ánh xạ tuyến tính thông qua hệ phương trình tuyến tính.

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Từ công thức (6.10), (6.11) xác định $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ và biểu thức tọa độ dưới dạng hệ phương trình tuyến tính (6.26) ta có các kết quả sau:

- Với mọi $u \in W$, $u = b_1\omega_1 + \cdots + b_m\omega_m$. Khi đó

$u \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ có nghiệm **(6.27)**

- Với mọi $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$;

$v \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi $(x_1,...,x_n)$ là nghiêm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \textbf{(6.28)}$$

<u>**Ví dụ 6.13**</u>: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2$ có công thức xác định ảnh

$$f(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3) + (4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3)t + (a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3)t^2$$

a) Viết biểu thức tọa độ của f trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

Giải: a) Đặt $f(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = b_0 + b_1t + b_2t^2$, biểu thức tọa độ (6.24) của f trong cơ sở chính tắc có dạng

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Dạng phương trình (6.25):

$$\begin{cases} b_0 = 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 \\ b_1 = 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ b_2 = a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 \end{cases}$$

b) $q = b_0 + b_1t + b_2t^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists\, p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : f(p) = q$.

Điều này tương đương hệ phương trình (với ẩn a_0, a_1, a_2, a_3) sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 = b_0 \\ 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 = b_1 \\ a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 = b_2 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 & b_0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & b_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & b_2 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + b_1 - b_0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -7 & 2b_2 - b_1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + b_1 - b_0 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $b_2 + b_1 - b_0 = 0$.

Do đó

$$q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow q = (b_1 + b_2) + b_1 t + b_2 t^2 = b_1(1+t) + b_2(1+t^2).$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\left\{ q_1 = 1+t,\ q_2 = 1+t^2 \right\}$.

Theo nhận xét 6.1 và tương tự ví dụ 6.4 ta cũng nhận thấy rằng hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ độc lập, do đó các cặp véc tơ tương ứng tạo thành cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

Chẳng hạn $\{r_1, r_2\}$, $\{r_1, r_3\}$, $\{r_1, r_4\}$, $\{r_2, r_3\}$, $\{r_2, r_4\}$, $\{r_3, r_4\}$ là các cơ sở của $\operatorname{Im} f$, trong đó $\left\{ r_1 = 5 + 4t + t^2,\ r_2 = 2 + t + t^2,\ r_3 = -3 - 2t - t^2,\ r_4 = 1 + 3t - 2t^2 \right\}$.

$p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi a_0, a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \\ 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2a_0 + a_1 - 7a_3 = 0 \\ 3a_0 - a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2a_0 + 7a_3 \\ a_2 = 3a_0 + 5a_3 \end{cases}$$

Do đó:

$$p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow p = a_0 + (2a_0 + 7a_3)t + (3a_0 + 5a_3)t^2 + a_3 t^3$$

$$\Leftrightarrow p = a_0(1 + 2t + 3t^2) + a_3(7t + 5t^2 + t^3).$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\left\{ p_1 = 1 + 2t + 3t^2;\ p_2 = 7t + 5t^2 + t^3 \right\}$.

Nhận xét 6.3:

a) Từ hai định lý 6.11, 6.12 hệ quả 6.13, 6.14 và các ví dụ trên ta thấy rằng một bài toán về ánh xạ tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận, hệ phương trình tuyến tính và ngược lại. Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính f với $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là đơn cấu hoặc toàn cấu, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng (6.25), (6.26) có duy nhất nghiệm.

b) $\dim \operatorname{Ker} f$ là chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (6.28), hạng của ma trận hệ số bằng hạng của f. Áp dụng định lý 5.5-b) ta nhận được đẳng thức (6.13) của định lý 6.6.

6.5 CHÉO HOÁ MA TRẬN

Trong phần này ta giải quyết bài toán: Với tự đồng cấu tuyến tính f của không gian V, hãy tìm một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{6.28}$$

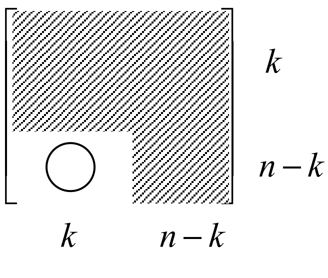
Bài toán trên cũng tương đương với bài toán: Cho ma trận A tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Ta sẽ chỉ ra khi nào bài toán này có lời giải, cách tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo hoặc cách tìm ma trận T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

