CHƯƠNG I

MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

Toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các qui luật lập luận của tư duy lô gich hình thức. Các qui luật cơ bản của lô gich hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì lô gích hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững lô gich hình thức không những giúp sinh viên học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận một cách chính xác. Học tốt môn lô gich là cơ sở để học tốt đại số Boole, vận dụng để giải các bài toán về sơ đồ công tắc rơle, kỹ thuật số và công nghệ thông tin. Yêu cầu của phần này là phải nắm vững khái niệm mệnh đề toán học, các phép liên kết mệnh đề và các tính chất của chúng.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lô gich hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lô gích này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Trên cơ sở tích Descartes (Đề-các) của hai tập hợp ta có khái niệm quan hệ hai ngôi mà hai trường hợp đặc biệt là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Quan hệ tương đương được dùng để phân một tập nào đó thành các lớp không giao nhau, gọi là phân hoạch của tập đó. Quan hệ đồng dư môđulô p (modulo) là một quan hệ tương đương trong tập các số nguyên. Tập thương của nó là tập $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên môđulô p. Tập $\mathbb{Z}_p$ có nhiều ứng dụng trong lý thuyết mật mã, về an toàn mạng. Quan hệ thứ tự được dùng để sắp xếp các đối tượng cần xét theo một thứ tự dựa trên tiêu chuẩn nào đó. Quan hệ $\leq$ trong các tập hợp số là các quan hệ thứ tự.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Sử dụng khái niệm ánh xạ và tập hợp ta khảo sát các vấn đề của giải tích tổ hợp, đó là các phương pháp đếm số phần tử của tập hợp. Giải tích tổ hợp được áp dụng để giải quyết các bài toán xác suất thống kê và toán học rời rạc.

Chúng ta có thể thực hiện các phép toán: cộng các số, hàm số, đa thức, véc tơ hoặc nhân các số, hàm số, đa thức... Như vậy ta có thể thực hiện các phép toán này trên các đối tượng khác nhau. Cái chung cho mỗi phép toán cộng hay nhân ở trên là các tính chất giao hoán, kết hợp, phân bố... Một tập hợp có phép toán thoả mãn điều kiện nào đó được gọi là có cấu trúc đại số tương ứng. Các cấu trúc đại số quan trọng thường gặp là nhóm, vành, trường, không gian véc tơ. Đại số học là một ngành của toán học nghiên cứu các cấu trúc đại số. Lý thuyết Nhóm được Evarist Galois (Galoa) đưa ra vào đầu thế kỉ 19 trong công trình "Trong những điều kiện nào thì một phương trình đại số có thể giải được?", trong đó Galoa vận dụng lý thuyết nhóm để giải quyết. Trên cơ sở lý thuyết nhóm người ta phát triển các cấu trúc đại số khác.

Việc nghiên cứu các cấu trúc đại số giúp ta tách ra khỏi các đối tượng cụ thể mà thấy được cái chung của từng cấu trúc để khảo sát các tính chất, các đặc trưng của chúng. Chẳng hạn, tập các ma trận vuông cùng cấp, các tự đồng cấu tuyến tính, các đa thức ... có cấu trúc vành không nguyên nên có những tính chất chung nào đó.

Các cấu trúc đại số có tính khái quát hoá và trừu tượng cao vì vậy người ta nghĩ rằng khó áp dụng vào thực tiễn. Tuy nhiên thực tế cho thấy đại số Boole được ứng dụng rất hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán về sơ đồ mạch điện, trong công nghệ thông tin và kỹ thuật số. Lý thuyết nhóm được ứng dụng vào cơ học lượng tử. Lý thuyết vị nhóm và vành được ứng dụng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết Ôtômát.

Chương 1 trình bày một cách sơ lược các cấu trúc: Nhóm, vành, trường và đại số Boole. Các chương còn lại của cuốn sách này liên quan đến đại số tuyến tính.

1.1 SƠ LƯỢC VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ

1.1.1 Mệnh đề

Lô gích mệnh đề là một hệ thống lôgích đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các *mệnh đề* mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái $p, q, r...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là thể hiện của p.

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgích mệnh đề.

1.1.2 Các phép liên kết lôgích mệnh đề

1. Phép phủ định (negation): *Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$ đọc là không p*. Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng.

2. Phép hội (conjunction): *Hội của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q)*. Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng.

3. Phép tuyển (disjunction): *Tuyển của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (đọc là p hoặc q).* $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai.

