CHƯƠNG V

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ phương trình tuyến tính là bài toán thường gặp phải khi nghiên cứu các hệ tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta xấp xỉ bởi hệ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

Nhờ sự hỗ trợ của công nghệ thông tin, các bài toán hệ phương trình tuyến tính ngày càng được ứng dụng rộng rãi hơn. Có thể chỉ ra đây một vài bài toán dạng này:

- Sự phân phối dòng điện trong những sơ đồ có nhiều ghép nối.
- Giải gần đúng những bài toán của lý thuyết thế vị.
- Giải gần đúng một vài bài toán trong các vấn đề bức xạ điện từ.
- Sự phân phối vận tốc các dòng nước trong các hệ thuỷ lực học phức tạp.
- Ứng dụng phân tích thống kê vào tâm lý học, xã hội học và kinh tế học.
- Chuỗi Markov, phân bố dừng của chuỗi Markov ứng dụng trong bài toán chuyển mạch của tổng đài ...

Hệ phương trình tuyến tính đã được biết đến rất sớm. Ở Trung Quốc người ta tìm thấy một cuốn sách có khoảng từ năm 500 trước công nguyên, trong đó có những chỉ dẫn về việc dùng một bàn tính để giải các hệ phương trình tuyến tính qua các ví dụ cụ thể. Phương pháp giải này chính là thuật toán khử Gauss. Ở châu Âu thuật toán này đã được mô tả trong công trình của Buteo (Pháp) năm 1550, trước Gauss hơn hai thế kỷ. Một phương pháp khác để giải hệ phương trình tuyến tính là sử dụng định thức của Cramer.

Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên để giải các bài toán nêu ra ở trên ta thường phải khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nổi hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế. Mùa hè năm 1949, Giáo sư Wassily Leontief trường Đại học HarVard đã gửi đến Trung tâm tính toán của trường Đại học Mark II đề nghị giải hệ phương trình tuyến tính gồm 500 phương trình với 500 ẩn biểu diễn các chỉ tiêu kinh tế của Mỹ. Mark II là một trong những trung tâm máy tính điện tử lớn nhất thời bấy giờ cũng không giải quyết được. Leontief buộc phải đưa bài toán về hệ 45 phương trình với 45 ẩn. Với kết quả này Leontief nhận được giải Nobel kinh tế năm 1973, ông ta được xem là người mở cánh cửa vào kỹ nguyên mới về các mô hình toán học về kinh tế.

Một hệ phương trình tuyến tính có thể viết dưới dạng ma trận, dưới dạng một véc tơ là một tổ hợp tuyến tính của một hệ các véc tơ khác hoặc biểu thức toạ độ của một ánh xạ tuyến tính (chương 6).

Nếu ta ký hiệu các hệ số của hệ m phương trình có n ẩn thành một ma trận cỡ $m\times n$, các ẩn thành ma trận cột $n\times 1$, các hệ số vế sau thành ma trận cột $m\times 1$ thì hệ phương trình đã cho có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Với cách biểu diễn này ta thấy nếu ma trận các hệ số khả nghịch thì hệ phương trình có duy nhất nghiệm (hệ Cramer).

Nếu ta xét $n+1$ véc tơ có m thành phần trong đó n véc tơ đầu là các hệ số ứng với các ẩn còn véc tơ thứ $n+1$ là hệ số của vế sau của hệ phương trình. Khi đó hệ phương trình được biểu diễn dưới dạng véc tơ, vế sau là một tổ hợp tuyến tính của n véc tơ các hệ số. Với cách biểu diễn này thì hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi véc tơ vế sau thuộc vào không gian con sinh bởi n véc tơ của các hệ số.

Điều này cho thấy ta có thể giải quyết một bài toán hệ phương trình tuyến tính bằng ma trận, bằng biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính. Điều kiện tồn tại nghiệm liên quan đến hạng của hệ véc tơ hoặc tập ảnh của ánh xạ tuyến tính ... và ngược lại. Vì vậy khi học chương này đòi hỏi học viên thấy được mối liên hệ giữa các khái niệm trên để giải quyết bài toán một cách linh hoạt. Học viên cần nắm vững và vận dụng thành thạo hai phương pháp: phương pháp Cramer và phép khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp Cramer sử dụng định thức để giải hệ phương trình, khi Cramer đưa ra quy tắc này thì nó trở thành "mốt" trong các công trình về toán ứng dụng trong một thời gian dài. Tuy nhiên phương pháp khử của Gauss đôi khi tỏ ra đơn giản hơn. Giải bài toán theo phương pháp khử của Gauss là sử dụng các phép biến đổi tương đương lên các phương trình của hệ để đưa hệ phương trình cần giải về hệ tương đương đơn giản hơn mà ta dễ dàng tìm được nghiệm. Thực chất của phương pháp này là sử dụng các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận hệ số của hệ phương trình.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên quan đến nhân của ánh xạ tuyến tính được khảo sát trong chương 6, Tập hợp nghiệm của hệ phương trình thuần nhất là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$ (định lý 5.4).

