CHƯƠNG III

MA TRẬN

Lý thuyết ma trận có mặt khắp nơi, trong toán học cũng như trong các ngành khoa học khác. Vì vậy chúng ta dễ lầm tưởng rằng lý thuyết ma trận ra đời đã lâu lắm nhưng thực tế lý thuyết này mới ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay. Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương hay về các phép thế tuyến tính. Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801. Tên gọi ma trận được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850. Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858). Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.

Ký hiệu ma trận cô đọng, rất có ích và thuận tiện trong khi thực hiện các phép biến đổi tuyến tính (chương 6) và cho phép ta phát triển một phương pháp hoàn chỉnh để giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Sự quan tâm của các nhà vật lý đối với lý thuyết ma trận, đặc biệt tăng lên sau khi Heisenberg, Born, Jordan vào năm 1925 đã dùng nó trong các bài toán của cơ học lượng tử. Sự phát triển của máy tính hiện đại thực hiện dễ dàng những phép tính ma trận cơ bản càng thúc đẩy thêm sự ứng dụng rộng rãi ma trận vào những lĩnh vực khác.

Có người ví ma trận như là số học của toán cao cấp. Cách ví von này hoàn toàn hợp lý vì ma trận được sử dụng rộng rãi trong các chuyên ngành khác nhau của toán học. Với tư cách là sự biểu diễn của các phép biến đổi tuyến tính, ma trận được sử dụng trong các bài toán cực trị của hàm nhiều biến, đạo hàm hàm hợp, ma trận Jacobi trong phép đổi biến số, giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Các ma trận dương dùng để mô tả các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên, mô tả xác suất chuyển của chuỗi Markov trong lý thuyết xác suất. Ma trận còn được sử dụng để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính, phân loại các đường, mặt bậc 2...

Chương trình phần mềm MATLAB (Matrix laboratory) hỗ trợ cho việc tính toán, đồ hoạ và mô phỏng cũng được thực hiện trong môi trường ma trận.

Nắm vững khái niệm ma trận giúp học viên học tốt các chương 4,5,6,7.

Trong chương này ta chỉ xét khái niệm ma trận cùng với các phép toán cộng ma trận, nhân một số với ma trận, nhân hai ma trận và ma trận chuyển vị.

Cộng hai ma trận cùng cỡ được thực hiện bằng cách cộng các phần tử nằm trên các hàng các cột tương ứng với nhau. Nhân một số với ma trận là nhân số này với mọi phần tử của ma trận. Hai phép toán này được thực hiện một cách dễ dàng. Phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận trước bằng số hàng của ma trận sau. Khi đó phần tử ở hàng i cột j của ma trận tích có được bằng cách lấy các phần tử trên hàng thứ i của ma trận trước nhân tương ứng với các phần tử trên cột thứ j của ma trận sau rồi cộng lại. Như vậy phép nhân ma trận được thực hiện khó hơn nhiều. Học viên cần luyện tập nhiều về phép nhân ma trận.

Tập hợp các ma trận cùng cỡ với phép cộng ma trận và phép nhân một số với ma trận là một không gian véc tơ. Tập hợp các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với ma trận là một vành có đơn vị, không giao hoán và không nguyên.

Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó là ma trận có các cột là toạ độ của hệ véc tơ này trong cơ sở $\mathscr{B}$. Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ là ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}$. Hạng của ma trận là hạng của hệ véc tơ cột.

Ma trận nghịch đảo được xét trong chương 4 khi ta đã học định thức của ma trận. Bài toán chéo hoá ma trận được xét trong chương 6 cùng với bài toán chéo hoá tự đồng cấu tuyến tính. Ma trận trực giao và bài toán chéo hoá trực giao của một ma trận được xét trong chương 7 bằng cách sử dụng tích vô hướng.

3.1 KHÁI NIỆM MA TRẬN

Định nghĩa 3.1: *Một bảng số có m hàng n cột có dạng*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

được gọi là một ma trận cỡ $m\times n$.

a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j.

Khi $a_{ij}\in\mathbb{R},\forall i,j$ thì A được gọi là ma trận nguyên, $a_{ij}\in\mathbb{C},\forall i,j$ thì A được gọi là ma trận phức. Nếu không chỉ rõ a_{ij} thì ta quy ước A là ma trận thực.

Ma trận A cỡ $m\times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hay} \quad A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \tag{3.2}$$

Khi $m=n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ví dụ 3.1: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2×3.

Hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m'\times n'}$ bằng nhau khi cùng cỡ và có các phần tử tương ứng đều bằng nhau:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

3.2.1 Phép cộng ma trận

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

Tổng của hai ma trận A, B là ma trận cùng cỡ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A + B = \left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ với mọi } i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.2: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

3.2.2 Phép nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$, và số thực k. Ta định nghĩa và ký hiệu:

$$kA = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n} \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.3: $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 3.4: Tìm x, y, z và w nếu: $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$.

Giải: Theo (3.4) và (3.5) ta được $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$.

Theo (3.3) ta có $\begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = x+6 \\ 2z = w-1 \\ w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$

<u>Tính chất 3.1</u>: Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ:

1) $A+(B+C) = (A+B)+C$;

2) Ma trận có các phần tử đều bằng 0 gọi là ma trận không và ký hiệu $\mathbf{0}$.

Khi đó: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;

3) $A + (-A) = \mathbf{0}$, trong đó $-A = \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$;

4) $A + B = B + A$.

Vậy $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ là một nhóm Abel.

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực k, h với mọi ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$:

5) $k(A+B) = kA + kB$;

6) $(k+h)A = kA + hA$;

7) $k(hA) = (kh)A$;

8) $1A = A$.

Với 8 tính chất này tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là không gian véc tơ.

Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m\times n$ có các phần tử đều bằng 0 ngoại trừ phần tử ở hàng i cột j bằng 1. Hệ các ma trận $\left\{E_{ij} \,\middle|\, i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Vậy $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = m\cdot n$.

<u>Ví dụ 3.5</u>: Ma trận cỡ 2×3 bất kỳ có thể biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+a_{21}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+a_{23}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

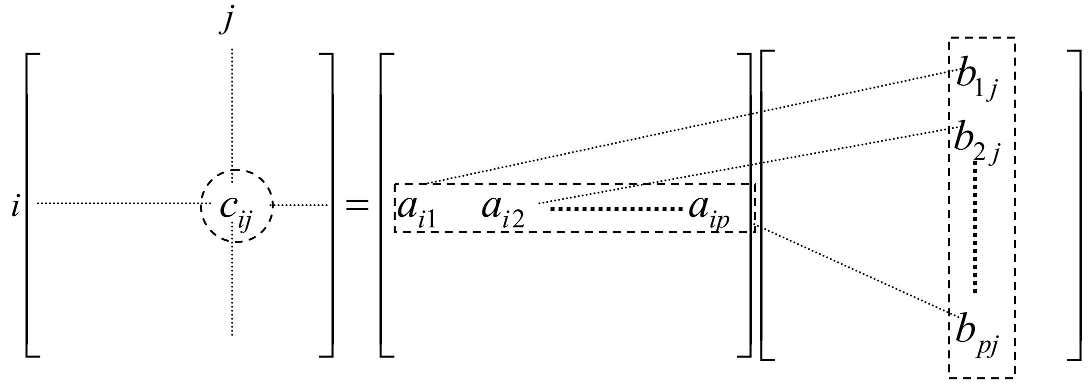
Vậy $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

3.2.3 Phép nhân ma trận

<u>**Định nghĩa 3.2**</u>: *Tích hai ma trận* $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ *và* $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ *là ma trận cỡ* $m\times n$ *được ký hiệu và định nghĩa bởi* $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$*, trong đó*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \text{ với mọi } i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Vậy phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ i của A với các phần tử tương ứng của cột thứ j của B.



<u>**Ví dụ 3.6**</u>: $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 7 & 17\end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8 & -4\\ 3 & 12 & -6\end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B định nghĩa được khi số cột của A bằng số hàng của B. Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A.

Khi A,B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời AB và BA. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB=BA$, nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán. Chẳng hạn, xét

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0 & \dots & 0\\ 11 & 4 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \neq BA=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0 & \dots & 0\\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

<u>Tính chất 3.2</u>: Giả sử A, B, C là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được thì ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$ *tính kết hợp.*

2) $A(B + C) = AB + AC$ *tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.*

3) $(B + C)A = BA + CA$ *tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.*

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5) Với mọi số tự nhiên dương n ta xét ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0.

$$I_n = \begin{bmatrix}1 & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 1\end{bmatrix}$$

Khi đó với mọi ma trận A cỡ $m \times n$ ta có

$$I_m A = A = A I_n. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Ma trận I_n được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Từ các tính chất trên ta thấy tập hợp các ma trận vuông cấp $n \geq 2$ cùng với phép cộng và nhân ma trận $(\mathcal{M}_n, +, .)$ là một vành không giao hoán, có đơn vị và không nguyên vì có ước của $\mathbf{0}$. Chẳng hạn

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&\dots&0\\2&4&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&-6&0&\dots&0\\-1&3&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$A,B\neq\mathbf{0}$ nhưng $AB=\mathbf{0}$.