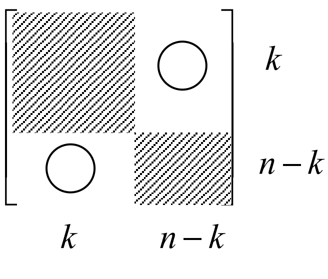
6.5.1 Không gian con bất biến

Định nghĩa 6.8: *Không gian con W của không gian V được gọi là bất biến đối với tự đồng cấu f trên V nếu $f(W)\subset W$.*

Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở của W, ta bổ sung để $\{e_1,...,e_k,e_{k+1},...,e_n\}$ là cơ sở của V. Với cơ sở này ma trận của f có dạng



Nếu $V=W_1\oplus W_2$, W_1,W_2 bất biến đối với f thì có thể chọn cơ sở để ma trận của f có dạng



6.5.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng

Định nghĩa 6.9: λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1,...,x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \text{ hay } \left(A-\lambda I\right)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.30)}$$

Khi đó $v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ là các nghiệm khác không của phương trình thuần nhất (6.29). Không gian nghiệm của (6.29) được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định nghĩa 6.10: λ *được gọi là một giá trị riêng của tự đồng cấu* f *nếu tồn tại véc tơ* $v\in V$ *:*

$$v\neq \mathbf{0} \textit{ sao cho } f(v)=\lambda v \qquad \textbf{(6.31)}$$

v *là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng* λ.

Ví dụ 6.14:

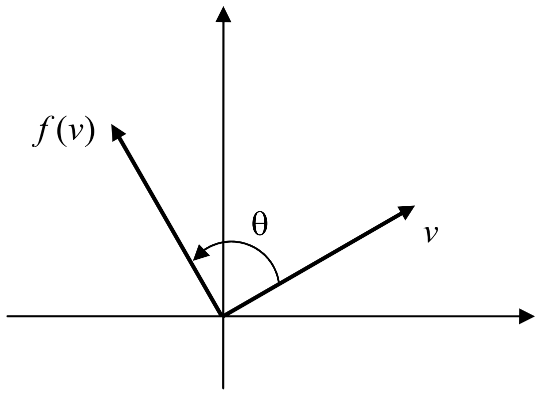
a) Xét ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_V : V\to V$.

Với mọi $v\in V$, $\mathrm{Id}_V(v)=v$.

Vậy 1 là một giá trị riêng của Id_V.

b) Phép quay góc θ (ví dụ 6.1)

$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$(x,y)\mapsto f_\theta(x,y)=(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

- Khi $\theta=0$, f_θ là ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$: chỉ có giá trị riêng là 1.
- Khi $\theta=\pi$, f_θ: chỉ có giá trị riêng là -1.
- Khi $\theta\neq 0, \pi$, f_θ không có giá trị riêng.

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y)=(3x-y,-2x+4y)$.

Dễ dàng thấy $f(x,x)=2(x,x)$. Vậy 2 là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v=(x,x)$; $x\neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng.

Định nghĩa 6.11: *Cho tự đồng cấu* f *của* V. *Với mỗi* $\lambda\in\mathbb{R}$, *ký hiệu*

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \,\middle|\, f(v) = \lambda v \right\} = \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_V \right) \tag{6.32}$$

Rõ ràng rằng V_λ là không gian con của V.

Nếu λ là giá trị riêng thì V_λ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định lý 6.15: *1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.*

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v \neq \mathbf{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

3) Vơi mọi λ, không gian con V_λ bất biến đối với f.

Chứng minh: Ta chứng minh 3)

a) Trường hợp $V_\lambda = \{\mathbf{0}\}$ là hiển nhiên.

b) Trường hợp V_λ là không gian riêng:

Với mọi $v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \Rightarrow f(v) \in V_\lambda$ ■

Nhận xét 6.4: Nếu $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\mathscr{B}$. Khi đó $v \in V$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f khi và chỉ khi $(v)_{\mathscr{B}}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của A. Nghĩa là:

$$v \in V;\, (v)_{\mathscr{B}} = (x_1, \ldots, x_n), v \neq \mathbf{0} : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

6.5.3 Đa thức đặc trưng

Định nghĩa 6.12: *A là một ma trận vuông cấp n. Định thức*

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{6.34}$$

là một đa thức bậc n của λ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

Nếu f là một tự đồng cấu trong không gian véc tơ V có ma trận $A = [f]_{\mathscr{B}}$ trong một cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó của V. Khi đó định thức

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det\left(f - \lambda \operatorname{Id}_V \right) = \det(A - \lambda I) \tag{6.35}$$

không phụ thuộc vào cơ sở của V, cũng được gọi là đa thức đặc trưng của f.

