CHƯƠNG II
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Khái niệm không gian véc tơ có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ .... Các nhà vật lý còn sử dụng phương pháp véc tơ Fresnel để tổng hợp các dao động điều hoà.

Cuối thế kỷ 17 Descartes đã đề xuất phương pháp tọa độ để giải quyết các bài toán hình học. Với phương pháp này mỗi véc tơ trong mặt phẳng được đồng nhất với một cặp số là hoành độ và tung độ còn véc tơ trong không gian được đồng nhất với bộ ba số. Các phép toán của véc tơ (cộng véc tơ, nhân 1 số với véc tơ) có thể chuyển tương ứng bằng phép toán trên các bộ số và thoả mãn một số tính chất nào đó. Trong nhiều lĩnh vực khác chúng ta cũng thấy những đối tượng khác như các đa thức, hàm số, v.v... có các phép toán thoả mãn các tính chất tương tự các véc tơ. Điều này dẫn đến việc khái quát hoá khái niệm véc tơ.

Trong các công trình về số quaternion từ năm 1843 của nhà toán học Anh Hamilton, người ta có thể tìm thấy một dạng thô sơ của khái niệm không gian véc tơ 3 và 4 chiều. Hamilton dùng các số quaternion để nghiên cứu các vấn đề toán lý. Sau đó các nhà vật lý như Maxwell và Gibbs đã phát triển dần lý thuyết không gian véc tơ 3 chiều. Khái niệm không gian véc tơ 4 chiều được Einstein (Anh-xtanh) sử dụng trong thuyết tương đối. Ngày nay lý thuyết không gian véc tơ nhiều chiều được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác.

Chúng ta thấy khái niệm không gian véc tơ được hình thành qua một quá trình lâu dài trên cơ sở các thành tựu về lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế và có tính khái quát hoá cao. Vì vậy để học tốt chương này đòi hỏi người học phải nắm vững khái niệm không gian véc tơ với mức độ trừu tượng cao, còn các mô hình cụ thể là các không gian 2 chiều, 3 chiều ta đã biết ở chương trình phổ thông.

Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn chiều, đó là các không gian có hệ sinh hữu hạn. Trong không gian như thế mọi véc tơ đều có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ sinh. Muốn cho biểu diễn này là duy nhất thì hệ sinh phải độc lập tuyến tính, lúc đó ta có một cơ sở của không gian véc tơ. Các hệ số trong biểu diễn ở trên được gọi là tọa độ của véc tơ.

Sinh viên cần luyện tập tìm tọa độ của một véc tơ trong các cơ sở khác nhau. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ véc tơ cho trước. Tìm hạng của một hệ véc tơ, tìm chiều của không gian con. Công thức chiều của tổng hai không gian véc tơ con, chiều của giao của hai không gian véc tơ con. Thấy được mối liên hệ giữa hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ sinh và cơ sở, liên hệ giữa hạng của hệ sinh và chiều của không gian sinh bởi hệ sinh này (định lý 2.17). Liên hệ với những phép toán và tính chất véc tơ đã biết ở phổ thông.

2.1 KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1.1 Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 2.1: *Giả sử V là tập khác $\varnothing$, K là một trường. V được gọi là không gian véc tơ trên trường K nếu có hai phép toán:*

- *Phép toán trong* $\quad (+)\colon \begin{array}{l} V\times V\to V \\ (u,v)\mapsto u+v \end{array}$

- *Phép toán ngoài* $\quad (\cdot)\colon \begin{array}{l} K\times V\to V \\ (\alpha,u)\mapsto \alpha u \end{array}$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u,v,w\in V$ và $\alpha,\beta\in K$

V1) $(u+v)+w=u+(v+w)$

V2) *Tồn tại* $\mathbf{0}\in V$ *sao cho* $u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u$

V3) *Với mỗi* $u\in V$ *có* $-u\in V$ *sao cho* $u+(-u)=(-u)+u=\mathbf{0}$

V4) $u+v=v+u$

V5) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

V6) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

V7) $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

V8) $1u=u$*, trong đó* 1 *là phần tử đơn vị của* K.

Khi $K=\mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K=\mathbb{C}$ thì V được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của K được gọi là các phần tử vô hướng.

Bốn tiên đề đầu chứng tỏ $(V,+)$ là nhóm Abel. Tiên đề V5),V6) nói rằng phép nhân số vô hướng với véc tơ phân phối đối với phép cộng của số vô hướng và phép cộng véc tơ. Tiên đề V7) là tính kết hợp của tích các số vô hướng với phép nhân với véc tơ.

Ví dụ 2.1: Giả sử K là một trường, xét $K^n=\left\{x=(x_1,...,x_n)\,\middle|\, x_i\in K, i=\overline{1,n}\right\}$

Ta định nghĩa: $(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$

$$\alpha(x_1,...,x_n)=(\alpha x_1,...,\alpha x_n),\ \forall\alpha\in K$$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là $\mathbf{0}=\underbrace{(0,...,0)}_{n \text{ phần tử}}$, phần tử đối của $x=(x_1,...,x_n)$ là $-x=(-x_1,...,-x_n)$.

Khi $K=\mathbb{R}$ ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$.

$K=\mathbb{C}$ ta có không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$.

<u>**Ví dụ 2.2**</u>: Ký hiệu $\mathbb{R}^X$ là tập các hàm số xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\varnothing$. Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\ \ (\alpha f)(t)=\alpha f(t),\quad \forall t\in X$$

Rõ ràng với mọi hàm số f,g xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$, với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ thì $f+g,\ \alpha f$ cũng là các hàm số xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$.