5.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \textbf{(5.1)}$$

Hoặc viết tắt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,...,m$

trong đó $x_1, x_2,..., x_n$ là n ẩn,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là *thuần nhất*.

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(x_1, x_2,..., x_n)$ sao cho khi thay vào (5.1) ta có các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ.

Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

5.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (5.1) ta xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.2)}$$

A, B, X lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận vế sau và ma trận ẩn. Khi đó hệ phương trình (5.1) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$AX = B \quad \textbf{(5.3)}$$

5.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i},..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1,..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, thì hệ (5.1) được viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b \quad \textbf{(5.4)}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $b \in \operatorname{span}\{v_1,...,v_n\}$.

Ví dụ 5.1: Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Hệ phương trình viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Xét các véc tơ $v_1 = (2,4,8)$, $v_2 = (2,3,5)$, $v_3 = (-1,-1,-3)$, $v_4 = (1,2,4)$; $b = (4,6,12)$. Hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12).$$

5.2 ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 5.1: (Kronecker-Kapelli) Hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\tilde{A})$ trong đó $\tilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$r(A) = r(\tilde{A});\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{5.5}$$

Chứng minh: Hệ (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$. Nghĩa là $b \in \operatorname{span}\{v_1,...,v_n\}$ (b biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,...,v_n\}$). Vậy $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_n,b)$. Do đó $r(A) = r(\tilde{A})$. ■

Ví dụ 5.2: Hệ phương trình trong ví dụ 5.1 có ma trận hệ số $A=\begin{bmatrix}2&2&-1&1\\4&3&-1&2\\8&5&-3&4\end{bmatrix}$, ma trận bổ sung cột cuối $\widetilde{A}=\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\4&3&-1&2&6\\8&5&-3&4&12\end{bmatrix}$.

Hạng $r(A)=r(\widetilde{A})=3$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

5.3 PHƯƠNG PHÁP CRAMER

5.3.1 Hệ Cramer và cách giải

Định nghĩa 5.2: *Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A không suy biến được gọi là hệ Cramer.*

Định lý 5.2: *Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm.*

Cụ thể hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i=1,...,n$ có nghiệm $x_i = D_i/D$, $i=1,...,n$;

trong đó

$$D=\det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_n\}$$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1},b,v_{i+1},...,v_n\} \quad \textbf{(5.6)}$$

D_i là định thức của hệ các véc tơ cột là các cột hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

Chứng minh: $\det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1,...,v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,...,v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1,x_2,...,x_n$ sao cho $x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n=b$.

Gọi $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1},b,v_{i+1},...,v_n\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},\sum_{k=1}^{n}x_kv_k,v_{i+1},...,v_n\right\}$$

$$= x_iD_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_n\} = x_iD \Rightarrow x_i = D_i/D,\ i=1,...,n. \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 5.3: Hệ phương trình $\begin{cases}2x+3y-z=1\\3x+5y+2z=8\\x-2y-3z=-1\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-1\\3&5&2\\1&-2&-3\end{vmatrix}=22,\ D_x=\begin{vmatrix}1&3&-1\\8&5&2\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=66,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&8&2\\1&-1&-3\end{vmatrix}=-22,\ D_z=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&5&8\\1&-2&-1\end{vmatrix}=44.$$

Do đó hệ có nghiệm $x=3,\ y=-1,\ z=2$.

5.3.2 Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát

Giả sử hệ phương trình có nghiệm và $r(v_1,...,v_n)=r(v_1,...,v_n,b)=r(v_1,...,v_p)$; $p\le n$ (trong trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự). Với giả thiết này p véc tơ hàng phía trên của A tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của A. Vì vậy hệ (5.1) tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \text{...}\\a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pn}x_n=b_p\end{cases}$$

Giả sử $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1p}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p1}&\cdots&a_{pp}\end{vmatrix}\ne 0$ (trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1p}x_p=b_1-a_{1p+1}x_{p+1}-...-a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2p}x_p=b_2-a_{2p+1}x_{p+1}-...-a_{2n}x_n\\ \text{...}\\a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pp}x_p=b_p-a_{pp+1}x_{p+1}-...-a_{pn}x_n\end{cases}$$

đây là hệ Cramer có vế sau phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$.

Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $x_{p+1},...,x_n$; các ẩn $x_{p+1},...,x_n$ nhận giá trị tùy ý.

Ví dụ 5.4: Giải và biện luận theo tham số λ hệ $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1\\x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1\end{cases}$

Từ ví dụ 4.14 chương 4 ta có $\det A = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$.

♦ Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi, do đó hệ có nghiệm:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \implies x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}.$$

♦ Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý.

♦ Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4$ (theo Ví dụ 4.23 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\tilde{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow r(\tilde{A}) = 4 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm.}$$

5.4 PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Định lý 5.3: *Hệ Cramer* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, n$ *có nghiệm dưới dạng ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B. \quad \textbf{(5.7)}$$

Ví dụ 5.5: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$, do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo công thức (5.7).

Từ Ví dụ 4.22 có $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Vậy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a+16b+9c \\ 13a-5b-3c \\ 5a-2b-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}$.

<u>Nhận xét 5.1</u>: Từ công thức đổi tọa độ (3.13), công thức (4.25) về ma trận chuyển cơ sở và từ ví dụ 5.5 ta thấy:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \forall i = 1,...,n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}b_j = x_i, \forall i = 1,...,n \end{cases} \text{ và } A = \left[a_{ij} \right] \text{ thì } A^{-1} = \left[c_{ij} \right] \tag{5.8}$$

5.5 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ thì sẽ được hệ mới tương đương:

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp (có thể đổi chỉ số các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (5.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \,;\; i = 1,...,m .$$

về hệ tương đương

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x'_j = b'_i \,;\; i = 1,...,m .$$

Các ẩn $x'_1,...,x'_n$ là các ẩn $x_1,...,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số và ma trận bổ sung của hệ mới có dạng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & b'_1 \\ \bigcirc & a'_{pp} & \cdots & b'_p \\ \hline & & & b'_{p+1} \\ \bigcirc & & \bigcirc & b'_m \end{array}\right] \tag{5.9}$$

trong đó $a'_{11}...a'_{pp} \neq 0$.

♦ Nếu một trong các $b'_{p+1},...,b'_m$ khác 0 thì tồn tại phương trình mà vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.

♦ Nếu $b'_{p+1} = ... = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad ... \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \quad ... \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad .... \\ \qquad a'_{p1}x'_1 + ... + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \qquad \textbf{(5.10)}$$

Ta có thể tìm các nghiệm $x'_1,...,x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1},...,x'_n$.

Chú ý rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số trong các phương trình. Vì vậy trong thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về ma trận có dạng (5.9) và giải hệ phương trình (5.10) từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

<u>Ví dụ 5.6</u>: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$. (xem ví dụ 5.5)

Ma trận bổ sung hệ số $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các biến đổi tương đương ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và cũng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

Ví dụ 5.7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Ví dụ 5.8: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 5x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 9 \\ mx_4 = 1 \end{cases}$

♦ Khi $m = 0$: hệ vô nghiệm;

♦ Khi $m \neq 0$: hệ có vô số nghiệm

$$x_4=\frac{1}{m}\ ,\ x_2=\frac{9m-16}{5m}-\frac{8}{5}x_3,\ x_1=\frac{4-m}{5m}-\frac{3}{5}x_3;\ x_3 \text{ tùy ý.}$$

Ví dụ 5.9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 \qquad = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + \qquad x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = -2 \\ \quad x_2 \qquad - 3x_4 \qquad = 2 \\ \qquad\quad x_3 - 3x_4 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad 2x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$ suy ra nghiệm $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 + 3x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_4 \\ x_5 = -1 - 2x_4;\ x_4 \text{ tuỳ ý} \end{cases}$

5.6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5.11)}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.11) có ít nhất nghiệm tầm thường $x_1 = ... = x_n = 0$. Điều kiện tồn tại nghiệm (5.5) luôn thỏa mãn $r(\tilde{A}) = r(A) \le n$.