4. Phép kéo theo (implication): *Mệnh đề p kéo theo q*, ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

5. Phép tương đương (equivalence): Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là *mệnh đề p tương đương q*, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một *công thức mệnh đề*. Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị*.

Từ định nghĩa của các phép liên kết mệnh đề ta có các bảng chận trị tương ứng sau

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Như vậy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 với mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức. Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" thay cho "$\Leftrightarrow$".

1.1.3 Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ *luật phủ định kép.*

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$.

3) $p \wedge q \equiv q \wedge p,\ p \vee q \equiv q \vee p$ *luật giao hoán.*

4) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *luật kết hợp.*

5) $\left[p \wedge (q \vee r)\right] \equiv \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right]$;

$\left[p \vee (q \wedge r)\right] \equiv \left[(p \vee q) \wedge (p \vee r)\right]$ *luật phân phối.*

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng *luật bài trung.*

$p \wedge \overline{p}$ luôn sai *luật mâu thuẫn.*

7) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$; $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ *luật De Morgan.*

8) $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *luật phản chứng.*

9) $p \vee p \equiv p;\ p \wedge p \equiv p$ *luật lũy đẳng.*

10) $p \vee (p \wedge q) \equiv p;\ p \wedge (p \vee q) \equiv p$ *luật hấp thu.*

1.2 TẬP HỢP

1.2.1 Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết. Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học. Một cách trực quan, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các vật, các đối tượng nào đó mà mỗi vật hay đối tượng là một phần tử của tập hợp. Tập hợp được đặc trưng tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp. Có thể lấy ví dụ về các tập hợp có nội dung toán học hoặc không toán học. Chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên là tập hợp mà các phần tử của nó là các số 0, 1, 2, 3, ... còn tập hợp các cuốn sách trong thư viện của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông là tập hợp mà các phần tử của nó là các cuốn sách.

Ta thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in hoa $A, B, \ldots X, Y, \ldots$ còn các phần tử bởi các chữ thường $x, y, \ldots$ Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$, nếu x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

1.2.2 Cách mô tả tập hợp

Ta thường mô tả tập hợp theo các cách sau:

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Ví dụ 1.1: Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1,3,5,7,9\}$.

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1,1\}$.

b) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta mô tả tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.2: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P = \{ n \in \mathbb{N} \mid n = 2m,\ m \in \mathbb{N} \}$.

Tập hợp có thể được mô tả bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử thông qua khái niệm ***hàm mệnh đề***.

Hàm mệnh đề xác định trong tập hợp D là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x \in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgích (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai).

Giả sử $S(x)$ là một mệnh đề xác định trong tập hợp D, ta gọi tập hợp các phần tử $x \in D$ sao cho $S(x)$ đúng là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$ và ký hiệu $\{ x \in D \mid S(x) \}$.

Ví dụ 1.3: **i**) Xét hàm mệnh đề $S(x)$ xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$: "$x^2 + 1$ là một số nguyên tố" thì $S(1), S(2)$ đúng và $S(3), S(4)$ sai ...

ii) Mỗi một phương trình có thể xem là một hàm mệnh đề có miền đúng là tập nghiệm.

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 0 \} = \{-1, 1\}.$$

c) Giản đồ Venn: Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là *giản đồ Venn.*

1.2.3 Các tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, ...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}=\left\{ p/q \,\middle|\, q \neq 0,\ p,q \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$ (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ).
- Tập các số phức $\mathbb{C}=\left\{ z = x+iy \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R};\ i^2=-1 \right\}$.

1.2.4 Tập con

Định nghĩa 1.1: *Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu*

$$A \subset B \text{ hoặc } B \supset A.$$

Khi A là tập con của B thì ta còn nói A chứa trong B hay B chứa A hay B bao hàm A.

Ta có: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2: *Hai tập A, B bằng nhau, ký hiệu $A=B$:*

$$A = B \text{ khi và chỉ khi } A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

Như vậy để chứng minh $A \subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Do đó để chứng minh $A = B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Định nghĩa 1.3: *Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$.*

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Ví dụ 1.4: Xét $X=\left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x^2 = 4, x \text{ lẻ} \right\}$ thì $X=\varnothing$.

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$. Vậy $A \in \mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A \subset X$. Tập X là tập con của chính nó, vì vậy X là phần tử lớn nhất và $\varnothing$ là phần tử bé nhất của $\mathscr{P}(X)$.

$$A \in \mathscr{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X \qquad \textbf{(1.1)}$$

Ví dụ 1.5: $X=\{a,b,c\}$ có $\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},X\}$.