Với hai phép toán này $\mathbb{R}^X$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là $\mathbf{0}(t)=0,\forall t\in X$, phần tử đối của f là $-f$ xác định bởi $(-f)(t)=-f(t),\forall t\in X$.

<u>**Ví dụ 2.3**</u>: Gọi $\mathbf{P}_n$ là tập các đa thức bậc $\le n$, n là số nguyên dương cho trước:

$$\mathbf{P}_n=\left\{p\,\middle|\,p=a_0+a_1t+...+a_nt^n;a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 2.2 thì $\mathbf{P}_n$ là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\mathbf{0}$.

<u>**Ví dụ 2.4**</u>: Gọi $\mathbf{P}$ là tập các đa thức

$$\mathbf{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}_n=\left\{p\,\middle|\,p=a_0+a_1t+...+a_nt^n;a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng hai đa thức và phép nhân với một số với đa thức theo nghĩa thông thường ở Ví dụ 2.3 thì $\mathbf{P}$ là không gian véc tơ và $\mathbf{P}_n\subset\mathbf{P}$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

2.1.2 Tính chất

1) Vì $(V,+)$ là một nhóm Abel nên véc tơ $\mathbf{0}$ và véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất với mọi $u\in V$.

2) Có luật giản ước: $u+v=u+w\Rightarrow v=w$.

3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.

4) Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.

Chứng minh:

1) 2) Xem Định lý 1.4.

3) Với mọi $u \in V$, $(0+0)u = 0u + 0u$. Mặt khác $(0+0)u = 0u = 0u + \mathbf{0}$.

Theo luật giản ước ta có $0u = \mathbf{0}$.

Tương tự với mọi $u \in V$, $u + (-u) = \mathbf{0} = 0u = (1-1)u = 1u + (-1)u$.

Suy ra $(-1)u = -u$.

4) $\mathbf{0} + \alpha 0 = \alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = \mathbf{0}, \forall \alpha \in K$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ và giả sử $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in K$

$$\mathbf{0} = \alpha^{-1} 0 = \alpha^{-1}(\alpha u) = (\alpha^{-1}\alpha)u = 1u = u.$$

Từ định nghĩa của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

1) *Ta định nghĩa* $u - v := u + (-v)$, *khi đó*

$$u + v = w \Leftrightarrow u = w - v.$$

2) *Do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = (u_1 + \ldots + u_{n-1}) + u_n \, .$$

Tương tự $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n$

biểu thức này được gọi là *một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ* $u_1, \ldots, u_n$.

Từ đây trở đi ta chỉ hạn chế ***xét các không gian véc tơ thực***.

2.2 KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

2.2.1 Định nghĩa và ví dụ

Giả sử tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn tính chất:

$$\forall u, v \in W: \quad u + v \in W; \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\forall u \in W, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha u \in W. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Khi đó có thể xác định 2 phép toán từ không gian V thu hẹp vào W:

$$(+):\ W \times W \to W$$
$$(u,v) \mapsto u+v$$

$$(\cdot):K \times W \to W$$
$$\alpha,u) \mapsto \alpha u$$

Hai phép toán này hiển nhiên thỏa mãn các điều kiện V1) , V4), V5), V6), V7), V8) của Định nghĩa 2.1.

Ngoài ra vì $W \neq \varnothing$ do đó tồn tại ít nhất véc tơ $u \in W$ suy ra $\mathbf{0} = 0u \in W$.

$\forall u \in W: -u = (-1)u \in W$.

Vậy W thỏa mãn các tiên đề V1) – V8) của không gian véc tơ. Nói cách khác với hai phép toán thu hẹp từ không gian véc tơ V vào W thì W là một không gian véc tơ .

<u>**Định nghĩa 2.2**</u>: *Giả sử $(V,+,.)$ là không gian véc tơ. Tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn điều kiện (2.1)-(2.2) được gọi là không gian véc tơ con của V (hay nói tắt: không gian con của V).*

Định lý sau đây chỉ ra một tiêu chuẩn để kiểm tra tập con $W \subset V$ là không gian véc tơ con của V .

<u>**Định lý 2.2**</u>: *Giả sử W là tập con khác rỗng của V . Khi đó W không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi: Với mọi $u,v \in W$, với mọi $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u + \beta v \in W$.*

Chứng minh: ($\Rightarrow$): Với mọi $u,v \in W$, với mọi $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u \in W$, $\beta v \in W$ $\Rightarrow$ $\alpha u + \beta v \in W$.

($\Leftarrow$): $\forall u,v \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $u + v = 1u + 1v \in W$, $\alpha u = \alpha u + 0u \in W$.

<u>**Ví dụ 2.5**</u>: Từ định lý trên ta thấy rằng mọi không gian véc tơ con của V đều phải chứa véc tơ $\mathbf{0}$ của V .

Tập $\{\mathbf{0}\}$ chỉ gồm véc tơ không là không gian véc tơ con nhỏ nhất của V .

V là không gian véc tơ con lớn nhất của V .

<u>**Ví dụ 2.6**</u>: Tập $W_1 = \left\{ u = (x,y,0) \middle| x,y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>**Ví dụ 2.7**</u>: Tập $W_2 = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + 4z = 0 \right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>**Ví dụ 2.8**</u>: Tập $W_3 = \left\{ u = (x,y,1) \middle| x,y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>**Ví dụ 2.9**</u>: $\mathbf{P}_n$ là không gian con của $\mathbf{P}_m$ nếu $n \leq m$, trong đó $\mathbf{P}_n$ là không gian các đa thức bậc $\leq n$.

