CHƯƠNG IV
ĐỊNH THỨC

Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và ai cũng nghĩ là khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại. Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó.

Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính. Định thức được tiếp tục phát triển và nghiên cứu qua các công trình của Cramer (Còrame) (Thụy sĩ), Vandermonde (Vănđécmông) (Hà Lan), Laplace (Pháp), Jacobi (ia-cô-bi) (Đức)... Người đầu tiên nghiên cứu khái niệm định thức một cách hệ thống là Cauchy (Cô-si) (Pháp).

Ngoài ứng dụng để giải hệ phương trình tuyến tính, định thức còn được sử dụng để nghiên cứu những vấn đề của ma trận như: ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, tìm giá trị riêng... Khảo sát tính chất độc lập của một hệ véc tơ. Định thức Jacobi được sử dụng trong phép đổi biến số của tích phân nhiều lớp. Định thức Wronsky (vrông-xki) dùng để kiểm tra tính chất độc lập tuyến tính của các nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Định thức của một ma trận vuông được định nghĩa bằng tổng của tất cả các số hạng có được bằng cách lấy tích của các phần tử trên tất cả các hàng nằm trên các cột khác nhau của ma trận và nhân với dấu của hoán vị tương ứng. Tuy nhiên khi tính định thức ta thường sử dụng các tính chất của nó và phương pháp khai triển theo hàng, theo cột hoặc nhiều hàng, nhiều cột (Định lý Laplace).

Để định nghĩa định thức ta sử dụng khái niệm phép thế đó là một song ánh từ một tập có n phần tử vào chính nó, ảnh của phép thế là hoán vị. Khái niệm phép thế, hoán vị ta đã gặp ở chương 1, trong mục giải tích tổ hợp.

Trong chương này ta xét đến hai ứng dụng của định thức đó là tìm ma trận nghịch đảo và tìm hạng của ma trận bằng cách tính các định thức con. Trong chương 5 ta sẽ ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính. Trong chương 6 ta sẽ ứng dụng định thức để tìm giá trị riêng của ma trận hoặc tự đồng cấu tuyến tính.

Trong chương 3, ta đã chỉ ra rằng tập các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị nhưng không nguyên, do đó nó không phải là một trường. Vì vậy tồn tại những ma trận vuông khác ma trận không và không khả nghịch. Sử dụng tính chất định thức của tích hai ma trận bằng tích hai định thức của hai ma trận này, ta chứng minh được điều kiện cần và đủ để một ma trận khả nghịch là định thức của nó khác 0. Đồng thời ta có công thức tính ma trận nghịch đảo bằng nghịch đảo của định thức nhân với chuyển vị của ma trận phụ hợp.

Hạng của một ma trận bằng cấp cao nhất của định thức con khác 0 chứa trong ma trận.

Vì vậy yêu cầu của chương này là phải nắm vững được định nghĩa định thức của một ma trận vuông, các tính chất của định thức và các phương pháp tính định thức. Từ đó có thể tính toán thành thạo định thức của các ma trận thông thường, vận dụng để giải các bài toán về ma trận nghịch đảo, về hạng của ma trận.

Ngoài phương pháp sử dụng định thức ta có thể sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để tìm ma trận nghịch đảo, thực chất của phương pháp này là sử dụng phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận.

4.1 HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

Định nghĩa 4.1:

1) *Mỗi song ánh* $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ *được gọi là một phép thế bậc n.*

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1,2,...,n$ sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}$$

2) *Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị.* Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng

$$\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}.$$

3) *Dấu của phép thế:*

Mỗi cặp $i<j$ mà $\sigma(i)>\sigma(j)$ được gọi là một *nghịch thế* của phép thế σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k \qquad \textbf{(4.1)}$$

Như vậy phép thế lấy dấu + hoặc – nếu số các nghịch thế tương ứng là chẵn hoặc lẻ.

Ta dễ dàng kiểm chứng được rằng tập các phép thế bậc n với luật hợp thành là phép hợp của hai ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán, gọi là *nhóm đối xứng bậc* n, ký hiệu S_n.

Trong chương 1 ta đã biết tập S_n có đúng $n!$ phần tử. Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

Ví dụ 4.1: Hoán vị $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ có một nghịch thế là cặp (2, 3). Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^1=-1$.

Để tìm số các nghịch thế k của phép thế σ ta thực hiện các bước sau:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1)=1$.

♦ Gọi k_1 là số các số trong $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$; (k_1 là số các nghịch thế ứng với 1).