Định lý 6.16: λ_0 là giá trị riêng của A (tương ứng của f) khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A (tương ứng của f).

Chứng minh: λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $V_{\lambda_0} \neq \{\mathbf{0}\}$. Điều này tương đương với các điều sau: Ánh xạ $f - \lambda_0 \,\mathrm{Id}_V$ không đơn cấu, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (6.33) có nghiệm không tầm thường.

Vậy λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $r\left(f - \lambda_0 \,\mathrm{Id}_V\right) < n$; do đó $\det\left(f - \lambda_0 \,\mathrm{Id}_V\right) = 0$ hoặc $\det\left(A - \lambda_0 I\right) = 0$. Nghĩa là $\mathscr{P}(\lambda_0) = 0$. ■

Ví dụ 6.15: Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu trong $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (xem ví dụ 6.14-c).

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_1 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x - y = 0 \Rightarrow y = x$.

Vậy $v = (x, x) = x(1,1),\ x \neq 0$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_2 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$.

Vậy $v = (x, -2x) = x(1, -2);\ x \neq 0$.

Ví dụ 6.16: Phép quay góc θ (ví dụ 6.1, 6.14-b) $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh $f_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Đa thức đặc trưng:

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det\left(f_\theta - \lambda \,\mathrm{Id}_V\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta.$$

Do đó f_θ chỉ có giá trị riêng khi $\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$.

Định lý 6.17: *Mọi tự đồng cấu f trong không gian thực n chiều $(n \ge 1)$ đều có ít nhất một không gian con bất biến một chiều hoặc hai chiều.*

Chứng minh: Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$.

Đa thức đặc trưng $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức bậc n của λ.

- Trường hợp phương trình $\mathscr{P}(\lambda) = 0$ có nghiệm thực λ_0, theo Định lý 6.16 và Định nghĩa 6.10 tồn tại $v \ne 0$ sao cho $f(v) = \lambda_0 v$. Không gian con một chiều sinh bởi $\{v\}$ bất biến đối với f.

- Trường hợp phương trình $\mathscr{P}(\lambda) = 0$ không có nghiệm thực thì có ít nhất một nghiệm phức $\lambda_1 = a + ib$ (xem phụ lục).

Xét hệ phương trình tuyến tính phức

$$\left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.36)}$$

Rõ ràng rằng hệ phương trình này không thể có nghiệm thực, vì nếu $z_1, ..., z_n$ thực thì $A\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ thực nhưng $\lambda_1\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ phức, vô lý.

Mặt khác, vì $\det\left(A - \lambda_1 I\right) = 0$ nên hệ phương trình (6.36) tồn tại nghiệm $(z_1,..., z_n)$ không đồng thời bằng 0.

Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1, \ ... \ , z_n = x_n + iy_n$ thì:

- $x_1,..., x_n$ không thể đồng thời bằng 0 (vì nếu $x_1 = ... = x_n = 0$ thì $y_1,..., y_n$ là nghiệm thực của phương trình).
- $y_1,..., y_n$ không thể đồng thời bằng 0 (vì nếu $y_1 = ... = y_n = 0$ thì $x_1,..., x_n$ là nghiệm thực của phương trình).
- $x_1,..., x_n$ và $y_1,..., y_n$ không tỉ lệ. Thật vậy, nếu $x_1 = ky_1, \ ... \ , x_n = ky_n$ thì

$$(z_1,... , z_n) = (k+i)(y_1,..., y_n)$$

$$\left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \left[A - \lambda_1 I\right](k+i)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

điều này chứng tỏ $y_1,...,y_n$ là nghiệm thực của hệ, vô lý.

Đặt $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $u = y_1e_1 + ... + y_ne_n$, vì $x_1,...,x_n$ và $y_1,...,y_n$ không đồng thời bằng 0 và không tỉ lệ nên hệ hai véc tơ $\{v,u\}$ độc lập.

Mặt khác bằng cách đồng nhất phần thực và phần ảo của số phức ta suy ra

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vậy
$$\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases} \qquad \textbf{(6.37)}$$

Do đó $W = \text{span}\{v,u\}$ là không gian con hai chiều bất biến đối với f. ■

6.5.4 Tự đồng cấu chéo hoá được

Định nghĩa 6.13: 1) *Tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.*

Từ định nghĩa này ta thấy rằng f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f.

2) Ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Định lý 6.18: *Nếu $v_1,...,v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,...,\lambda_m$ của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh: Ta chứng minh quy nạp theo k rằng hệ $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập tuyến tính với $1 \le k \le m$.

* Khi $k = 1$ hệ một véc tơ $v_1 \ne \mathbf{0}$ là độc lập tuyến tính.

* Giả sử hệ $\{v_1,...,v_k\}$ với $1 \le k \le m-1$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1}\}$ độc lập. Thật vậy, giả sử

$$x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f(x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1x_1v_1 + ... + \lambda_kx_kv_k + \lambda_{k+!}x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (**)$$

Nhân λ_{k+1} vào (*) rồi trừ cho (**) ta được

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1v_1+...+(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_kv_k=\mathbf{0}$$

Vì $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập và các $\lambda_1,...,\lambda_m$ khác nhau từng đôi một suy ra

$$x_1=...=x_k=0 \Rightarrow x_{k+1}=0 .$$ ■

Hệ quả 6.19: *Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V (hoặc ma trận A vuông cấp n) có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được.*

Chứng minh: Vì đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt nên n véc tơ riêng tương ứng với n giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được. ■

Hệ quả 6.20: *Giả sử đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A vuông cấp n) chỉ có các nghiệm thực:*

$$\mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}...(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

với $m_1+...+m_k=n$ và các $\lambda_1,...,\lambda_k$ khác nhau từng đôi một.

Khi đó f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được khi và chỉ khi chiều của không gian riêng ứng với giá trị riêng λ_i bằng độ bội m_i của nghiệm. Nghĩa là

$$\forall\, i=1,...,k:\ \dim V_{\lambda_i}=m_i. \qquad \textbf{(6.38)}$$

Chứng minh: $(\Leftarrow)$: Trong mỗi V_{λ_i} ta chọn một cơ sở gồm m_i véc tơ. Hệ n véc tơ gộp lại từ các véc tơ của các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được.

$(\Rightarrow)$: Giả sử f chéo hoá được, khi đó tồn tại cơ sở gồm các véc tơ riêng để ma trận f có dạng chéo

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\mu_1)...(\lambda-\mu_n)$$

Suy ra các giá trị riêng $\mu_1,...,\mu_n$ phải trùng với $\lambda_1,...,\lambda_k$.

Vậy có đúng m_i giá trị riêng trong các $\mu_1,...,\mu_n$ bằng λ_i, $i=1,...,k$. Do đó có đúng m_i véc tơ riêng độc lập ứng với giá trị riêng λ_i, nghĩa là $\dim V_{\lambda_i}=m_i$. ■

6.5.5 Thuật toán chéo hoá

❖ Bài toán 1: Cho tự đồng cấu f trên không gian V. Hãy tìm cơ sở của V để ma trận f trong cơ sở này có dạng chéo.

❖ Bài toán 2: Cho ma trận A vuông cấp n. Tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Cho tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V. Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trong V và ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$ là $A=[f]_{\mathscr{B}}$. Khi đó bài toán 1 trở thành bài toán 2. Ngược lại, cho ma trận vuông A ta xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Khi đó bài toán 2 trở thành bài toán 1.

Vì vậy, để giải hai bài toán này ta cần tìm cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f và ma trận cần tìm T chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$. Vậy ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Viết đa thức đặc trưng dạng:

$$\mathscr{P}(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}...(\lambda_k-\lambda)^{m_k}Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda)$ là đa thức không có nghiệm thực.

- Nếu $m_1+\cdots+m_k<n$ (khi bậc của $Q(\lambda)\ \geq 2$): không chéo hóa được.
- Nếu $m_1+\cdots+m_k=n$ thì $\lambda_1,...,\lambda_k$ là các giá trị riêng phân biệt; tiếp tục bước 2.

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một cơ sở của không gian riêng V_{λ_i}. Các véc tơ riêng $v=x_1e_1+...+x_ne_n$ có $(x_1,...,x_n)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình thuần nhất:

$$\left[A-\lambda_i I\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \tag{6.39}$$

$\dim V_{\lambda_i}=d_i=n-r\left(A-\lambda_i I\right)$.

- Nếu $d_i<m_i$ với i nào đó, $1\leq i\leq k$ thì f không hoá chéo được.
- Nếu $d_i=m_i$, $\forall i:1\leq i\leq k$. Tiếp tục bước 3.