3.2.4 Đa thức ma trận

Giả sử $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_kt^k$ là một đa thức bậc k.

Với mọi ma trận A vuông cấp n. Ta định nghĩa đa thức của ma trận A như sau:

$$p(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_kA^k \qquad \textbf{(3.8)}$$

Qui ước $A^0=I$, $A^1=A$.

<u>Ví dụ 3.7</u>: Cho $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ và đa thức $p(t)=5-4t+t^3$. Ta có:

$$A^3=\begin{bmatrix}-7&22\\60&-67\end{bmatrix},\ p(A)=5\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}-6&30\\44&-50\end{bmatrix}.$$

3.2.5 Ma trận chuyển vị

<u>Định nghĩa 3.3</u>: *Cho ma trận A cỡ $m\times n$,* nếu *ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n\times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên A, ký hiệu A^t*

$$A^t=\left[c_{ij}\right]_{n\times m}: c_{ij}=a_{ji}\quad\forall\ i=\overline{1,n}\ ; j=\overline{1,m}\ . \qquad \textbf{(3.9)}$$

<u>Ví dụ 3.8</u>: $A=\begin{bmatrix}-4&1\\2&0\\5&9\end{bmatrix}$; $A^t=\begin{bmatrix}-4&2&5\\1&0&9\end{bmatrix}$.

<u>Tính chất 3.3</u>:

1) $(A+B)^t=A^t+B^t$.

2) $(kA)^t=kA^t$.

3) $(AB)^t=B^tA^t$.

Định nghĩa 3.4:

1) *Nếu* $A = A^t$ *thì* A *được gọi là ma trận đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).

2) $A = -A^t$ *thì* A *được gọi là phản đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0).

3.3 MA TRẬN CỦA MỘT HỆ VÉC TƠ

3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

Giả sử V là không gian n chiều với một cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ...e_n\}$.

$\{v_1, ..., v_m\}$ là một hệ gồm m véc tơ của V có toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

Giả sử $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\,; j = \overline{1, m}$, khi đó ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ có các cột là các toạ độ của các véc tơ $\{v_1, ..., v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m};\; v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad, j = \overline{1, m} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Ngược lại, với ma trận A cỡ $n \times m$ cho trước thì ta có hệ m véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của A.

Vậy khi không gian véc tơ V với cơ sở cố định $\mathscr{B} = \{e_1, ...e_n\}$ thì có tương ứng 1 - 1 giữa các ma trận cỡ $n \times m$ với các hệ m véc tơ của V.

Nói riêng, nếu $u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ theo (2.9) ta ký hiệu tọa độ của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x_1, ..., x_n) \qquad \textbf{(3.11)}$$

Ma trận của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.12)}$$

<u>Ví dụ 3.9</u>: Ma trận của hệ véc tơ $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,.....e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$*. Nghĩa là nếu

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i \;, j=\overline{1,n}\,...$$

Thì

$$T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \tag{3.13}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

Khi đó với véc tơ bất kỳ $u\in V$; $u=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}x'_i e'_i$. Ta có:

$$\left[x_i\right]_{n\times 1}=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}\left[x'_j\right]_{n\times 1} \tag{3.14}$$

Nghĩa là

$$\left[u\right]_{\mathscr{B}}=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\left[u\right]_{\mathscr{B}'} \tag{3.15}$$

(3.14), (3.15) *được gọi là công thức đổi tọa độ*

Nếu A, A' lần lượt là ma trận của $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ thì

$$A=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}A' \tag{3.16}$$

<u>Ví dụ 3.10</u>: (Xem ví dụ 2.16 Chương 2) Hai hệ véc tơ $\mathscr{B}=\{e_1,e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_n\}$, với $e_1=(1,0),\ e_n=(0,1)$ và $e'_1=(1,1),\ e_n=(4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Theo công thức (2.10): $\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ u=xe_1+ye_2=(4y-3x)e'_1+(x-y)e'_2$;

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ là $T=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $T'=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

3.4 HẠNG CỦA MA TRẬN

3.4.1 Định nghĩa và tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa 3.5: *Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là hạng của các véc tơ cột của A.*

Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Hạng $r(S)$ của một hệ véc tơ S của không gian V là số véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S hay là chiều của $\operatorname{span} S$ (xem Định lý 2.16 chương 2). Vì vậy khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau, gọi là các phép biến đổi sơ cấp, thì $\operatorname{span} S$ không đổi do đó hạng của hệ không thay đổi:

1) *Đổi chỗ cho nhau hai véc tơ của hệ.*

2) *Nhân vào một véc tơ của hệ một số khác* 0.