♦ Xoá số $\sigma(i_1)=1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_2)=2$; (k_2 là số các nghịch thế ứng với 2).

♦ Xoá số $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là:

$$k=k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}$$

Ví dụ 4.2: 1) Hoán vị $\begin{bmatrix}3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *có* $k_1=3,\ k_2=2,\ k_3=0$.

Vậy $k=k_1+k_2+k_3=3+2+0=5$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^5=-1$.

2) Hoán vị $\begin{bmatrix}4 & 2 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ *có* $k_1=3,\ k_2=1$, xóa 1, 2 $\Rightarrow k_3=2, k_4=0$.

Vậy $k=k_1+k_2+k_3+k_4=6$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^6=1$.

Tính chất 4.1:

1) Cặp $(i,j), i\neq j$ là một nghịch thế của phép thế σ (nghĩa là $i<j$ và $\sigma(i)>\sigma(j)$) khi và chỉ khi dấu của $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ bằng -1. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\neq j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right). \qquad \textbf{(4.2)}$$

2) Phép thế chuyển vị $\sigma=\begin{bmatrix}i_0 & j_0\end{bmatrix}$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3)}$$

Dễ dàng tính được: $k_1 = \dots = k_{i_0 - 1} = 0$, $k_{i_0} = j_0 - i_0$,

$k_{i_0+1} = \dots = k_{j_0 - 1} = 1$, $k_{j_0} = \dots = k_n = 0 \;\Rightarrow\; k = 2(j_0 - i_0) - 1$

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = -1$.

3) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\mu . \quad \textbf{(4.4)}$$

Thật vậy, khi (i, j) chạy khắp tập $\{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,n\} \setminus \{(1,1),\dots,(n,n)\}$ thì $(\mu(i), \mu(j))$ cũng chạy khắp tập này. Do đó:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1 \le i \ne j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}\right) = \prod_{1 \le \mu(i) \ne \mu(j) \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)}\right)$$

$$= \prod_{1 \le i \ne j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)}\right).$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\mu = \prod_{1 \le i \ne j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)}\right) \cdot \prod_{1 \le i \ne j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\mu(i) - \mu(j)}{i - j}\right)$$

$$= \prod_{1 \le i \ne j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{i - j}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) .$$

4) Với mọi phép thế chuyển vị $[i_0 \ j_0]$ (xem 4.3) và phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma \circ [i_0 \ j_0] = -\operatorname{sgn}\sigma .$$

4.2 ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Trước hết ta liên hệ đến khái niệm định thức cấp 2 đã biết khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' , \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc' , \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca' .$$

Các định thức này được xác định là tích 2 phần tử của đường chéo thứ nhất trừ tích 2 phần tử của đường chéo thứ hai.

Như vậy định thức của ma trận $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4.5}$$

Mặt khác nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là $\sigma_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $\sigma_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2=-1$. Vậy (4.5) có thể viết lại

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$=\operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}+\operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}=\sum_{\sigma\in S_2}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\,.$$

Mở rộng kết quả này ta có định nghĩa định thức của ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau:

__Định nghĩa 4.2__: *Định thức của ma trận vuông* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *được ký hiệu là*

$\det A$ *hay* $|A|$ *và định nghĩa bởi biểu thức:*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)} \tag{4.6}$$

Như vậy định thức của ma trận vuông $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là tổng tất cả các tích gồm n phần tử trên n hàng mà ở trên n cột khác nhau của ma trận A và nhân với dấu của phép thế tương ứng.

__Ví dụ 4.3__: Nhóm đối xứng S_3 có 6 phần tử là (xem ví dụ 1.23 chương 1)

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ ,\ \sigma_5=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.\ \sigma_6=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=\operatorname{sgn}\sigma_2=\operatorname{sgn}\sigma_3=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_4=\operatorname{sgn}\sigma_5=\operatorname{sgn}\sigma_6=-1$. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \tag{4.7}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

Ví dụ 4.4: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & y & 4 \\ z & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12y + 3x + 20z - xyz - 8 - 90 = 3x + 12y + 20z - xyz - 98$.

Ví dụ 4.5: Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$ có $\operatorname{sgn} \sigma_0 = (-1)^0 = 1$.