Bước 3: Với giá trị riêng λ_i, $i=1,...,k$ ta đã chọn được m_i véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Gộp tất cả các véc tơ này ta được hệ gồm $m_1+...+m_k=n$ véc tơ riêng độc lập, đó là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm. Ma trận T có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$.

Ví dụ 6.17: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ -8 & 0 & -3\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A: $\mathscr{P}(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 9 & 4-\lambda & 6\\ -8 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda\\ 9 & 4-\lambda & 6\\ -8 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 9 & -5-\lambda & -3\\ -8 & 8 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

A có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$ nên chéo hóa được.

*) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=-1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases}3x-y=0\\ 4x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x\\ z=-4x\end{cases}$

Do đó $v\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow v=\left(x,3x,-4x\right)=x(1,3,-4)$ chọn $e'_1=(1,3,-4)$.

**) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq\mathbf{0}$ ứng với giá riêng $\lambda_2=1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases}x-y=0\\ 2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x\\ z=-2x\end{cases}$

Do đó $v \in V_{\lambda_2} \Leftrightarrow v = (x, x, -2x) = x(1,1,-2)$ chọn $e'_2 = (1,1,-2)$.

***) Giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ta có $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \dfrac{-4}{3}x \end{cases}$

Do đó $v \in V_{\lambda_3} \Leftrightarrow v = \left(x, -x, \dfrac{-4}{3}x \right) = \dfrac{x}{3}(3,-3,-4)$ chọn $e'_3 = (3,-3,-4)$.

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Đặt $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ thì $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 6.18</u>: Xét tự đồng cấu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Ma trận chính tắc của f: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

có hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x+y \quad =0 \\ \quad\quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$

$v=(-y,y,0)=y(-1,1,0)$ chọn $e'_1=(-1,1,0)$.

**) Giá trị riêng $\lambda_2=1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x-y=0$, z tuỳ ý.

$v=(x,x,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1)$ chọn $e'_2=(1,1,0)$, $e'_3=(0,0,1)$.

Chọn cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$; $f(e'_1)=5e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$, $f(e'_3)=e'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A'=[f]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 6.19</u>: Cho tự đồng cấu $f:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ có công thức xác định ảnh

$$f(a_0+a_1t+a_2t^2)=(-a_0+a_1+a_2)+(a_0-a_1+a_2)t+(a_0+a_1-a_2)t^2.$$

Tìm một cơ sở của $\mathbf{P}_2$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Ma trận chính tắc của f: $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=-2$ (kép).

*) Véc tơ riêng $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với: $\begin{cases} -a_0 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_0 = a_1 \end{cases}$

$p \in V_{\lambda_1} \Leftrightarrow p = a_0 + a_0 t + a_0 t^2 = a_0(1 + t + t^2)$ chọn $p'_1 = 1 + t + t^2$.

**) Véc tơ riêng $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ là nghiệm khác không của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

$p \in V_{\lambda_2} \Leftrightarrow p = -a_1 - a_2 + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(-1 + t) + a_2(-1 + t^2)$.

Chọn $p'_2 = -1 + t$, $p'_3 = -1 + t^2$.

Xét cơ sở $\mathscr{B}' = \{p'_1, p'_2, p'_3\}$; $f(p'_1) = p'_1$, $f(p'_2) = -2p'_2$, $f(p'_3) = -2p'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A' = [f]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

<u>**Ví dụ 6.20**</u>: Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1-\lambda & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 .$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1$ (kép) và $\lambda_2 = 3$.

Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Biến đổi ta được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow v = \left(x, 2x, x\right) = x(1,2,1)$$

Không gian riêng $V_{\lambda_2} = \left\{ x(1,2,1) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ có $\dim V_{\lambda_2} = 1 < 2$ nên ma trận A không chéo hoá được.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

6.1) Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f(x, y) = (2x, x + y)$ b) $f(x, y) = (x^2, y)$

c) $f(x, y) = (y, x)$ d) $f(x, y) = (x, y + 1)$

e) $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ f) $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

6.2) Ánh xạ $f : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$ b) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

c) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d + 1$ d) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + d^2$.

6.3) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(1,0,0) = (1,1),\ f(0,1,0) = (3,0),\ f(0,0,1) = (4,-7).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của f.

b) Tính $f(1,3,8)$, $f(x, y, z)$.