Ví dụ 2.10: Gọi $C^k_{(a,b)}$ là tập các hàm khả vi liên tục đến cấp k, $(k = 0, 1, 2,...)$, trong khoảng $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Vì tổng của hai hàm khả vi liên tục và tích của một hằng số với một hàm khả vi liên tục cũng là một hàm khả vi liên tục, vì vậy $C^k_{(a,b)}$ là một không gian véc tơ con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^{(a,b)}$ (Ví dụ 2.2).

2.2.2 Không gian con sinh bởi một họ véc tơ

Định lý 2.3: *Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.2. ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Từ Định lý 2.3 suy ra rằng với mọi tập con S bất kỳ của V luôn tồn tại không gian con W bé nhất của V chứa S. W là giao của tất cả các không gian con của V chứa S.

Định nghĩa 2.4: *Không gian W bé nhất chứa S được gọi là không gian sinh bởi hệ S, ký hiệu $W = \operatorname{span} S$, và S được gọi là hệ sinh của W.*

Khi S hữu hạn thì W được gọi là không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Định lý 2.4: *$W = \operatorname{span} S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.*

Chứng minh: Gọi W' là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Ta chứng minh W' là không gian con bé nhất chứa S, nghĩa là $W' = W$.

1) Trường hợp S hữu hạn: $S = \{v_1,...,v_n\}$ thì $W' = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}\}$.

(i) Với mọi $v_i \in S$ thì $v_i = 1v_i \in W'$ vậy $S \subset W'$.

(ii) Với mọi $u \in W', v \in W'$: $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $v = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \in W'$; Với mọi $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\gamma u + \delta v = \gamma(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \delta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)$$
$$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)v_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)v_n \in W'.$$

Vậy W' là không gian con của V chứa S.

Giả sử W'' là không gian véc tơ con của V chứa S. Với mọi $u \in W'$, $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Vì W'' chứa S nên $v_1,...,v_n \in W''$ $\Rightarrow$ $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in W''$. Do đó $W' \subset W''$.

Nói cách khác W' là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.

Vậy $W' = W = \operatorname{span} S$.

2) Trường hợp S vô hạn tập W' có dạng

$$W' = \left\{ \alpha_1 v_{i_1} + \ldots + \alpha_n v_{i_n} \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}; v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in S; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

Tương tự như trên ta có thể chứng minh W' là không gian véc tơ con nhỏ nhất chứa S.

Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Giả sử $S = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ là hệ sinh của V khi đó:

$$u \in V = \operatorname{span}\{ v_1, \ldots, v_n \} \Leftrightarrow u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \textbf{(2.3)}$$

<u>Ví dụ 2.11</u>: a) Trong không gian véc tơ con $W_1 = \left\{ u = (x, y, 0) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ở Ví dụ 2.6. xét hai véc tơ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$. Khi đó:

$$u \in W_1 \Leftrightarrow u = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = xe_1 + ye_2$$

Vậy $W_1 = \operatorname{span}\{ e_1, e_2 \}$.

b) Không gian véc tơ con $W_2 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + 4z = 0 \right\}$ ở Ví dụ 2.7 có tính chất $u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = 3/2y - 2z$. Vậy

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2} y - 2z, y, z \right) = \left(\frac{3}{2} y, y, 0 \right) + (-2z, 0, z) = \frac{y}{2}(3, 2, 0) + z(-2, 0, 1)$$

Xét $v_1 = (3, 2, 0)$, $v_2 = (-2, 0, 1) \in W_2$, ta được $W_2 = \operatorname{span}\{ v_1, v_2 \}$.

2.2.3 Tổng của một họ không gian véc tơ con

Giả sử $W_1, \ldots, W_n$ là n không gian con của V. Sử dụng định lý 2.2 ta chứng minh được tập $\{ u_1 + \ldots + u_n \in V \,|\, u_i \in W_i, i = 1, \ldots, n \}$ cũng là một không gian véc tơ con của V. Ta gọi không gian véc tơ con này là *tổng của các không gian con* $W_1, \ldots, W_n$ và ký hiệu $W_1 + \ldots + W_n$. Vậy:

$$u \in W_1 + \ldots + W_n \Leftrightarrow u = u_1 + \ldots + u_n;\ u_i \in W_i;\ i = 1, \ldots, n. \quad \textbf{(2.4)}$$

Tuy nhiên, nói chung cách viết trên không duy nhất.

Ta có thể chứng minh được

$$W_1 + \ldots + W_n = \operatorname{span}\left(W_1 \cup \ldots \cup W_n \right) \quad \textbf{(2.5)}$$

Một cách tổng quát ta định nghĩa tổng của một họ các không gian véc tơ con như sau.

Định nghĩa 2.5: Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V. Không gian con sinh bởi $\bigcup_{i\in I} W_i$ được gọi là tổng của các không gian W_i, ký hiệu $\sum_{i\in I} W_i$.