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) \neq k \Rightarrow$ tồn tại k' sao cho $\sigma(k') < k' \Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$. Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn} \sigma_0 \cdot a_{11} \dots a_{nn} = a_{11} \dots a_{nn}. \qquad \textbf{(4.8)}$$

Tương tự

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \bigcirc & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{nn}. \qquad \textbf{(4.9)}$$

Ví dụ 4.6: Tính định thức $D''_n = \begin{vmatrix} & \bigcirc & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & ⋰ & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ thoả mãn $\sigma_1(k) + k = n + 1, \ \forall k = 1, \dots, n$.

Ta dễ dàng tính được

$k_1 = n - 1, k_2 = n - 2, \dots, k_{n-1} = 1 \Rightarrow k = 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$

$\Rightarrow\ \operatorname{sgn}\sigma_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$. Mặt khác với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_1$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) + k < n+1 \ \Rightarrow a_{k\sigma(k)} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$.

Vậy $$D''_n = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Tương tự

$$D'''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & \iddots & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}. \qquad \textbf{(4.11)}$$

<u>Ví dụ 4.7</u>: $\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -7 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) \cdot (-1) \cdot 3 = 42$.

<u>Ví dụ 4.8</u>: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 3 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} xyz = -xyz$.

<u>Ví dụ 4.9</u>: Giả sử A là ma trận vuông cấp n có tính chất trên mỗi hàng mỗi cột có đúng một phần tử bằng 1 còn các phần tử còn lại đều bằng 0. Tính định thức của A.

Giải: Trên hàng thứ i có phần tử duy nhất trên cột j_i bằng 1 còn các phần tử còn lại đều bằng 0. Vì mỗi cột có đúng một phần tử bằng 1 nên các phần tử j_i ứng với các hàng khác nhau là khác nhau, nói cách khác $\left[j_1\ j_2\ \dots\ j_n \right]$ là một hoán vị của $\{1, \dots, n\}$.

Ký hiệu $\sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = \operatorname{sgn}\sigma_A$.

<u>Định nghĩa 4.3</u>: *Định thức của ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n\times n}$ của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$ trong không gian véc tơ n chiều V được gọi là định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ và ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\}$. Vậy*

$$D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} = \det A. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Ví dụ 4.10: Hệ véc tơ $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,5,2)$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & 5\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

Vậy $D_{\mathscr{B}}\{v_1,v_2,v_3\}=\det A=49$.

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Tính chất 4.2:

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ A'=\left[a'_{ij}\right]_{n\times n},\ a'_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & \text{nếu } i\neq k,m\\ a_{kj} & \text{nếu } i=m\\ a_{mj} & \text{nếu } i=k\end{cases}\quad \text{thì}\ \det A'=-\det A.$$

Thật vậy: $$\det A'=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a'_{1\sigma(1)}\dots a'_{k\sigma(k)}\dots a'_{m\sigma(m)}\dots a'_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\dots a_{m\sigma(k)}\dots a_{k\sigma(m)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma'(1)}\dots a_{k\sigma'(k)}\dots a_{m\sigma'(m)}\dots a_{n\sigma'(n)}$$

$$=-\sum_{\sigma'\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma'\cdot a_{1\sigma'(1)}\dots a_{m\sigma'(k)}\dots a_{k\sigma'(m)}\dots a_{n\sigma'(n)}=-\det A$$

trong đó $\sigma'=\sigma\circ\left[k\quad m\right]$.

Ví dụ 4.11: $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a'' & b'' & c''\\ a' & b' & c'\\ a & b & c\end{vmatrix}$.

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng:

Cho hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ và ma trận $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của A và B, các hàng khác hàng thứ k của ba ma trận này bằng nhau.

Nghĩa là $\begin{cases}c_{ij}=a_{ij}=b_{ij} & \text{nếu } i\neq k\\ c_{kj}=\alpha\, a_{kj}+\beta\, b_{kj}; & \text{với mọi } j=1,\dots,n.\end{cases}$

thì $\det C=\alpha\det A+\beta\det B$.

Thật vậy: $\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_{1\sigma(1)} \dots c_{k\sigma(k)} \dots c_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots (\alpha a_{k\sigma(k)} + \beta b_{k\sigma(k)}) \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} + \beta \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \dots b_{k\sigma(k)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha \det A + \beta \det B .$$

<u>Ví dụ 4.12</u>: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một định thức có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0.

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi.

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó:

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $A^t = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n}$, $a'_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,\dots,n$ thì $\det A^t = \det A$.

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{k\sigma(k)} \dots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(k)k} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{k\sigma^{-1}(k)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{k\sigma^{-1}(k)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

vì $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

<u>Ví dụ 4.13</u>: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$.