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có $2^3=8$ phần tử. Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử (bài tập 19).

1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp

1. Phép hợp: *Hợp của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A \cup B$, *là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập* A, B.

$$\left(x \in A \cup B\right) \Leftrightarrow \left(\left(x \in A\right) \vee \left(x \in B\right)\right). \qquad \textbf{(1.2)}$$

2. Phép giao: *Giao của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A \cap B$, *là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập* A, B.

$$\left(x \in A \cap B\right) \Leftrightarrow \left(\left(x \in A\right) \wedge \left(x \in B\right)\right). \qquad \textbf{(1.3)}$$

3. Hiệu của hai tập: *Hiệu của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A \setminus B$ *hay* $A - B$, *là tập gồm các phần tử thuộc* A *nhưng không thuộc* B.

$$\left(x \in A \setminus B\right) \Leftrightarrow \left(\left(x \in A\right) \wedge \left(x \notin B\right)\right). \qquad \textbf{(1.4)}$$

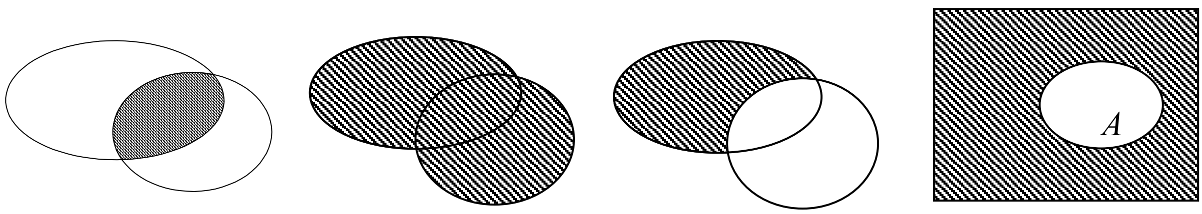
Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là *tập phổ dụng* U. Tập $U \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U và được ký hiệu là C_U^B hoặc $\overline{B}$.

<u>Ví dụ 1.5</u>: Xét các tập $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,d,e,f\}$, $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

Ta có : $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A \cap B = \{b, d\}$, $A \setminus B = \{a,c\}$,

$$C_U^A = \{e,f,g,h\},\ C_U^B = \{a,c,g,h\}.$$

Ta có thể minh họa các phép toán trên với các tập tương ứng là phần gạch chéo của giản đồ Venn:



$A \cap B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ C_U^B

Áp dụng lôgích mệnh đề (tính chất 1.3) ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ $\quad$ *tính lũy đẳng*

2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ $\quad$ *tính giao hoán.*

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\quad$ *tính kết hợp.*

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *tính phân bố.*

Giả sử A, B là hai tập con của U thì:

5. $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$

6. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *luật De Morgan*

8. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$.

1.2.6 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trong tập D có miền đúng $D_{S(x)} = \left\{ x \in D \middle| S(x) \right\}$. Khi đó:

a) Mệnh đề $\forall x \in D, S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là *lượng từ phổ biến.*

Nếu không sợ nhầm lẫn ta thường bỏ qua $x \in D$ và viết tắt $\forall x, S(x)$ thay cho $\forall x \in D, S(x)$.

b) Mệnh đề $\exists x \in D, S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\exists$(đọc là tồn tại) được gọi là *lượng từ tồn tại.*

Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp đúng.

c) Người ta mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists! x \in D, S(x)$ (đọc là tồn tại duy nhất $x \in D, S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử.

d) Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x \in D, S(x)} \Leftrightarrow \left(\exists x \in D, \overline{S(x)} \right)$$

$$\overline{\exists x \in D, S(x)} \Leftrightarrow \left(\forall x \in D, \overline{S(x)} \right) \qquad \textbf{(1.5)}$$

<u>**Ví dụ 1.6**</u>: Theo định nghĩa của giới hạn

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0; \forall x:\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Sử dụng tính chất hằng đúng $(p\Rightarrow q)\equiv(\overline{p}\vee q)$ (xem tính chất 1.3) ta có

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ tương đương với

$$\overline{\left(\,0<|x-a|<\delta\,\right)}\vee\left(|f(x)-L|<\varepsilon\right).$$

Vậy phủ định của $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ là

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0;\exists x:\ \left(\,0<|x-a|<\delta\,\right)\wedge\left(|f(x)-L|\geq\varepsilon\right).$$

1.2.7 Phép hợp và giao suy rộng

Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp. Mở rộng công thức (1.2), (1.3) ta định nghĩa:

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó.