Vậy $\sum_{i\in I} W_i = \operatorname{span}(\bigcup_{i\in I} W_i)$. Theo định lý 2.4 ta có

$$\sum_{i\in I} W_i = \left\{ u_{i_1} + \ldots + u_{i_k} \,\middle|\, u_{i_j} \in W_{i_j}, i_j \in I, j = 1,\ldots,k; k = 1,2,\ldots \right\}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Định nghĩa 2.6: *Nếu mọi $u \in W_1 + \ldots + W_n$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $u = u_1 + \ldots + u_n$; $u_i \in W_i$; $i = 1,\ldots,n$ thì tổng các không gian con này được gọi là tổng trực tiếp*. Lúc đó ta ký hiệu $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Định lý 2.5: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V, khi đó tổng hai không gian con này là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$ khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Chứng minh:

($\Rightarrow$): Giả sử $W_1 \oplus W_2, v \in W_1 \cap W_2$ thì $v = \mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} \in W_1 \oplus W_2$. Do cách viết duy nhất suy ra $v = \mathbf{0}$. Vậy $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

($\Leftarrow$): Giả sử $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ thì

$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2$.

Vậy tổng của hai không gian con là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$.

Ví dụ 2.12: Xét hai không gian véc tơ con W_1, W_2 ở Ví dụ 2.6, 2.7 có:

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3 \;;\; W_1 \cap W_2 = \left\{ \frac{y}{2}(3,2,0) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{(0,0,0)\}.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này không phải là tổng trực tiếp.

Ta cũng có thể nhận thấy rằng cách viết (2.4) không duy nhất. Thật vậy:

$$\begin{aligned} u = (x,y,z) &= (x, y - 4z/3, 0) + (0, 4z/3, z) \in W_1 + W_2 \\ &= (0, y - (2x+4z)/3, 0) + (x, (2x+4z)/3, z) \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.13: Xét W_1 ở Ví dụ 2.6 và $W_4 = \{u = (0,y,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$$W_1 + W_4 = \mathbb{R}^3 \;;\; W_1 \cap W_4 = \{(0,0,0)\}.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này là tổng trực tiếp: $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_4$.

2.3 ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Khái niệm phụ thuộc tuyến tính khái quát hóa từ khái niệm 2 véc tơ cùng phương và 3 véc tơ đồng phẳng.

Hệ véc tơ không phụ thuộc tuyến tính gọi là hệ độc lập tuyến tính. Hệ các véc tơ độc lập tuyến tính có tính chất: nếu một véc tơ bất kỳ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ này thì cách viết đó là duy nhất.

Định nghĩa 2.7: *Cho hệ n véc tơ $S=\{u_1,...,u_n\}$ của V (các véc tơ này có thể trùng nhau). Hệ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu:*

$$\forall \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}:\ \alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0} \Rightarrow\ \alpha_1=...=\alpha_n=0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ $S=\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n=\mathbf{0}$.

Ví dụ 2.14: Hệ $\{e_1,e_2,e_3\}$ trong đó $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ là độc lập, vì nếu $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ thì $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ví dụ 2.15: • Hệ chứa véc tơ $\mathbf{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

• Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1=\alpha u_2$ hoặc $u_2=\alpha u_1$.

• Xét các véc tơ $u_1=(4,-2,8)$, $u_2=(-6,3,-12)$, $u_3=(3,-2,5)$. Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ phụ thuộc tuyến tính ($u_2=-3/2u_1$), nhưng $\{u_1,u_3\}$ độc lập tuyến tính.

Định lý 2.6: *1) Nếu $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính và $u=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$ thì cách viết này là duy nhất.*

2) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

3) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

4) Giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1,...,v_n$. Ngoài ra cách viết $u=\beta_1 v_1+...+\beta_n v_n$ là duy nhất.

Chứng minh: 1) Giả sử $u=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$ và $u=\beta_1 v_1+...+\beta_n v_n$ thì

$$\mathbf{0}=u-u=(\alpha_1-\beta_1)v_1+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n \Rightarrow \alpha_1-\beta_1=...=\alpha_n-\beta_n=0\ .$$

Do đ ó $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$. Vậy cách viết trên là duy nhất.

2) Giả sử hệ $S = \{u_1, ..., u_m\}$ chứa hệ con $\{u_1, ..., u_n\}$ phụ thuộc, khi đó tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$.

Chọn $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, trong đó $\alpha_{n+1} = ... = \alpha_m = 0$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + ... + \alpha_m u_m = \mathbf{0}$.

3) Giả sử hệ $S = \{u_1, ..., u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$.

Giả sử $\alpha_1 \neq 0$ thì $u_1 = -(\alpha_2 / \alpha_1) u_2 - ... - (\alpha_n / \alpha_1) u_n$.

4): ($\Leftarrow$): suy từ 3).

($\Rightarrow$): Giả sử $\{v_1, ..., v_n, u\}$ phụ thuộc khi đó tồn tại các số $\beta_1', ..., \beta_n', \alpha \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\beta_1' v_1 + ... + \beta_n' v_n + \alpha u = \mathbf{0}$, vì hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập nên $\alpha \neq 0$, do đó $u = -\dfrac{\beta_1}{\alpha} v_1 - ... - \dfrac{\beta_n}{\alpha} v_n$. Cách viết duy nhất suy từ tính chất 1).

2.4 HẠNG CỦA MỘT HỆ HỮU HẠN CÁC VÉC TƠ

2.4.1 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Định nghĩa 2.8: *Cho hệ S các véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ con S' của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) *S' là hệ độc lập tuyến tính.*

ii) *Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào S' thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính.*

Nói riêng $\{v_1, ..., v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V nếu hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập và nếu thêm bất kỳ véc tơ khác của V ta có hệ mới là phụ thuộc.