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Với tính chất này tất cả các kết quả của định thức đúng đối với hàng có thể chuyển thành tính chất đúng đối với cột. Chẳng hạn, tính chất 4) chuyển thành tính chất đối với cột như sau: nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.

7) Định thức của mọi hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính của không gian véc tơ n chiều đều bằng 0.

8) $$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} p)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{a}_{1\sigma(1)}\cdots\overline{a}_{n\sigma(n)}=\begin{vmatrix}\overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{n1} & \cdots & \overline{a}_{nn}\end{vmatrix} \qquad \textbf{(4.13)}$$

<u>Ví dụ 4.14</u>: $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ với $a_{ij}=\pm 1$

$$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} 2)=\begin{vmatrix}\overline{1} & \cdots & \overline{1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{1} & \cdots & \overline{1}\end{vmatrix}=\overline{0}(\operatorname{mod} 2)\ \Rightarrow\ \det A \text{ chẵn.}$$

<u>Ví dụ 4.15</u>: $$D_n=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1\\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}$$

(cộng các cột vào cột 1)

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a-1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

4.4 CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC

4.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột

Nếu ta nhóm theo cột thứ j công thức (4.6) thì ta được:

$$\det A=a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)+$$

$$+a_{2j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(2)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)+\dots+$$

$$+a_{nj}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n-1\sigma(n-1)}\right).$$

Vì vậy định thức của ma trận A được viết lại dưới dạng

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \tag{4.14}$$

gọi là công thức **khai triển của A theo cột thứ j**.

A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

<u>Định lý 4.3</u>: *Ký hiệu M_{ij} là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A thì*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{4.15}$$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $A_{11} = M_{11}$. Ta có :

$$A_{11} = \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma'\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma'\, a_{2\sigma'(2)} \ldots a_{n\sigma'(n)} = M_{11}$$

với $\sigma' = \sigma\big|_{\{2,\ldots,n\}}$ là phép thế trong tập hợp $\{2,\ldots,n\}$.

Trường hợp A_{ij} bất kỳ, ta thực hiện i-1 lần đổi chỗ các hàng và j-1 lần đổi chỗ các cột để đưa về hàng 1 cột 1.

Do đó $A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Công thức **khai triển theo hàng i** được suy từ tính chất 3.7: 6)

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{4.16}$$

<u>Nhận xét 4.1</u>: Công thức khai triển theo cột thứ j (4.14) và công thức khai triển theo cột I (4.16) cho phép tính định thức cấp n theo tổng các định thức cấp $n-1$ dạng $a_{ij}A_{ij}$, trong đó việc chọn hàng thứ i và cột thứ j là tùy ý. Nếu ở hàng thứ i hoặc cột j mà $a_{ij} = 0$ thì $a_{ij}A_{ij} = 0$. Vì vậy để tính định thức ta thức hiện các bước sau:

- Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng 0 hoặc dễ triệt tiêu.
- Thực hiện các phép biến đổi (cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác) để triệt tiêu các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn.
- Khai triển theo hàng hoặc cột đã triệt tiêu.

<u>Ví dụ 4.16</u>: $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\overset{\substack{-c_1+c_3\to c_3\\-2c_1+c_4\to c_4}}{=}\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&0&0&0\\3&-1&-4&-6\\1&2&-1&-7\end{vmatrix}$

Khai triển theo hàng thứ 2 ta được $D=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&-4&-6\\2&-1&-7\end{vmatrix}$.

Tiếp tục triệt tiêu hàng thứ nhất của định thức trên ta có

$$D=-\begin{vmatrix}2&0&0\\-1&-3&-5\\2&-3&-9\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-3&-5\\-3&-9\end{vmatrix}=(-2)(-3)\begin{vmatrix}1&-5\\1&-9\end{vmatrix}=6(-9+5)=-24.$$

4.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột)

Từ ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý k hàng: $i_1<...<i_k$ và k cột: $j_1<...<j_k$.

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1,...,i_k$ và k cột $j_1,..., j_k$ thì ta có ma trận con cấp $n-k$. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ và

$$A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}=(-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\,\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \quad \textbf{(4.17)}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

<u>Ví dụ 4.17</u>: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{bmatrix}$

$$M_{13}^{25}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{15}\\a_{32}&a_{35}\end{vmatrix}$$

$$A_{13}^{25} = (-1)^{1+3+2+5}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Định lý 4.4 (Laplace):

1) Khai triển k hàng $i_1 < ... < i_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_k \le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.18}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1 < ... < i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển k cột $j_1 < ... < j_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.19}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1 < ... < j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi $k = 1$ ta có công thức khai triển theo hàng và theo cột (4.14), (4.16).