$\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc mọi tập A_i.

$$\left(x\in\bigcup\nolimits_{i\in I} A_i\right)\Leftrightarrow\left(\exists i_0\in I;\ x\in A_{i_0}\right) \qquad \textbf{(1.6)}$$

$$\left(x\in\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\right)\Leftrightarrow\left(\forall i\in I;\ x\in A_i\right). \qquad \textbf{(1.7)}$$

<u>**Ví dụ 1.7**</u>: $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\leq x\leq n/(n+1)\right\}$; $B_n=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1/(n+1)\leq x<1+1/(n+1)\right\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=[0;1)\ ,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=[0;1]\ .$$

1.3 TÍCH DESCARTES VÀ QUAN HỆ

1.3.1 Tích Descartes của các tập hợp

<u>**Định nghĩa 1.4**</u>: *Tích Descartes của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X\times Y$, gồm các phần tử có dạng (x,y) trong đó $x\in X$ và $y\in Y$.* Vậy

$$X\times Y=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\in X \text{ và } y\in Y\right\}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

<u>**Ví dụ 1.8**</u>: $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2\}$; $X\times Y=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X\times Y$ có $n\cdot m$ phần tử.

Tích Descartes của n tập hợp $X_1, X_2, ..., X_n$ được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, x_i \in X_i,\, i = 1, 2, ..., n \right\}. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Nhận xét 1.1:

1. Khi $X_1 = ... = X_n = X$ thì ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times ... \times X}_{n \text{ lần}}$.

2. Tích Descartes $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i \in I} X_i$.

3. Giả sử $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$; $(x'_1, ..., x'_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ thì

$$(x_1, ..., x_n) = (x'_1, ..., x'_n) \Leftrightarrow x_i = x'_i, \forall i = 1, ..., n \qquad \textbf{(1.10)}$$

4. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán.

1.3.2 Quan hệ hai ngôi

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong toán học ta thường xét đến các quan hệ. Chẳng hạn hai bạn sinh viên có thể có quan hệ đồng hương, quan hệ cùng một họ …, hai số nguyên có quan hệ chia hết, quan hệ nguyên tố cùng nhau, quan hệ nhỏ hơn … Mỗi quan hệ này có thể xác định bởi tập các cặp phần tử có quan hệ với nhau. Khái quát hóa điều này ta có định nghĩa quan hệ như sau.

Định nghĩa 1.5: *Cho tập $X \neq \varnothing$, mỗi tập con $\mathscr{R} \subset X \times X$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X.*

Với $x, y \in X$ và $(x, y) \in \mathscr{R}$ ta nói x có quan hệ với y theo quan hệ $\mathscr{R}$ và ta viết $x\mathscr{R}y$.

Ví dụ 1.9: Ta xét các quan hệ sau trên tập các số:

$\mathscr{R}_1 : x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow x \vdots y$ (x chia hết cho y), $\forall x, y \in \mathbb{N}$

$\mathscr{R}_2 : x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow (x, y) = 1$ (x và y nguyên tố cùng nhau) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\mathscr{R}_3 : x\mathscr{R}_3 y \Leftrightarrow x \leq y$ (x nhỏ hơn hay bằng y) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\mathscr{R}_4 : x\mathscr{R}_4 y \Leftrightarrow x - y \vdots m$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Ta ký hiệu $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$ và đọc là x đồng dư với y môđulô m.

Định nghĩa 1.6: *Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên X được gọi là có tính:*

a) Phản xạ, nếu $x\mathscr{R}x, \forall x \in X$;

b) Đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ mà $x\mathscr{R}y$ thì cũng có $y\mathscr{R}x$;

c) Bắc cầu, nếu $\forall x, y, z \in X$ *mà* $x\mathscr{R}y$ *và* $y\mathscr{R}z$ *thì cũng có* $x\mathscr{R}z$ *;*

d) Phản đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ *mà* $x\mathscr{R}y$ *và* $y\mathscr{R}x$ *thì* $x = y$.

Ví dụ 1.10: $\mathscr{R}_1$ phản đối xứng, bắc cầu nhưng không đối xứng, không phản xạ (vì 0 không chia hết cho 0).

$\mathscr{R}_2$ đối xứng, không phản xạ, không phản xứng, không bắc cầu.