6.4) Chứng minh mọi ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ đều có dạng:

$$f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$$

Hãy tổng quát hoá đối với ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

6.5) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix}$:

a) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Ker} f$: $(5,10);(3,2);(1,1)$.

b) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Im} f$: $(1,-4);(5,0);(-3,12)$.

6.6) a) Chứng minh rằng tập $\mathcal{M}$ các ma trận vuông cấp hai có dạng $\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ là không gian con của $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp hai. Tìm một cơ sở của $\mathcal{M}$.

b) Chứng minh ánh xạ $f:\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a+c & b\\ b & a+b+c\end{bmatrix}$ là một tự đồng cấu tuyến tính của $\mathcal{M}$. Tìm nhân và ảnh của f.

6.7) Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận ứng với cơ sở $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ là

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4\}$.

6.8) Viết ma trận chính tắc, tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ của các ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sau:

a) $f(x,y,z)=(x-y+3z,5x+6y-4z,7x+4y+2z)$

b) $f(x,y,z)=(2x-z,-x+2z,0)$

c) $f(x,y,z)=(2x+2y-8z,x+6y+z,3x+6y-9z,x+5y)$

d) $f(x,y,z,t)=(x+4y+5z+9t,3x-2y+z-t,-x-y-t,2x+3y+5z+8t)$.

6.9) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{v_1,v_2,v_3\}$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$.

6.10) a) Chứng tỏ $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,5,3)$, $v_3 = (1,0,10)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(v_1) = (1,0)$, $f(v_2) = (1,0)$, $f(v_3) = (0,1)$. Tìm công thức xác định ảnh $f(x, y, z)$.

6.11) Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, 2x)$ và đa thức $p(t) = 3 - 2t + t^2$. Tìm $p(f)(x, y)$.

6.12) Cho $D : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ là toán tử lấy đạo hàm. Cho đa thức $p(t) = -5 + 2t + t^2$. Tìm $p(D)(q(t))$, trong đó $v(x) \in \mathbf{P}_2$, $q(t) = at^2 + bt + c$.

6.13) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ trong cơ sở $\mathscr{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$; $q_1 = 3t + 3t^2$, $q_2 = -1 + 3t + 2t^2$, $q_3 = 3 + 7t + 2t^2$.

a) Tìm tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ ảnh của các vectơ của cơ sở $\mathscr{B}$:

$$[f(q_1)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_2)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_3)]_{\mathscr{B}}.$$

b) Tìm $f(q_1)$, $f(q_2)$, $f(q_3)$.

c) Tìm $f(1 + t^2)$.

6.14*) a) Với hai ma trận cùng cấp bất kỳ A, B chứng minh: $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

b) Với hai ma trận vuông cấp n bất kỳ A, B, chứng minh bất đẳng thức Sylvester:

$$r(A) + r(B) - n \le r(AB) \le \min(r(A), r(B)).$$

6.15*) Với ba ma trận vuông cấp n bất kỳ A, B, C; chứng minh bất đẳng thức Frobenius: $r(AB) + r(BC) \le r(B) + r(ABC)$.

6.16*) Giả sử A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^2 = I$. Chứng minh:

$$r(A + I) + r(A - I) = n$$

6.17*) Giả sử A, B là hai ma trận có cỡ lần lượt $m \times n, n \times p$.

a) Chứng minh rằng các vectơ có dạng $(BX)^t$, với $X^t \in \mathbb{R}^p$, thoả mãn điều kiện $ABX = 0$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều bằng $r(B) - r(AB)$.

b) Chứng minh rằng $r(A) = r(B)$ khi và chỉ khi $ABX = 0 \Rightarrow BX = 0$.

6.18) Ma trận A vuông cấp n được gọi là luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$. Chứng minh rằng A luỹ linh khi và chỉ khi $A^n = 0$.

6.19) Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Tự đồng cấu f thỏa mãn $f(e_1)=0$, $f(e_2)=a_{21}e_1$, $f(e_3)=a_{31}e_1+a_{32}e_2$, ... , $f(e_n)=a_{n1}e_1+\cdots+a_{n,n-1}e_{n-1}$. Chứng minh rằng $f^n=0$.

6.20) Tìm định thức của các tự đồng cấu sau:

a) f là tự đồng cấu của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(2x-z,x+2y-4z,3x-3y+z).$$

b) f là tự đồng cấu của không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2 xác định bởi:

$$f(A)=MA \text{ trong đó } A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

6.21*) Giả sử $f:V\to W$ là đồng cấu tuyến tính:

a) Chứng minh rằng f toàn cấu khi và chỉ khi tồn tại đồng cấu $g:W\to V$ sao cho $f\circ g=\mathrm{Id}_W$.

b) Chứng minh rằng f đơn cấu khi và chỉ khi tồn tại đồng cấu $h:W\to V$ sao cho $h\circ f=\mathrm{Id}_V$.