Chứng minh: Trường hợp $i_1 = 1, ..., i_k = k$:

$$M_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} ... a_{k\sigma(k)}$$

$$\overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma' \in S_{n-k}} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)} ... a_{n\sigma'(n)} = A_{1,...,k}^{1,...,k}$$

Ứng với mỗi phép thế σ của tập $\{1,...,k\}$ và σ' của $\{k+1,...,n\}$ thì phép thế μ có hoán vị tương ứng $[\sigma(1),...,\sigma(k),\sigma(k+1),...,\sigma(n)]$ có số các nghịch thế bằng số các nghịch thế của σ cộng với số các nghịch thế của σ'. Do đó $\operatorname{sgn}\mu = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma'$. Vì vậy mỗi tích

$$\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} ... a_{k\sigma(k)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)} ... a_{n\sigma'(n)}$$

là một hạng tử trong tổng của $\det A$. Nói cách khác $M_{1,...,k}^{1,...,k} \overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k}$ chỉ bao gồm các hạng tử của $\det A$; nó là một bộ phận trong biểu thức tổng của $\det A$. Trường hợp tổng quát $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$, ta biến đổi hàng và cột của $\det A$ để đưa $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ về định thức con bậc

k góc trên bên trái. Ta thực hiện $i_1 - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_1 để đưa về hàng thứ 1, ..., $i_k - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_k để đưa về hàng thứ k. Tương tự đổi chỗ $j_1 - 1, ..., j_k - 1$ lần để đưa các cột $j_1, ..., j_k$ về các cột $1, ..., k$. Vì vậy định thức đổi dấu

$$(-1)^{(i_1-1)+...+(i_k-1)+(j_1-1)+...+(j_k-1)} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}.$$

Khi đổi vị trí như vậy định thức bù của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ vẫn là $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Do đó $A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$, như vậy các hạng tử của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ cũng chỉ là các hạng tử của $\det A$.

Mặt khác mỗi $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ có $k!(n-k)!$ hạng tử. Số các định thức con $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ trên k hàng $i_1, ..., i_k$ bằng số các tổ hợp n chập k và bằng C_n^k.

Các hạng tử của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ và $M_{i_1,...,i_k}^{j'_1,...,j'_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j'_1,...,j'_k}$ khác nhau từng đôi một nếu $\{j_1, ..., j_k\} \neq \{j'_1, ..., j'_k\}$.

Do đó tổng $\sum\limits_{1 \le j_1 < ... < j_k \le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ có $C_n^k k!(n-k)! = n!$ hạng tử phân biệt của $\det A$ nhưng $\det A$ cũng chỉ có $n!$ hạng tử. Vậy mỗi hạng tử của $\det A$ đều là hạng tử nào đó của một trong những $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ với $1 \le j_1 < ... < j_k \le n$. Vậy ta có đẳng thức (4.18).

Công thức khai triển theo cột (4.19) được chứng minh trực tiếp hoàn toàn tương tự cách trên hoặc có thể suy ra từ kết quả trên và áp dụng tính chất $\det A = \det A^t$.

<u>Ví dụ 4.18</u>:

$$D_n = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \textbf{(4.20)}$$

Giải:

Từ điều kiện $1 \le j_1 < ... < j_k \le n \Rightarrow j_k \ge k$.

- Nếu $j_k > k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = 0$ vì định thức này có ít nhất một cột bằng 0.

- Nếu $j_k = k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

$$\text{và} \quad A_{1,\dots,k}^{1,\dots,k} = (-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vậy $\quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

<u>Ví dụ 4.19</u>: Tính $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 2 & 2 \\ g & h & -1 & -4 & -6 \\ i & j & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 24(ad-bc)$;

(Xem Ví dụ 4.16).