$\mathscr{R}_3$ phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

$\mathscr{R}_4$ phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

1.3.3 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.8: *Quan hệ hai ngôi* $\mathscr{R}$ *trên* $X \neq \varnothing$ *được gọi là quan hệ tương đương nếu có ba tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.*

Theo thói quen, với quan hệ tương đương $\mathscr{R}$ ta thường viết $x \sim y(\mathscr{R})$ hoặc $x \sim y$ thay cho $x\mathscr{R}y$.

Ta định nghĩa và ký hiệu *lớp tương đương* của phần tử $x \in X$ là tập hợp

$$\overline{x} = \left\{ y \in X \middle| y \sim x \right\} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Mỗi phần tử bất kỳ của lớp tương đương $\overline{x}$ được gọi là phần tử đại diện của $\overline{x}$. Người ta còn ký hiệu lớp tương đương của x là $cl(x)$.

Hai lớp tương đương bất kỳ thì hoặc bằng nhau hoặc không giao nhau, nghĩa là $\overline{x} \cap \overline{x'}$ hoặc bằng $\overline{x} = \overline{x'}$ hoặc bằng $\varnothing$, nói cách khác các lớp tương đương tạo thành một phân hoạch các tập con của X.

$$\overline{x} \cap \overline{x'} = \left[\begin{array}{l} \overline{x} = \overline{x'} \\ \varnothing \end{array} \right. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Tập tất cả các lớp tương đương được gọi là *tập hợp thương*, ký hiệu $X/\sim$. Vậy

$$X/\sim = \left\{ \overline{x} \middle| x \in X \right\} \qquad \textbf{(1.13)}$$

Ví dụ 1.11: Quan hệ $\mathscr{R}_4$ trong ví dụ 1.9 là một quan hệ tương đương gọi là quan hệ đồng dư môđulô m trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Nếu $x \sim y$, ta viết $x \equiv y (\operatorname{mod} m)$.

Ta ký hiệu tập thương (1.13) gồm m số đồng dư *môđulô m*:

$$\mathbb{Z}_m = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1} \right\}. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Ví dụ 1.12: Quan hệ "véc tơ $\vec{u}$ bằng véc tơ $\vec{v}$" là một quan hệ tương đương của tập hợp các véc tơ tự do trong không gian. Nếu ta chọn gốc O cố định thì mỗi lớp tương đương bất kỳ đều có thể chọn véc tơ đại diện dạng $\overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 1.14: Quan hệ tam giác đồng dạng trong không gian Euclide là quan hệ tương đương.

1.3.4 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.8: *Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên $X \neq \varnothing$ được gọi là quan hệ thứ tự nếu có ba tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.*

Ví dụ 1.13:

1) Trong $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ quan hệ "$x \le y$" là một quan hệ thứ tự.

2) Trong $\mathbb{N}^*$ quan hệ "$x \,\vdots\, y$" là một quan hệ thứ tự.

3) Trong $\mathcal{P}(X)$ (tập hợp tất cả các tập con của X) quan hệ "tập con" ($A \subset B$) là một quan hệ thứ tự.

Khái niệm quan hệ thứ tự được khái quát hoá từ khái niệm lớn hơn (hay đứng sau) trong các tập số, vì vậy theo thói quen người ta cũng dùng ký hiệu "$\le$" cho quan hệ thứ tự bất kỳ.

Quan hệ thứ tự "$\le$" trên tập X được gọi là *quan hệ thứ tự toàn phần* nếu hai phần tử bất kỳ của X đều so sánh được với nhau.

$$\forall x, y \in X:\ x \le y \text{ hoặc } y \le x \qquad \textbf{(1.15)}$$

Quan hệ thứ tự không toàn phần được gọi là *quan hệ thứ tự bộ phận.*

Tập X với quan hệ thứ tự "$\le$" được gọi là tập *được sắp*. Nếu "$\le$" là quan hệ thứ tự toàn phần thì X được gọi là tập *được sắp toàn phần hay sắp tuyến tính.*

Ví dụ 1.14: Các tập $(\mathbb{N},\le)$, $(\mathbb{Z},\le)$, $(\mathbb{Q},\le)$, $(\mathbb{R},\le)$ được sắp toàn phần, còn $(\mathbb{N}^*,\vdots)$ và $\left(\mathcal{P}(X),\subset\right)$ được sắp bộ phận (nếu X có nhiều hơn 1 phần tử).