Định lý 2.7: 1) *Nếu S' là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S thì mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của S' và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất (điều này suy từ tính chất 2.6).*

2) *Giả sử $\{v_1, ..., v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1, ..., v_n\}$.*

Thật vậy, nếu $\{v_1, ..., v_n\}$ không tối đại thì tồn tại một véc tơ của S, ta ký hiệu v_{n+1}, sao cho hệ $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ S hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{v_1,...,v_n,v_{n+1},...,v_{n+k}\}$ độc lập tuyến tính tối đại của S.

Ví dụ 2.16: Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại hệ véc tơ $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$:

$$u_1=(3,1,4),\ u_2=(2,-3,5),\ u_3=(5,-2,9),\ u_4=(1,4,-1).$$

- Hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ độc lập vì không tỉ lệ.
- Có thể kiểm tra được: $u_3=u_1+u_2$; $u_4=u_1-u_2$.

Vậy $\{u_1,u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Tương tự có thể kiểm tra được $\{u_1,u_3\}$, $\{u_1,u_4\}$, $\{u_2,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ cũng là các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Qua ví dụ ta nhận thấy một hệ véc tơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại. Tuy nhiên số các véc tơ của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều bằng nhau. Ta sẽ chứng minh điều này trong mục tiếp sau.

2.4.2 Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Định lý 2.8 (Định lý thế Steinitz (Xtêi-nít)): *Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n\le k$.*

Chứng minh: Giả sử $S=\{v_1,...,v_n\}$, $R=\{u_1,...,u_k\}$. Ta sẽ chứng minh rằng có thể thay dần các véc tơ của hệ R bằng các véc tơ của hệ S để có các hệ R_1, R_2,... mà mỗi véc tơ của hệ S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính của R_1, R_2,....

Thật vậy, ta có $v_1=\alpha_1u_1+...+\alpha_ku_k$, $v_1\neq 0$ (vì S độc lập) nên $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\alpha_1\neq 0$ (có thể đánh lại số thứ tự của R), suy ra $u_1=\frac{1}{\alpha_1}v_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2-...-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}u_k$.

Xét hệ $R_1=\{v_1,u_2,...,u_k\}$. Rõ ràng mọi véc tơ của S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_1.

Tương tự ta có $v_2=\beta_1v_1+\beta_2u_2+...+\beta_ku_k$, vì $\{v_1,v_2\}$ độc lập nên $\beta_2,...,\beta_k\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\beta_2\neq 0$.

Khi đó $$u_2=\frac{1}{\beta_2}v_2-\frac{\beta_1}{\beta_2}v_1-\frac{\beta_3}{\beta_2}u_3-...-\frac{\beta_k}{\beta_2}u_k.$$

Xét hệ $R_2 = \{v_1, v_2, u_3, ..., u_k\}$, mọi véc tơ của S cũng còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_2.

Nếu $n > k$, tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R_k = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, là hệ con của S. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập tuyến tính. Vậy $n \le k$.

<u>Định lý 2.9</u>: *Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn S các véc tơ của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Chứng minh: Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ và $\{v_{j_1}, ..., v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S lần lượt có k phần tử và n phần tử. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Áp định lý thế 2.8 ta có $n \le k$ và $k \le n$, vậy $n = k$.

<u>Định nghĩa 2.9</u>: *Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S được gọi là hạng (rank) của S, ký hiệu $r(S)$.*

Qui ước hệ chỉ có véc tơ $\mathbf{0}$ có hạng là 0.

2.5 CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

<u>Định nghĩa 2.10</u>: *Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một cơ sở của V.*

<u>Định lý 2.10</u>: *Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V.*

(ii) *Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V.*

(iii) *Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất:*

$$u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \ , \ \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Chứng minh: (i)⇒(ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở và tính chất 2.7.

(ii)⇒(iii): Suy từ tính chất 2.6 và tính chất 2.7.

(iii)⇒(i): Rõ ràng $\{e_1, ..., e_n\}$ là hệ sinh.

Giả sử $x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \mathbf{0}$, ta cũng có $\mathbf{0} = 0e_1 + ... + 0e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = ... = x_n = 0$. Vậy $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ sinh độc lập, do đó là một cơ sở.

Định nghĩa 2.11: $(x_1,...,x_n)$ *trong* (2.8) *được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở* $\{e_1,...,e_n\}$.

Ta ký hiệu tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là $(u)_{\mathscr{B}}$.

Vậy nếu u thỏa mãn (2.8) thì

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x_1,...,x_n) \quad \textbf{(2.9)}$$

Ví dụ 2.17: Hai hệ véc tơ $\mathscr{B}=\{e_1,e_2\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2\}$, với $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$ và $e'_1=(1,1),\ e'_2=(4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Với mọi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $u=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=xe_1+ye_2$.

Giả sử $u=(x,y)=x'e'_1+y'e'_2=x'(1,1)+y'(4,3)=(x'+4y',x'+3y')$.

Do đó $\begin{cases}x'+4y'=x\\ x'+3y'=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=4y-3x\\ y'=x-y\end{cases}$

Vậy:

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y). \quad \textbf{(2.10)}$$

Cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,e_2\}$ được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Định lý 2.11: Giả sử V là không gian véc tơ hữu hạn sinh và $\{v_1,...,v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của V. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

Chứng minh: Giả sử V có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S=\{v_1,...,v_k\}$ không phải là cơ sở thì S không phải là hệ sinh, theo tính chất 2.6-3) tồn tại véc tơ, ta ký hiệu v_{k+1}, sao cho hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k+m\le n$ (theo Bổ đề 2.8). Vậy $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm.