<u>Ví dụ 4.20</u>: Với hai ma trận vuông cùng cấp A, B bất kỳ luôn có

$$\det AB = \det A \det B \qquad \textbf{(4.21)}$$

Thật vậy, giả sử $\qquad A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n},$

$$C = AB = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Xét định thức cấp $2n$:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{c:c} a_{ij} & \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \bigcirc & \\ 0 & & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} -1 & & \bigcirc \\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1 \end{matrix} & b_{ij} \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A \det B$ (xem ví dụ 4.14). Mặt khác, nhân b_{11} với cột 1, b_{21} với cột 2,..., b_{n1} với cột n của D_{2n} xong cộng tất cả vào cột n+1 thì định thức D_{2n} trở thành:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ \hline -1 & & \bigcirc & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ & -1 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{array}\right|$$

Tiếp tục biến đổi tương tự như trên cuối cùng được:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & & \bigcirc & 0 & & 0 \\ & -1 & & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & -1 & 0 & & 0 \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng cuối ta được:

$$D_{2n} = (-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n} \begin{vmatrix} -1 & & \bigcirc \\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n} \cdot \det C = \det C .$$

4.5 ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

4.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ta đã biết vành $(\mathcal{M}_n,+,.)$ các ma trận vuông cấp n là không nguyên, vì vậy với ma trận vuông cho trước chưa chắc đã có ma trận nghịch đảo đối với phép nhân ma trận.

Định nghĩa 4.4: *Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.*

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

4.5.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Định lý 4.5: (điều kiện cần) *Nếu* A *khả nghịch thì* $\det A \neq 0$ *(ta nói ma trận* A *không suy biến).*

Chứng minh: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$.

Do đó $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$.

Định nghĩa 4.5: *Ma trận* $B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$*, trong đó* A_{ij} *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij} *của ma trận* $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$*, được gọi là ma trận phụ hợp của* A.

Định lý 4.6: (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t, \qquad \textbf{(4.22)}$$

với B là ma trận phụ hợp của A.

Chứng minh: Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \det A.$$

Vì vậy tổng $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ là khai triển theo hàng thứ k của định thức của ma trận có được bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i của A, do đó bằng 0 (vì hàng thứ k và hàng thứ i bằng nhau). Vậy

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^t = (\det A)I. \qquad \textbf{(4.23)}$$

Tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow B^t A = (\det A)I. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Công thức (4.23)-(4.24) suy ra kết quả (4.22).

Hệ quả 4.7: *Nếu* $BA = I$ *hoặc* $AB = I$ *thì tồn tại* A^{-1} *và* $A^{-1} = B$.

Chứng minh: $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Hệ quả 4.8: Ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 với định thức $|A| = ad - bc \neq 0$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.21: $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.22: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$,

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.23: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có $\det A = -56$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 18$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -29$,

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{-56}\begin{bmatrix} 7 & -13 & -5 \\ -14 & 2 & 18 \\ 7 & 3 & -29 \end{bmatrix}^t = -\dfrac{1}{56}\begin{bmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -13 & 2 & 3 \\ -5 & 18 & -29 \end{bmatrix}$.

4.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Tính chất 3.5 mục 4.2 chương 3 chỉ ra rằng: việc thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận A để đưa A về ma trận đơn vị tương ứng với việc nhân bên trái của A các ma trận $E_1,...,E_k$ dạng $R(k,\lambda)$, $P(i,j)$, $Q(i,j,\lambda)$ (xem 3.15, 3.16, 3.17) sao cho $E_1...E_kA = I$. Mặt khác theo Hệ quả 4.7 thì $A^{-1} = E_1...E_k$.

Cũng với lập luận như trên ta có: $E_1...E_k = E_1...E_kI$ là ma trận có được bằng cách thực hiện bởi cùng các phép biến đổi sơ cấp tương ứng như đã thực hiện đối với ma trận A lên các hàng của ma trận đơn vị I. Vì vậy để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị I.

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$$A|I \to .... \to I|A^{-1}. \qquad \textbf{(4.25)}$$

<u>Ví dụ 4.24</u>: Tìm A^{-1} với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ví dụ 4.22)

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ -2h_1 + h_2 \to h_2 \\ -h_1 + h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ 2h_2 + h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ -h_2 \to h_2 \\ -h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{-3h_3 + h_1 \to h_1 \\ 3h_3 + h_2 \to h_2 \\ h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{-3h_2 + h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

Nhận xét 4.2: Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên (thường gặp khi $\det A=\pm 1$).

4.6 TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC

Định thức của một hệ phụ thuộc tuyến tính bằng 0 (xem Tính chất 4.2-7). Do đó nếu định thức $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}\neq 0$ thì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, nếu hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính thì $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}\neq 0$. Thật vậy, giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là $A=\left[a_{ij}\right]$, nghĩa là $v_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$. Ta có $\det A=D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}$.