Định nghĩa 1.9: *Cho tập được sắp $(X,\le)$ và tập con $A \subset X$. Tập A được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại $q \in X$ sao cho $a \le q$, với mọi $a \in A$. Khi đó q được gọi là một chặn trên của A.*

Hiển nhiên rằng nếu q là một chặn trên của A thì mọi $q' \in X$ mà $q \le q'$ đều là chặn trên của A. Phần tử chặn trên nhỏ nhất q của A (theo nghĩa $q \le q'$, với mọi chặn trên q' của A) được gọi là *cận trên* của A và được ký hiệu $q = \sup A$. Rõ ràng phần tử cận trên nếu tồn tại là duy nhất.

$$q = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ (\forall a \in A : a \le q') \Rightarrow q \le q' \end{cases} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Tương tự tập A được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại $p \in X$ sao cho $p \le a$, với mọi $a \in A$. Phần tử chặn dưới lớn nhất được gọi là *cận dưới* của A và được ký hiệu $\inf A$. Cận dưới nếu tồn tại cũng duy nhất.

$$p = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ (\forall a \in A : p' \le a) \Rightarrow p' \le p \end{cases} \qquad \textbf{(1.17)}$$

Nói chung $\sup A$, $\inf A$ chưa chắc là phần tử của A. Nếu $q = \sup A \in A$ thì q được gọi là *phần tử lớn nhất* của A ký hiệu $q = \max A$

$$q = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ q \in A \end{cases} \qquad \textbf{(1.18)}$$

Tương tự nếu $p = \inf A \in A$ thì p được gọi là *phần tử bé nhất* của A ký hiệu $p = \min A$

$$p = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ p \in A \end{cases} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Từ tính chất liên tục của tập số thực $\mathbb{R}$ có thể chứng minh được rằng với mọi tập con $A \subset \mathbb{R}$:

- Nếu A bị chặn trên thì tồn tại cận trên $\sup A$

$$q = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : q - \varepsilon \le a \end{cases} \qquad \textbf{(1.20)}$$

- Nếu A bị chặn dưới thì tồn tại cận dưới $\inf A$

$$p = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \le p + \varepsilon \end{cases} \qquad \textbf{(1.21)}$$

Ví dụ 1.15: Tập $A = [0;1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ có $1 = \sup A \notin A$, $\inf A = 0 \in A$, do đó không tồn tại $\max A$ nhưng tồn tại $\min A = \inf A = 0$.

Ví dụ 1.16: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền D. Áp dụng công thức (1.18), (1.19) ta có công thức xác định giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m.

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}; \quad m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : m \le f(x) \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}.$$

1.4 ÁNH XẠ

1.4.1 Định nghĩa và ví dụ

Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x$ với $x \in \mathbb{N}$ là quy luật cho ứng

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, ...$$

Ta có thể định nghĩa ánh xạ một cách trực quan như sau:

<u>Định nghĩa 1.10</u>: *Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y = f(x)$ của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:*

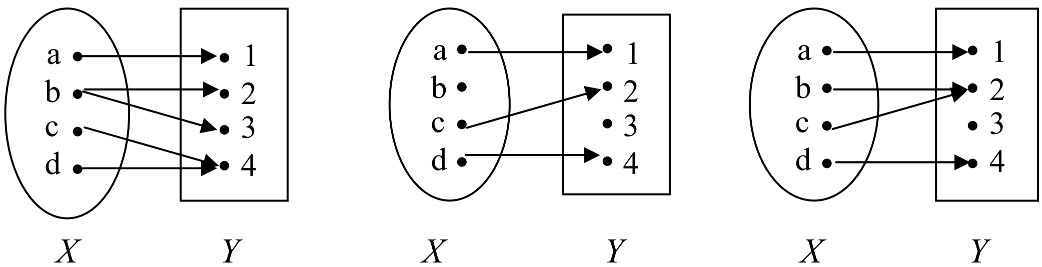
(i) *Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $y = f(x) \in Y$,*

(ii) *Với mỗi $x \in X$ ảnh $f(x)$ là duy nhất.*

Ta ký hiệu $\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$ hay $\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích.

<u>Ví dụ 1.17</u>:



Tương ứng a) Tương ứng b) Tương ứng c)

Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện (ii). Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện (i) của định nghĩa. Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ X vào Y.

Hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: X' \to Y'$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu thỏa mãn

$$\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x); \forall x \in X \end{cases} \quad \textbf{(1.22)}$$

<u>Ví dụ 1.18</u>: Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào $\mathbb{R}$. Chẳng hạn:

Hàm lôgarit $y = \ln x$ *là ánh xạ* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \ln x$$

Hàm căn bậc hai $y = \sqrt{x}$ *là ánh xạ* $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}\,.$$

Định nghĩa 1.11: *Xét ánh xạ* $f : X \to Y$ *:*

- *Cho* $A \subset X$*, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của* A *qua ánh xạ* f

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ *được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của* f.