Hệ quả 2.12: *Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.*

Định lý 2.13: *Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.8 ta suy ra hai cơ sở bất kỳ của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa 2.12: *Số véc tơ của một cơ sở của V được gọi là số chiều của V, ký hiệu* $\dim V$. *Quy ước* $\dim\{\mathbf{0}\}=0$.

Ví dụ 2.18: Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ trong đó:

$$e_1=(1,0,...,0),\ e_2=(0,1,...,0),...,\ e_n=(0,0,...,1) \qquad \textbf{(2.11)}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbb{R}^n=n$.

Ví dụ 2.19: Hệ $\mathscr{B}=\{1,t,...,t^n\}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$, gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbf{P}_n=n+1$.

Nhận xét 2.1: Không gian $\mathbf{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ không hữu hạn sinh. Thật vậy, hệ $\{1,t,t^2,....\}$ có vô hạn véc tơ và độc lập tuyến tính nên không thể là hữu hạn sinh.

Định lý 2.14: *Giả sử* $\dim V=n$ *và* $S=\{v_1,...,v_m\}$ *là hệ m véc tơ của* V. *Khi đó:*

(i) *Nếu hệ* S *độc lập tuyến tính thì* $m\le n$.

(ii) *Nếu hệ* S *là hệ sinh của thì* $m\ge n$.

(iii) *Nếu* $m=n$ *thì hệ* S *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* S *là hệ sinh.*

Chứng minh: Gọi $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Áp dụng Định lý 2.8 cho hai hệ $\mathscr{B}$ và S suy ra các điều cần chứng minh.

Định lý 2.15: Giả sử W_1,W_2 là hai không gian con của V thì

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2) \qquad \textbf{(2.12)}$$

Đặc biệt:

$$\dim(W_1\oplus W_2)=\dim W_1+\dim W_2 \qquad \textbf{(2.13)}$$

Chứng minh: Giả sử $\{e_1,...,e_l\}$ là một cơ sở của $W_1\cap W_2$ (nếu $W_1\cap W_2=\varnothing$ thì $l=0$). Theo định lý 2.11 ta có thể bổ sung thêm để $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m\}$ là một cơ sở của W_1 và $\{e_1,...,e_l,v_1,...,v_k\}$ là một cơ sở của W_2. Với mọi $v\in W_1+W_2$ thì:

$$v=(x_1+x'_1)e_1+...+(x_l+x'_l)e_l+y_1u_1+...+y_mu_m+z_1v_1+...+z_kv_k.$$

Vậy $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m,v_1,...,v_k\}$ là hệ sinh của W_1+W_2.

Mặt khác, giả sử $x_1e_1+...+x_le_l+y_1u_1+...+y_mu_m+z_1v_1+...+z_kv_k=0$ (*)

thì $x_1e_1+...+x_le_l+y_1u_1+...+y_mu_m=-z_1v_1-...-z_kv_k\in W_1\cap W_2$.

$\Rightarrow\ -z_1v_1-...-z_kv_k=t_1e_1+...+t_le_l\in W_1\cap W_2 \Rightarrow\ z_1v_1+...+z_kv_k+t_1e_1+...+t_le_l=0$

Vì $\{e_1,...,e_l,v_1,...,v_k\}$ độc lập $\Rightarrow z_1=...=z_k=t_1=...=t_l=0$

Thay vào (*) $\Rightarrow\ x_1=...=x_l=y_1=...=y_m=0$.

Vậy $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m,v_1,...,v_k\}$ là một cơ sở của W_1+W_2.

Do đó: $\dim W_1+\dim W_2=2l+m+k=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

<u>Định lý 2.16</u>: *Giả sử S là hệ hữu hạn các véc tơ của V, S_0 là một hệ con của S. Đặt $W=\operatorname{span}S$. Khi đó:*

(i) *S_0 là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S khi và chỉ khi S_0 là một cơ sở của W, do đó $r(S)=\dim W$.*

(ii) *Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ S:*

- *Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ S;*
- *Cộng vào một véc tơ của hệ S một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của S; thì hệ S biến thành hệ S'.*

Đặt $W'=\operatorname{span}S'$ thì $W=W'$, do đó $r(S)=r(S')=\dim W$.

Chứng minh: (i) Giả sử S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S thì S_0 cũng sinh ra W, do đó S_0 là một cơ sở của W. Ngược lại nếu S_0 là một cơ sở của W thì S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của W, do đó cũng là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

$r(S)=$ số véc tơ của $S_0=\dim W$.

(ii) Có thể kiểm chứng rằng $S'\subset W$ do đó $W'\subset W$. Tương tự cũng có $W\subset W'$.

Vậy $W=W'\Rightarrow r(S)=r(S')$.

<u>Nhận xét 2.2</u>: Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

<u>Cách 1</u>: Áp dụng định lý 2.16 bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó.

Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một cột, sau đó biến đổi lên các cột của bảng số (đổi vị trí 2 cột, nhân một số khác 0 vào 1 cột, cộng vào 1 cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác) để đưa bảng số tương ứng về bảng số mà các phần tử khác 0 có dạng hình thang. Khi đó các cột khác 0 tạo thành hệ véc tơ độc lập tuyến tính tối đại cần tìm.

$$\begin{array}{ccccc} * & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & * & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & * & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

trong đó * là các phần tử khác 0, các phần tử # có thể bằng 0.

Cách 2: Áp dụng tính chất 2.6 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \mathbf{0}$,
2. Giả sử $v_{i_j} \neq \mathbf{0}$, loại các véc tơ v_i tỉ lệ với v_{i_j},
3. Giả sử $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}\right\}$ độc lập, khi đó $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}, v_j\right\}$ độc lập khi và chỉ khi v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}\right\}$.