Mặt khác vì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó cũng là một cơ sở của V.

Vậy ta có $e_j=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}v_i$. Đặt $B=\left[b_{ij}\right]$, ta có thể kiểm tra được $AB=I\Rightarrow \det A\neq 0$.

Định lý 4.10: *Hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}\neq 0$.*

Nhận xét 4.3: Ta đã chứng minh được nếu $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là T^{-1}.

$$T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}},\ \Rightarrow\ \left[t'_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=T^{-1} \tag{4.26}$$

Định lý 4.12: *Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ là một ma trận cỡ $m\times n$. Nếu tồn tại định thức con cấp p của A khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A)=p$.*

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết định thức con cấp p góc trái $M_{1,...,p}^{1,...,p}\neq 0$. Khi đó p véc tơ cột đầu độc lập tuyến tính, vì nếu có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của $p-1$ véc tơ còn lại thì mâu thuẫn với giả thiết $M_{1,...,p}^{1,...,p}\neq 0$ (định lý 4.10), do đó $r(A)\geq p$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức ngược lại.

Với mọi $k=1,...,m;\ s=p+1,...,n$; Xét ma trận cấp $p+1$:

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & \dots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pp} & a_{ps} \\ \hline a_{k1} & \dots & \dots & a_{kp} & a_{ks} \end{array}\right]$$

Khi $k \le p$: Ma trận B có hai hàng bằng nhau, do đó $\det B = 0$.

Khi $k > p$: $\det B = 0$, vì $\det B$ là định thức cấp $p+1$ bao $M_{1,...,p}^{1,...,p}$.

Mặt khác khai triển theo hàng cuối ta được dạng sau:

$$a_{k1}\mu_1 + ... + a_{kp}\mu_p + a_{ks}M_{1,...,p}^{1,...,p} = 0$$

$\Rightarrow a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_p a_{kp}$, với mọi $k = 1,2,...,m$.

Vì vậy véc tơ cột v_s là tổ hợp tuyến tính của p véc tơ cột đầu. Vậy $r(A) \le p$. ■

Hệ quả 4.13: *A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì* $r(A) = r(A^t) \le \min(m,n)$.

Nhận xét 4.4: Để tìm hạng ma trận A ta tìm định thức con cấp 2 khác 0. Bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A)=2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4...

Ví dụ 4.25: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ có :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20,\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Vậy $r(A)=2$.

Ví dụ 4.26: Ma trận $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ nhưng } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Bao định thức này bởi định thức cấp 3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Định thức cấp 4 chính là định thức $|B| = 0$.

Vậy $r(B) = 3$.

Ví dụ 4.27: Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = (a+3)(a-1)^3$.

Vậy:
- Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(A) = 4$;
- Khi $a = 1$ thì $r(A) = 1$;
- Khi $a = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.

Trong thực hành ta có thể kết hợp phương pháp này với phương pháp biến đổi sơ cấp lên các hàng các cột ma trận thì quá trình tìm hạng ma trận sẽ nhanh hơn.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1) Cho hai phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ và $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Xác định $\sigma \circ \mu$, $\mu \circ \sigma$, σ^{-1}.

b) Xác định dấu: $\operatorname{sgn}\sigma$, $\operatorname{sgn}\mu$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu)$, $\operatorname{sgn}(\mu \circ \sigma)$, $\operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

4.2) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4.3) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

4.4) Tính định thức $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$.

4.5) Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$.

4.6) Tìm các giá trị của k sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

4.7) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{bmatrix}$.

4.8) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$.

4.9) Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=0$.

4.10) Biết 299, 966, 161 chia hết 23. Chứng minh $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ chia hết 23.

4.11) Không cần tính định thức, chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

4.12) Cho định thức Vandermond $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Chứng minh: $D_n=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=\prod_{k=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(x_k-x_i)\right)=\prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{k=i+1}^{n}(x_k-x_i)\right)$.

4.13) Tính $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

4.14*) Chứng minh a) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

4.15*) Chứng minh $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+\dots+a_n$

4.16*) Cho định thức $D_n = \det\left[a_{ij}\right]$ với a_{ij} bằng 1 hoăc -1, với mọi $i, j = 1,\dots,n$.

a) Chứng minh D_n là một số chẵn;

b) Tìm giá trị lớn nhất của các định thức D_3;

c) Chứng minh $D_n \le (n-1)(n-1)!$ với mọi $n \ge 3$.