3) *Cộng vào một véc tơ của hệ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ.*

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột (sau này ta sẽ chứng minh được rằng ta cũng có thể biến đổi theo các hàng) để đưa ma trận về dạng tam giác hoặc hình thang (xem Nhận xét 2.2, cách 1). Số các véc tơ cột khác 0 là hạng của ma trận.

Ví dụ 3.11: $$A=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-2&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{3c_1+c_2\to c_2\\4c_1+c_3\to c_3\\-2c_1+c_4\to c_4}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&7&-7&0\\-1&-5&5&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2+c_3\to c_3]{\substack{c_1\to c_1\\ c_2\to c_2}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&7&0&0\\-1&-5&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy $r(A)=2$.

<u>**Ví dụ 3.12**</u>:

$$B=\begin{bmatrix}-1&2&1&-1&1\\a&-1&1&-1&-1\\1&a&0&1&1\\1&2&2&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_4\\ c_2\to c_5\\ c_3\to c_1\\ c_4\to c_2\\ c_5\to c_3}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\1&-1&-1&a&-1\\0&1&1&1&a\\2&-1&1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_1\\ c_1+c_2\to c_2\\ -c_1+c_3\to c_3\\ c_1+c_4\to c_4\\ -2c_1+c_5\to c_5}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&-2&a+1&-3\\0&1&1&1&a\\2&1&-1&3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_1\\ c_2\to c_3\\ c_3\to c_2\\ -(a+3)c_2+(a+1)c_3+2c_4\to c_4\\ (3-2a)c_2-3c_3+2c_5\to c_5}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&1&1&0&0\\2&-1&1&2-2a&2-2a\end{bmatrix}$$

Vậy $r(B)=\begin{cases}4 & \text{nếu } a\neq 1\\ 3 & \text{nếu } a=1\end{cases}$.

3.4.2 Các ma trận tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp

Xét các ma trận vuông cấp n sau:

$$R(k,\lambda)=\left[a_{ij}\right]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&\lambda&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}&\text{hàng } k\\ \text{cột k}&\end{array}\qquad a_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\neq k\\ \lambda & i=j=k\end{cases}\tag{3.17}$$

$$P(i,j)=\left[a_{kl}\right]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&&&&\\&0&\cdots&1&\\&\vdots&\ddots&\vdots&\\&1&\cdots&0&\\&&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\ \text{hàng } i\\ \\ \text{hàng } j\\ \\ \end{array}\\ \text{Cột } i\quad \text{Cột } j&\end{array}\qquad a_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\neq i;j\\ 0 & k=l \text{ và bằng } i \text{ hoặc } j\\ 1 & k=i,l=j\\ 1 & k=j,l=i\\ 0 & \text{trong các trường hợp khác}\end{cases}\tag{3.18}$$

$$Q(i,j,\lambda)=\left[a_{kl}\right]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & \vdots & \ddots & \\ \cdots & \lambda & \cdots\; 1 & \cdots \\ & \vdots & & 1\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{hàng } i \\ \\ \end{array} \\ \text{Cột } j & \end{array} \qquad a_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\\ \lambda & k=i, l=j\\ 0 & \text{trong các trường hợp khác}\end{cases} \tag{3.19}$$

<u>Tính chất 3.5</u>: Ta dễ dàng kiểm tra được:

a) Nếu nhân $R(k,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AR(k,\lambda)$ có được bằng cách nhân thêm λ vào cột k của ma trận A.

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & \lambda b & c\\ a' & \lambda b' & c'\\ a'' & \lambda b'' & c''\end{bmatrix}$$

b) Nếu nhân $P(i,j)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AP(i,j)$ có được bằng cách đổi chỗ hai cột i và j của A cho nhau.

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a & c\\ b' & a' & c'\\ b'' & a'' & c''\end{bmatrix}$$

c) Nếu nhân $Q(i,j,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AQ(i,j,\lambda)$ có được bằng cách nhân λ vào cột i và cộng vào cột j của ma trận A.