Ví dụ 2.20: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$, $v_3 = (1,3,1,3)$, $v_4 = (1,2,0,2)$, $v_5 = (1,2,1,2)$.

Giải: • Cách1:

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{cases}$$

(Cột 1 $\rightarrow$ cột 1, cột 2 - cột1 $\rightarrow$ cột 2, cột 3 - cột1 $\rightarrow$ cột 3, cột 4 - cột1 $\rightarrow$ cột 4, cột 5 - cột4 $\rightarrow$ cột 5)

$$\rightarrow \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

(Cột 3 + cột 2 $\rightarrow$ cột 3, cột 4 +(1/2) cột 2 - cột 5 $\rightarrow$ cột 4).

(-1/2cột 2 $\rightarrow$ cột 2, cột 5 $\rightarrow$ cột 3).

Vậy hệ véc tơ có hạng là 3.

• Cách 2: v_1, v_2 không tỉ lệ nên độc lập. Nếu $v_3 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=2,\ y=-1.$$

Vậy $v_3 = 2v_1 - v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc.

Nếu $v_4 = xv_1 + yv_2$ thì $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$, hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ độc lập.

Nếu $v_5 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ thì $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+y=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 3/2,\ y=-1/2, z=0.$

Nghĩa là $v_5 = 3/2v_1 - 1/2v_2$. Do đó $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc.

Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1) Tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa trong các trường hợp sau có phải là không gian véc tơ không? Chỉ rõ tiên đề mà phép toán không thoả mãn.

a) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \\ \alpha(x,y,z)=(2\alpha x,2\alpha y,2\alpha z);\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'+1,z+z'+1) \\ \alpha(x,y,z)=(0,0,0);\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$.

2.2) Xét các hàm số xác định trong đoạn $[a,b]\subset\mathbb{R}$ với các phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với số thực. Tập các hàm số sau có phải là không gian véc tơ không?

a) Tập các hàm liên tục trong đoạn $[a,b]$.

b) Tập các hàm số khả vi trong khoảng (a,b) (có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a,b)$).

c) Tập các hàm số bị chặn trong đoạn $[a,b]$.

d) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=0$.

e) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=1$.

f) Tập các hàm số không âm trong đoạn $[a,b]$.

2.3) Tập hợp các véc tơ có dạng sau có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

a) Các véc tơ có dạng $(x,0,0)$.

b) Các véc tơ có dạng $(x,1,1)$.

c) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=0$.

d) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=1$.

e) Các véc tơ có dạng (x,y,z), $2x-y+z=0$, $x+y-4z=0$.

2.4) Tìm x,y,z nếu $(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$.

2.5) Hãy biểu diễn véc tơ u thành tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,15)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,4,-7,7)$; $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$.

2.6) Hãy xác định λ sao cho u là tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,\lambda)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,3,5)$; $v_1=(3,2,5)$, $v_2=(2,4,7)$, $v_3=(5,6,\lambda)$.

2.7) Viết đa thức $p=-3+4x+x^2$ thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức :

$$p_1=5-2x+x^2,\ p_2=-3x+2x^2,\ p_3=3+x.$$

2.8) Chứng minh $\{v_1,v_2,v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của u trong cơ sở này.

a) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$.

b) $u=(6,2,-7)$; $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$.

2.9) Mỗi hệ véc tơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

a) $u=(1,1,1)$, $v=(2,2,0)$, $w=(3,0,0)$.

b) $u=(2,-1,3)$, $v=(4,1,2)$, $w=(8,-1,8)$.

c) $u=(3,1,4)$, $v=(2,-3,5)$, $w=(5,-2,9)$, $s=(1,4,-1)$.

2.10) Các hệ véc tơ dưới đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

a) $u=(4,-2,6)$, $v=(6,-3,9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u=(2,-3,1)$, $v=(3,-1,5)$, $w=(1,-4,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u=(5,4,3)$, $v=(3,3,2)$, $w=(8,1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u=(4,-5,2,6)$, $v=(2,-2,1,3)$, $w=(6,-3,3,9)$, $s=(4,-1,5,6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

2.11) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$

a) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,0)$.

b) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $d=a+b$ và $c=a-b$.

c) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $a=b=c=d$.

2.12) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi hệ các véc tơ sau:

a) $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,2,-1/2)$.

b) $v_1=(1,0,0,-1)$, $v_2=(2,1,1,0)$, $v_3=(1,1,1,1)$, $v_4=(1,2,3,4)$, $v_5=(0,1,2,3)$.

c) $v_1=(1,1,1,1,0)$, $v_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $v_3=(2,2,0,0-1)$, $v_4=(1,1,5,5,2)$,

$v_5=(1,-1,-1,0,0)$.

2.13) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a,b]$ và thoả mãn $f'+4f=0$ tạo thành không gian con của $C[a,b]$. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con này.

2.14) Cho 3 véc tơ v_1,v_2,v_3 của không gian véc tơ V. Chứng minh:

a) Nếu $\{v_1,v_2\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$ cũng độc lập.

b) Nếu $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

2.15) Chứng minh nếu hai hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ và $\{u_1,...,u_m\}$ của không gian véc tơ V mà mỗi véc tơ của hệ này đều biểu thị thành tổ hợp tuyến tính của hệ kia thì hai hệ đó có cùng hạng.