Khi f *là hàm số thì* $f(X)$ *được gọi là miền giá trị .*

- *Cho* $B \subset Y$*, ta ký hiệu và gọi tập sau là nghịch ảnh của* B *qua ánh xạ* f

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \qquad \textbf{(1.24)}$$

Trường hợp B là tập hợp chỉ có một phần tử $\{y\}$ thì ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$. Vậy

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid y = f(x) \}. \qquad \textbf{(1.25)}$$

Ví dụ 1.19: *Xét ví dụ ánh xạ* $f : X \to Y$ *là tương ứng c) của ví dụ 1.17.*

Cho $A = \{a, b, c\} \subset X$, $B = \{2, 3, 4\} \subset Y$ *thì*

$$f(A) = \{1, 2\},\ \operatorname{Im} f = \{1, 2, 4\},\ f^{-1}(B) = \{b, c, d\},\ f^{-1}(2) = \{b, c\}.$$

1.4.2 Phân loại các ánh xạ

Định nghĩa 1.12:

1) *Ánh xạ* $f : X \to Y$ *được gọi là đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt.* Nghĩa là:

$$\forall x_1, x_2 \in X;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hay một cách tương đương:

$$\forall x_1, x_2 \in X:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \textbf{(1.26)}$$

2) *Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X.*

Vậy f là một toàn ánh khi thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau:

$$f(X) = Y \text{ hoặc } \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \qquad \textbf{(1.27)}$$

Mọi ánh xạ $f: X \to Y$ bất kỳ là toàn ánh lên tập giá trị $f(X)$.

3) Ánh xạ $f: X \to Y$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \qquad \textbf{(1.28)}$$

Nhận xét 1.2: Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$y = f(x),\ y \in Y \qquad \textbf{(1.29)}$$

trong đó ta xem x là biến ẩn và y là tham biến.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.29) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.

♦ Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (1.29) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.2) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

Ví dụ 1.20: Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$x \mapsto y = f(x) = x(x+1)$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$.

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình luôn có 2 nghiệm thực

$$x_1 = \left(-1 + \sqrt{1+4y}\right)\big/2, x_2 = \left(-1 - \sqrt{1+4y}\right)\big/2.$$

Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f là đơn ánh.

Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh.

Ví dụ 1.21: Các hàm số đơn điệu chặt:

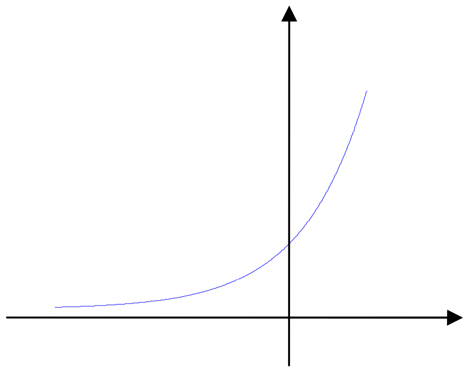
- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Ví dụ 1.22: Xét 3 ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định và có các đồ thị tương ứng như sau :

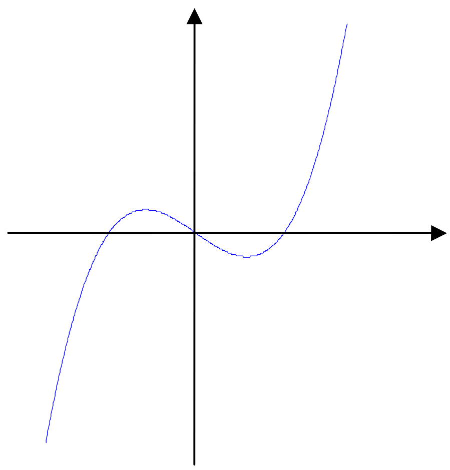
Hàm số $f(x)=2^x$ có đạo hàm $f'(x)=2^x\ln 2>0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy f là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình (1.29) có không quá 1 nghiệm.



Hàm số $g(x)=x^3-3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị.