4.17*) Tính định thức của các ma trận vuông cấp n trong các trường hợp sau:

a) $a_{ij} = \min(i, j)$, b) $a_{ij} = \max(i, j)$,

c) $a_{ij} = |i-j|$, d) $a_{ij} = \dfrac{1}{(i+j-1)!}$

4.18) Tính $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

4.19) Chứng minh $\dfrac{d}{dx}\left|a_{ij}(x)\right| = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}(x) A_{ij}(x)$.

4.20) Tìm λ để hệ véc tơ sau phụ thuộc tuyến tính:

$$u=\left(\lambda,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right),\ v=\left(\frac{-1}{2},\lambda,\frac{-1}{2}\right),\ w=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\lambda\right).$$

4.21) Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 8 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}3 & m & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ m & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & m & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.22) Các ma trận sau có khả nghịch không, nếu khả nghịch hãy tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

e) $E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.23) Cho $A=\begin{bmatrix}t-1 & 3 & -3\\ -3 & t+5 & -3\\ -6 & 6 & t-4\end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t=3$ tìm A^{-1}.

4.24) Cho $A=\begin{bmatrix} t+1 & 7 & 3 \\ -1 & t-1 & -2 \\ t-5 & 2t-5 & t-6 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t=2$ tìm A^{-1}.

4.25) Giả sử A là ma trận chéo và B là ma trận tam giác có dạng:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & b_2 & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

a) Chứng tỏ rằng ma trận phụ hợp của A có dạng chéo và ma trận phụ hợp của B có dạng tam giác.

b) Chứng tỏ rằng B khả nghịch khi và chỉ khi mọi $b_i \neq 0$; do đó A khả nghịch khi và chỉ khi mọi $a_i \neq 0$.

c) Chứng tỏ rằng nếu A, B khả nghịch thì ma trận nghịch đảo tương ứng có dạng:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} b_1^{-1} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & b_2^{-1} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

4.26) Chứng tỏ ma trận vuông $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ A & I_q \end{bmatrix}$ khả nghịch, với $A \in \mathcal{M}_{q\times p}$. Tìm ma trận nghịch đảo.

4.27*) Chứng tỏ rằng nếu $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ thì tồn tại các ma trận R và S sao cho $A=RS,\ B=SR$.

4.28) Chứng tỏ rằng mọi ma trận vuông phản đối xứng ($A^t=-A$) cấp lẻ là suy biến. Ma trận vuông phản đối xứng cấp chẵn có suy biến không? Chứng minh rằng ma trận nghịch đảo của ma trận phản đối xứng cũng là ma trận phản đối xứng.

4.29*) Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông cấp n sau:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & ... & a^n \\ 0 & 1 & a & ... & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & ... & a^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$

4.30*) Chứng minh nếu $A^k=0$ thì $I+A, I-A$ khả nghịch.

4.31*) Chứng minh nếu $A^n=0$, $B^m=0$ và $AB=BA$ thì $I+A+B$ khả nghịch.

4.32*) Chứng minh rằng nếu $(I+A)^k=0$ thì $\det A\neq 0$.

4.33*) Chứng minh nếu $I+AB$ khả nghịch thì $I+BA$ cũng khả nghịch.

4.34*) Tìm tất cả các ma trận vuông cấp n dạng tam giác $A=\left[a_{ij}\right], a_{ij}\geq 0$ có

$A^{-1}=\left[b_{ij}\right], b_{ij}\geq 0$.

4.35*) Giả sử ma trận A vuông cấp n thoả mãn $(XA)^2=0$ với mọi ma trận X vuông cấp n. Chứng minh $A=0$.

4.36*) Chứng minh đẳng thức Wagner đúng với mọi ma trận A,B,C vuông cấp 2:

$$(AB-BA)^2C-C(AB-BA)^2=0.$$

4.37*) Cho hai ma trận A,B vuông cấp n thoả mãn tính chất $AB-BA=B$.

a) Chứng minh $AB^k=B^k(A+kI)$ với mọi k.

b) Từ đó suy ra $\det B=0$.

4.38) Cho ma trận khối $M=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, trong đó A, C là hai ma trận vuông. Chứng minh rằng $|M|=|A||C|$.

4.39) Cho A, B, C, D là các ma trận vuông cấp n giao hoán. Chứng minh rằng ma trận khối $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ vuông cấp $2n$ có định thức $|M|=|A||D|-|B||C|$.