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+\lambda c & b & c\\ a'+\lambda c' & b' & c'\\ a''+\lambda c'' & b'' & c''\end{bmatrix}$$

d) Nếu nhân P,Q,R vào bên trái của ma trận A thì ta có các kết quả tương tự như trên, trong đó các tác động lên hàng đổi thành tác động lên cột và ngược lại. Chẳng hạn

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ \lambda a' & \lambda b' & \lambda c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ \lambda a'+a'' & \lambda b'+b'' & \lambda c'+c''\end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1) Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$. Tính:

a) $(A+B)+C$ b) $A+(B+C)$

c) A^t, B^t, C^t d) A^tB e) BC^t.

3.2) Cho $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

Tính $3A+4B-2C$.

3.3) Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Ba ma trận sau có độc lập không: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.4) Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ trong cơ sở $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.5) Cho các ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

a) Tính $A+B$, $A+C$, $3A-4B$.

b) Tính AB, AC, AD, BC, BD, CD.

c) Tính A^t, A^tC, D^tA^t, B^tA, D^tD, DD^t.

3.6) Tính: a) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}^5$.

3.7) Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$.

a) Cho $f(x)=2x^3-4x+5$, tính $f(A)$.

b) Đặt $g(x)=\begin{vmatrix}1-x & 2\\ 4 & -3-x\end{vmatrix}$, tính $g(A)$.

3.8) Cho $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}$. Tính :

a) $A+B$ b) AB c) A^2

d) A^n e) $p(A)$, trong đó $p(t)$ là một đa thức.

3.9) Chứng minh nếu $AB=BA$ thì với mọi số tự nhiên n > 0:

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k.$$

3.10) Tính: a) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}^5$ b) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^n$ c) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{1999}$

d) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n$ e) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_k\end{bmatrix}^n$ f) $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$.

3.11) Cho $J=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

a) Tính J^2

b) Xét ma trận $A=\alpha I+\beta J$, chứng minh A^n có dạng $A^n=\alpha_n I+\beta_n J$.

Tính α_n, β_n theo α,β,n.

3.12*) Tính A^{100} với:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

3.13) Cho $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận vuông cấp $n>2$; $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{nếu } i=j\\ 1 & \text{nếu } i\neq j\end{cases}$

a) Tìm α,β sao cho $P=\alpha A+\beta I$ thoả mãn $P^2=I$.

b) Viết cụ thể P trong các trường hợp $n=3, n=4$.

3.14) Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$ vuông cấp n. Ta gọi $\mathrm{Tr}A=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Chứng minh:

a) $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}\,A+\mathrm{Tr}\,B$;

b) $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$ (mặc dù $AB\neq BA$);

c) nếu $B=P^{-1}AP$ thì $\mathrm{Tr}A=\mathrm{Tr}B$;

d) không tồn tại ma trận A,B sao cho $AB-BA=I$.

3.15) Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

a) Chứng minh A thoả mãn phương trình $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Chứng minh $A^k=0$ với số nguyên dương $k\geq 2$ khi và chỉ khi $A^2=0$.

3.16) Cho $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$.

Tính DA và BD.

3.17) Hai ma trận A,B được gọi là giao hoán nếu $AB=BA$. Chứng minh rằng A giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp khi và chỉ khi A là ma trận vô hướng (nghĩa là $A=kI$).

3.18) Tìm tất cả các ma trận $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ giao hoán với $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.19) Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ma trận đối xứng vuông cấp n $(A^t=A)$ là không gian véc tơ con của không gian véc tơ $\mathcal{M}_n$ các ma trận vuông cấp n. Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con này.

3.20) Tìm các ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong các trường hợp sau:

a) $A^2=0$ b) $A^2=I$

c) $c=0$ và $A^n=I$ với n nào đó.

3.21) Ma trận vuông A được gọi là luỹ đẳng nếu $A^2=A$. Chứng minh rằng tổng của hai ma trận luỹ đẳng A,B là luỹ đẳng khi và chỉ khi $AB+BA=0$.

3.22) Cho A, B là hai ma trận cỡ $m \times n$. Chứng minh rằng $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

3.23) Tìm các ví dụ về hai ma trận A, B vuông cấp 2 thỏa mãn từng điều kiện sau:

a) $r(A+B) < r(A), r(B)$.

b) $r(A+B) = r(A) = r(B)$.

c) $r(A+B) > r(A), r(B)$.

3.24) Tính tích ma trận AB bằng cách dùng phép nhân ma trận khối

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ có dạng ma trận khối $A = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & G \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix}$,

trong đó $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.