Nhận xét 5.2: Vế sau của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

Ví dụ 5.10: Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases};\ x_3, x_4 \text{ tùy ý.}$$

Định lý 5.5:

a) Hệ (5.11) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

b) Nếu $r(A) = p < n$ thì tập hợp nghiệm của hệ (5.11) là không gian con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Ta chứng minh b). Thực hiện các biến đổi tương đương lên ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về hệ tương đương với ma trận bổ sung có dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & \ddots & * & * & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.12)}$$

Suy ra nghiệm có dạng $\begin{cases} x'_1 = c_{11}x'_{p+1} + \ ... \ + c_{1n-p}x'_n \\ .... \\ x'_p = c_{p1}x'_{p+1} + \ ... \ + c_{pn-p}x'_n \end{cases}$

trong đó $(x'_1, ..., x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1, ..., x_n)$.

Để đơn giản trong cách trình bày ta giả sử $x'_1 = x_1, ..., x'_n = x_n$ (trường hợp khác được chứng minh tương tự), khi đó tập hợp nghiệm:

$$\left\{ (c_{11}x_{p+1} + ... + c_{1n-p}x_n, ..., c_{p1}x_{p+1} + ... + c_{pn-p}x_n, x_{p+1}, ..., x_n) \middle| x_{p+1}, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$=\left\{(c_{11},...,c_{p1},1,0,...,0)x_{p+1}+...+(c_{1n-p},...,c_{pn-p},0,0,...,1)x_n \,\middle|\, x_{p+1},...,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

là không gian con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

<u>Ví dụ 5.11</u>: Tập $W_2=\left\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x-3y+4z=0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$ có chiều $\dim W_2=3-1=2$ (xem ví dụ 2.7).

<u>Ví dụ 5.12</u>: Đặt V_1, V_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases}4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\5x_1+7x_2+2x_3\qquad\quad=0\end{cases},\quad (II)\begin{cases}2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0\\3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0\end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con V_1, V_2, $V_1\cap V_2$. Suy ra số chiều của V_1+V_2.

Giải: Giải hệ phương trình (I) :

$$\begin{bmatrix}4&5&-2&3\\3&5&6&-4\\5&7&2&0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\3&5&6&-4\\1&2&4&-3\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\0&5&30&-25\\0&2&12&-10\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=8x_3-7x_4\\x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}$$

$$v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in V_1\Leftrightarrow v=(8x_3-7x_4,-6x_3+5x_4,x_3,x_4)=x_3(8,-6,1,0)+x_4(-7,5,0,1)$$

$$V_1=\left\{x_3(8,-6,1,0)+x_4(-7,5,0,1) \,\middle|\, x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

Tương tự, từ ví dụ 5.10 ta có

$$V_2=\left\{x_3(3,1,1,0)+x_4(-2,-2,0,1) \,\middle|\, x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

$V_1\cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình

$$\begin{cases}4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\5x_1+7x_2+2x_3\qquad\quad=0\\2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0\\3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm: $x_1=-x_2=x_3=x_4$; x_4 tùy ý.

$$\Rightarrow V_1\cap V_2=\left\{x_4(1,-1,1,1) \,\middle|\, x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 3$.

Ví dụ 5.13: Cho hệ phương trình thuần nhất có n phương trình $n+1$ ẩn :

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0;\, i = 1,...,n. \qquad \textbf{(5.13)}$$

Đặt D_j là định thức của ma trận vuông cấp n có được bằng cách xóa cột thứ j, $j = 1,...,n+1$ của ma trận hệ số $A = \left[a_{ij} \right]_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n+1}}}$.

Nếu tồn tại $D_{j_0} \neq 0$ thì không gian nghiệm của (5.13) có chiều bằng 1 và có dạng

$$\left\{ t\left(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Giải: Xét định thức cấp $n+1$:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_j & \cdots & y_{n+1} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo hàng thứ nhất ta được:

$$D = (-1)^2 y_1 D_1 + y_2 (-1)^3 D_2 + \cdots + y_j (-1)^{j+1} D_j + \cdots + y_{n+1} (-1)^n D_{n+1}.$$

Với mỗi $i = 1,...,n$: thay $y_1 = a_{i1}$, $y_2 = a_{i2}$, $\ldots$, $y_{n+1} = a_{i,n+1}$ thì định thức D tương ứng bằng 0 (vì hàng thứ 1 và hàng thứ $i+1$ bằng nhau). Điều này chứng tỏ

$$(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1})$$

là một nghiệm khác không của hệ phương trình (5.13).