6.22*) Cho ba không gian vectơ V_1,V_2,V_3:

a) Giả sử $f:V_1\to V_2$, $g:V_1\to V_3$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh: $\mathrm{Ker}\,f\subset\mathrm{Ker}\,g$ khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ tuyến tính $h:V_2\to V_3$ sao cho $g=h\circ f$.

b) Giả sử $f:V_2\to V_3$, $g:V_1\to V_3$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh: $\mathrm{Im}\,f\supset\mathrm{Im}\,g$ khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ tuyến tính $h:V_1\to V_2$ sao cho $g=f\circ h$.

6.23*) Giả sử A,B là hai ma trận vuông cấp n sao cho với mọi ma trận cột X thì $AX=0\Rightarrow BX=0$. Chứng minh tồn tại ma trận C cấp n sao cho $B=CA$.

6.24*) Giả sử W_1,W_2 là hai không gian vectơ con của V. Chứng minh rằng hai tính chất sau tương đương:

(i) Tồn tại tự đồng cấu f của V sao cho $\mathrm{Im}\,f=W_1$, $\mathrm{Ker}\,f=W_2$.

(ii) Tồn tại một phần bù W_3 của W_2 trong không gian vectơ V sao cho W_3 đẳng cấu với W_1.

6.25*) Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ tuyến tính $g:W\to V$ sao cho $f\circ g\circ f=f$ và $g\circ f\circ g=g$.

6.26*) Tìm các giá trị riêng, cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

6.27) Giả sử $D: V \to V$ là toán tử vi phân, nghĩa là $D(v) = \dfrac{dv}{dt}$. Tính định thức $\det(D)$ (Tìm đa thức đặc trưng , trang 204, 9.13, 9.3) trong các trường hợp sau:

a) V là không gian véc tơ sinh bởi $\{1, t, ..., t^n\}$.

b) V là không gian véc tơ sinh bởi $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$.

c) V là không gian véc tơ sinh bởi $\{\sin t, \cos t\}$.

6.28) Chứng tỏ rằng các ma trận sau không chéo hoá được:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

6.29) Chéo hóa hai ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

6.30) Tìm ma trận P làm chéo hoá A và xác định $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$

6.31) Trong mỗi trường hợp sau tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ánh xạ tuyến tính f có ma trận dạng chéo:

a) $f(x,y,z) = (x-y, 2x+3y+2z, x+y+2z)$

b) $f(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$

c) $f(x,y,z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$

d) $f(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$.

6.32) Tìm đa thức đặc trưng và các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

6.33) Chứng minh rằng A và A^t có cùng đa thức đặc trưng.

6.34) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu tuyến tính của không gian vectơ V thoả mãn $f \circ g = g \circ f$. Chứng minh $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ bất biến đối với g.

6.35) Cho $B = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận A thỏa mãn $B = A^3$.

6.36) Cho đa thức $p(t)$ bất kỳ. Chứng minh rằng :

a) $p(A^t) = p(A)^t$. b) $p(P^{-1}AP) = P^{-1}p(A)P$.

c) Nếu $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_1 & a & \cdots & b \\ 0 & a_2 & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ thì $p(A), p(B)$ có dạng:

$$p(A) = \begin{bmatrix} p(a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(a_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(a_n) \end{bmatrix}, \; p(B) = \begin{bmatrix} p(a_1) & x & \cdots & y \\ 0 & p(a_2) & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(a_n) \end{bmatrix}$$

6.37) Giả sử f_i là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian vectơ con W_i, $i=1,...,n$ và $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$. Với mọi $v \in V$, tồn tại cách viết duy nhất $v = v_1 + ... + v_n$, trong đó $v_1 \in W_1,..., v_n \in W_n$. Đặt $f(v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_i)$. Chứng minh f là tự đồng cấu tuyến tính của V và: $\operatorname{Ker} f = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$, $\operatorname{Im} f = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$.

6.38*) $p(t) = t^{100} + t^2 - 1$ và ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Tính $\det p(A)$.

6.39*) Cho $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. Ký hiệu $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]_{3\times 3}$. Tìm $\lim_{n\to\infty} a_{ij}(n)\,; i,j = 1,2,3$.