2.16) Giả sử U,V và W là ba không gian véc tơ con của một không gian véc tơ. Chứng minh rằng $(U\cap V)+(U\cap W)\subset U\cap(V+W)$.

2.17) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ: $u_1=(1,2,-1,3)$, $u_2=(2,4,1,-2)$, $u_3=(3,6,3,-7)$;

Và $v_1=(1,2,-4,11)$, $v_2=(2,4,-5,14)$. Đặt U, V là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ lần lượt sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1,u_2,u_3\}$ và $\{v_1,v_2\}$. Chứng minh rằng $U=V$.

2.18) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x-y-z=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở của $V\cap W, V, W$.

2.19) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| y=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Xác định $V\cap W, V+W$. Tổng này có phải là tổng trực tiếp không?

2.20) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét:

$$V=\operatorname{span}\{(1,0,0,2);(0,2,1,-1);(-1,6,3,7)\},\ W=\operatorname{span}\{(3,2,0,1);(1,2,1,1)\}$$

Tìm số chiều của $V, W, V\cap W, V+W$.

2.21) Tìm điều kiện của x,y,z để $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ thuộc không gian véc tơ con sinh bởi: $u_1=(2,1,0)$, $u_2=(1,-1,2)$, $u_3=(0,3,-4)$.

2.22) Chứng minh rằng $W=\left\{(x,y,0) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ là không gian véc tơ con sinh bởi hai véc tơ u,v trong đó :

a) $u=(1,2,0)$, $v=(0,1,0)$.

b) $u=(2,-1,0)$, $v=(1,3,0)$.

2.23) W_1,W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$W_1=\left\{(x,y,z) \middle| x,y,z\in\mathbb{R}; x=y=z\right\};\ W_2=\left\{(0,y,z) \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$.

2.24) Cho hai véc tơ $u_1=(1,-3,2)$, $u_2=(2,-1,1)$ của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết $(1,7,-4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

b) Viết $(2,-5,4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

c) Tìm các giá trị của k để $(1,k,5)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

d) Tìm điều kiện x, y, z để (x, y, z) viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

2.25) Tìm $W_1 \cap W_2$, trong đó : $W_1 = \{(x, y, 0) | \; x, y \in \mathbb{R}\}$. W_2 là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hai vec tơ $(1,2,3)$ và $(1,-1,1)$.

2.26) W_1, W_2, W_3 là ba không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$W_1 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}; x + y + z = 0\}; W_2 = \{(x, y, z) | \; x, y, z \in \mathbb{R}; x = z\};$$
$$W_3 = \{(0, 0, z) | \; z \in \mathbb{R}\}.$$

Chứng minh rằng: a) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$; b) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_3$; c) $\mathbb{R}^3 = W_2 + W_3$.

Trong các tổng trên trường hợp nào là tổng trực tiếp.

2.27) Giả sử W là không gian véc tơ con của không gian véc tơ n chiều V. Chứng minh rằng $\dim W \le n$.

$\dim W = n$ khi và chỉ khi $W = V$.

2.28) Cho W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ xác định như sau:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) | x, y, z, t \in \mathbb{R}; y + z + t = 0\}; W_2 = \{(x, y, z, t) | x, y, z, t \in \mathbb{R}; x + y = 0, z = 2t\}$$

Tìm một cơ sở và chiều của các không gian véc tơ con W_1, W_2 và $W_1 \cap W_2$.

2.29) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con 2 chiều của $\mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

2.30) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn điều kiện $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ và $W_1 \not\subset W_2$. Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

2.31) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V sao cho $W_1 \cup W_2 = V$. Chứng minh $W_1 = V$ hoặc $W_2 = V$.

2.32) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V. Chứng minh rằng hai tính chất bất kỳ trong ba tính chất sau kéo theo tính chất thứ ba:

1) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$,

2) $W_1 + W_2 = V$,

3) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

2.33) Chứng minh rằng mọi không gian con W của V đều có bù tuyến tính, nghĩa là tồn tại không gian con Z sao cho $V = W \oplus Z$. Hỏi Z có duy nhất không?

2.34) Cho hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ của không gian véc tơ V. Chứng minh rằng hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{R}v_i$ là tổng trực tiếp và $v_i \neq \mathbf{0}$ với mọi $i = 1,...,n$.

2.35) Giả sử $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một hệ độc lập tuyến tính của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là hệ độc lập tuyến tính của V.

b) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một hệ sinh của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là hệ sinh của V.

c) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một cơ sở của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là một cơ sở của V.

2.36) Giả sử $k_1,...,k_n$ là n số thực cho trước, trong $\mathbb{R}^n$ xét tập:

$$W = \left\{ v = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| k_1x_1 + ...k_nx_n = 0 \right\}$$

a) Chứng minh W là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng $\dim W = n - 1$ nếu $k_1,...,k_n$ không đồng thời bằng 0.

2.37) Cho hệ véc tơ $M = \{v_1,...,v_p,u_1,...,u_q\}$ của không gian véc tơ V. Giả sử hệ $M_1 = \{v_1,...,v_p\}$ có hạng là m và hệ $M_2 = \{u_1,...,u_q\}$ có hạng n. Chứng minh hạng của $M \leq m + n$.

2.38) Giả sử V là không gian véc tơ (hữu hạn sinh):

a) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{B} \subset \mathscr{S}$.

b) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V và hệ độc lập tuyến tính $\mathscr{U}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{S}$, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{S}$.

c) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V và hệ độc lập tuyến tính $\mathscr{U}$ của V, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{S} \cup \mathscr{U}$.