Mặt khác tồn tại $D_j \neq 0$ do đó không gian nghiệm có chiều bằng 1. Vậy tập nghiệm có dạng

$$\left\{ t\left(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Định lý 5.6: *Giả sử $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.1). Khi đó $(x_1, ..., x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (5.11) khi và chỉ khi $(x_1 + \overline{x}_1, ..., x_n + \overline{x}_n)$ là nghiệm của phương trình (5.1).*

Cho $W \subset \mathbb{R}^n$, $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$; ký hiệu

$$(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W=\left\{(\overline{x}_1+x_1,...,\overline{x}_n+x_n)\middle|(x_1,...,x_n)\in W\right\} \quad \textbf{(5.15)}$$

Định lý 5.6 có thể viết lại:

Giả sử $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ là một nghiệm của (5.1); khi đó

W là tập nghiệm của (5.11) khi và chỉ khi $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W$ là tập nghiệm của (5.1).

Ví dụ 5.14: Giải và biện luận theo tham số a,b hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=1 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=1 \end{cases}$$

Giải: Hệ có một nghiệm riêng $\overline{x}_1=1$, $\overline{x}_2=0$, $\overline{x}_3=0$.

Ma trận hệ số $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$.

- Trường hợp $a=b$: $r(A)=1$, hệ phương trình tương đương với một phương trình do đó có vô số nghiệm $x_1=1-ax_2-a^2x_3$; x_2, x_3 tùy ý.
- Trường hợp $a\neq b$: $r(A)=2$. Theo ví dụ 5.12 không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng có chiều bằng 1 và có dạng $\left\{t\left(D_1,-D_2,D_3\right)\middle|t\in\mathbb{R}\right\}$.

$$D_1=\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=ab(b-a),\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix}=(a+b)(b-a),\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}=b-a.$$

Vậy không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng:

$$\left\{t(b-a)\left(ab,-(a+b),1\right)\middle|t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x_1=1+abt \\ x_2=-(a+b)t. \\ x_3=t;\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1) Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3+5x_4=4 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$

5.2) Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

5.3) Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

5.4) Chứng minh hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi $a \neq 0, b, c, d$.

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

5.5*) Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + ... + nx_1 = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + ... + nx_{n-1} = n \end{cases}$

5.6) Xác định các giá trị của tham số m sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + my - z = -2 \\ x - 3z = -3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + 8z = 3 \end{cases}$

i) Vô nghiệm.

ii) Có nhiều hơn 1 nghiệm.

iii) Có duy nhất nghiệm.

5.7) Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - 2y + 4z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

5.8*) Chứng minh rằng hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm

$$\begin{cases} 1/2\, x_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ 1/2\, x_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1/2\, x_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{trong đó } a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

5.9) Véc tơ $v = (3, 9, -4, -2)$ có thuộc không gian sinh bởi các véc tơ:

$$u_1 = (1, -2, 0, 3),\ u_2 = (2, 3, 0, -1) \text{ và } u_3 = (2, -1, 2, 1).$$

5.10) Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận X, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.11) Giả sử U, W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4 \right\}.$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con U, W, $U \cap W$. Suy ra số chiều của $U+W$.

5.12) Đặt V_1, V_2 lần lượt là hai không gian nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases}4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\5x_1+7x_2+2x_3 \qquad\quad =0\end{cases},\quad (II)\begin{cases}2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0\\3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0\end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$. Suy ra số chiều của V_1+V_2.

5.13) Tìm hệ phương trình thuần nhất có không gian nghiệm W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ: $\{(1,-2,0,3), (1,-1,-1,4), (1,0,-2,5)\}$.

5.14) Tìm hệ phương trình thuần nhất có không gian nghiệm W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$ sinh bởi hệ véc tơ: $\{(1,-2,0,3,-1), (2,-3,2,5,-3), (1,-2,1,2,-2)\}$.

5.15) Tìm ma trận X vuông cấp 2 thỏa mãn phương trình.

$$X^2-2X=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 6 & 3\end{bmatrix}.$$

5.16*) Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) Bộ số $(1993, 1994, ..., \ 2003)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2) Khi xoá cột thứ j trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng $j\,(j=1,\ 2,\ ...,\ 11)$.

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

5.17) Cho hệ phương trình gồm n phương trình n ẩn:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad (1)$$

a) Giả sử hệ phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường. Chứng minh rằng hệ phương trình (1) có duy nhất nghiệm đối với mọi cách chọn các hệ số b_i, $i=1,...,n$.

b) Giả sử hệ phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm không tầm thường. Chứng minh rằng tồn tại các hệ số b_i, $i=1,...,n$ sao cho hệ phương trình (1) vô nghiệm. Trong trường hợp này nếu hệ phương trình (1) có nghiệm thì nghiệm không duy nhất.