6.40*) Tìm điều kiện cần và đủ đối với các phần tử a,b,c,d để ma trận $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ chéo hoá được.

6.41*) Giả sử tự đồng cấu tuyến tính f của không gian vectơ n chiều V có n giá trị riêng phân biệt. Chứng minh rằng nếu tự đồng cấu g của không gian vectơ V giao hoán với f (nghĩa là $f \circ g = g \circ f$) thì g chéo hoá được.

6.42*) Cho tự đồng cấu tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc có dạng $A = \left[a_{ij}\right]$ với $a_{ij} = 0$ nếu $1 \le i,j \le p$ hay $p+1 \le i,j \le n$. Chứng minh rằng nếu λ là giá trị riêng của f thì $-\lambda$ cũng là giá trị riêng của f.

6.43*) Cho tự đồng cấu tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc có dạng $A = \left[a_{ij}\right]$ với $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i+1 < j \\ 1 & \text{nếu } j = i+1 \\ 0 & \text{nếu } i = j = 2,...,n \\ \text{nhận giá trị tuỳ ý trong các trường hợp khác} \end{cases}$

a) Đặt $v = e_n = (0,...,0,1)$. Chứng minh $\left\{v, f(v), ..., f^{n-1}(v)\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng nếu f chéo hoá được thì các giá trị riêng của f khác nhau từng đôi một.

6.44*) Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g: V \to W$. Chứng minh:

$$r(f+g)=r(f)+r(g)\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g=\{\mathbf{0}\}\\ \operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g=V\end{cases}$$

6.45*) Cho ma trận A vuông cấp n phản đối xứng. Chứng minh $I_n + A$ khả nghịch.

6.46*) Cho $V = W_1 \oplus W_2$, với mọi $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, $v_i \in W_i$ xét ánh xạ $p: V \to V$, $p(v) = v_1$: phép chiếu lên W_1 song song với W_2.

a) Chứng minh $p\circ p = p$, $\operatorname{Im} p = W_1$, $\operatorname{Ker} p = W_2$.

b) Ngược lại, nếu $p: V\to V$, $p\circ p = p$ thì p là phép chiếu lên $\operatorname{Im} p$ song song $\operatorname{Ker} p$.

6.47) a) Giả sử v là một véc tơ riêng của hai tự đồng cấu f, g. Chứng minh rằng v cũng là véc tơ riêng của $af + bg$, với mọi hằng số a, b.

b) Nếu λ là một giá trị riêng của tự đồng cấu f thì $p(\lambda)$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $p(f)$, trong đó $p(t)$ là một đa thức.

6.48) Chứng minh rằng A và A^t có cùng các giá trị riêng. Cho ví dụ chứng tỏ A và A^t có các véc tơ riêng khác nhau.

6.49) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu thỏa mãn $f\circ g = g\circ f$. Giả sử W là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ của f. Chứng minh rằng W bất biến đối với g.

6.50) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu chéo hóa được và thỏa mãn $f\circ g = g\circ f$. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở gồm các véc tơ riêng đồng thời của f và g.

6.51) Định lý Cayley-Hamilton: Gọi $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức đặc trưng của A, chứng minh rằng $\mathscr{P}(A) = 0$.

6.52) Với đa thức bất kỳ $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, ma trận vuông cấp n sánh đôi với $p(t)$ có dạng $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng $p(A) = 0$.

6.53) Cho tự đồng cấu $f: V \to V$. Giả sử tồn tại $v \in V$ sao cho $f^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$ và $f^k(v) = \mathbf{0}$. Đặt $S = \{v, f(v), ..., f^{k-1}(v)\}$; $W = \operatorname{span} S$. Chứng minh rằng:

i) Hệ S độc lập tuyến tính.

ii) Không gian véc tơ con W bất biến đối với f.

iii) Thu hẹp của f vào không gian véc tơ con W : $\widetilde{f} = f\big|_W$ là lũy linh.

iv) Tìm ma trận của $\widetilde{f}$ trong cơ sở $\left\{f^{k-1}(v), ..., f(v), v\right\}$ của W .

6.54*) Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng: $\left|A - \lambda I\right| = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + C_2(-\lambda)^{n-2} + ... + C_n$, trong đó C_k là tổng tất cả các định thức con chính bậc k của A (định thức con chính là định thức con có các chỉ số hàng và chỉ số cột bằng nhau).