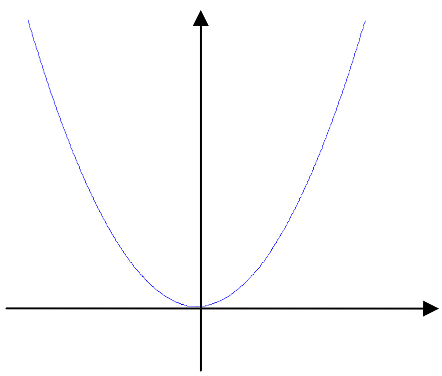
Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (1.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm. Vậy f là toàn ánh nhưng không đơn ánh.



Hàm số $h(x)=x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị ≥ 0.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình (1.29) có 2 nghiệm khi $y>0$ và vô nghiệm khi $y<0$.

Vậy h là không toàn ánh và không đơn ánh.



Ví dụ 1.23: Giả sử A là tập con của X thì ánh xạ

$$\begin{aligned} i_A : A &\to X \\ x &\mapsto i_A(x) = x \end{aligned}$$

là một đơn ánh gọi là *phép nhúng chính tắc.*

Đặc biệt khi $A = X$ ánh xạ i_A là một song ánh, ký hiệu Id_X và gọi là ánh xạ đồng nhất của X.

1.4.3 Ánh xạ ngược của một song ánh

Định nghĩa 1.13: Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh, theo (1.28) với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. *Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f và được ký hiệu f^{-1}.* Vậy

$$f^{-1} : Y \to X \text{ và } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x). \qquad \textbf{(1.30)}$$

Có thể chứng minh được f^{-1} cũng là một song ánh.

Ví dụ 1.24: *Hàm mũ cơ số a :* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit cùng cơ số

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Ví dụ 1.25: *Các hàm lượng giác ngược*

Xét hàm $\begin{aligned} \sin : [-\pi/2;\pi/2] &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh. Hàm ngược được ký hiệu

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1;1] &\to [-\pi/2;\pi/2] \\ y &\mapsto \arcsin y \end{aligned}$$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x,\ \forall x \in [-1;1], y \in [-\pi/2;\pi/2].$$

Tương tự hàm $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ đơn điệu giảm chặt có hàm ngược

$$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi];$$

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x.$$

Hàm ngược arctg, $\mathrm{arccotg}$ được xác định như sau

$x = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (-\pi/2;\pi/2)$.

$x = \operatorname{arccotg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{cotg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (0;\pi)$.

1.4.4 Hợp của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.14: *Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z, gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$.* Vậy $g \circ f : X \to Z$ có công thức xác định ảnh

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \textbf{(1.31)}$$

Ví dụ 1.26: *Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x$ $g(x) = 2x^2 + 4$. Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.*

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4),\ g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4.$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

Nếu $f: X \to Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Hơn nữa ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $f: X \to Y$ là một song ánh khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ $g: Y \to X$ sao cho $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, lúc đó $g = f^{-1}$.

1.4.5 Lực lượng của một tập hợp

Khái niệm lực lượng của tập hợp có thể xem như là sự mở rộng khái niệm số phần tử của tập hợp. Tập X có n phần tử nếu có thể liệt kê dạng $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Vậy X có n phần tử khi tồn tại song ánh từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ lên X.

Định nghĩa 1.15: *Hai tập hợp X, Y được gọi là cùng lực lượng nếu tồn tại song ánh từ X lên Y.*

Tập cùng lực lượng với tập $\{1, 2, ..., n\}$ được gọi là có lực lượng n. Vậy X có lực lượng n khi và chỉ khi X có n phần tử. n còn được gọi là bản số của X, ký hiệu $\operatorname{Card} X$ hay $|X|$. Quy ước lực lượng của $\varnothing$ là 0.

Định nghĩa 1.16: *Tập có lực lượng n hoặc 0 được gọi là các tập hữu hạn. Tập không hữu hạn được gọi là tập vô hạn. Tập có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay hữu hạn được gọi là tập đếm được.*

Nhận xét 1.3:

1) Tập vô hạn đếm được là tập cùng lực lượng với $\mathbb{N}$.

2) Bản thân tập $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được.

3) Kết quả nổi tiếng nhất của Cantor về tập vô hạn là đã chỉ ra rằng tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập vô hạn đếm được, còn tập các số thực $\mathbb{R}$ không đếm được.

4) Tập vô hạn được đặc trưng bởi tính chất: Tập A vô hạn khi và chỉ khi tồn tại tập con $B \subset A$, $B \neq A$ cùng lực lượng với A.

5) Giả sử X, Y là hai tập hữu hạn cùng lực lượng. Khi đó ánh xạ $f : X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh, do đó là một song ánh.

1.5 SƠ LƯỢC VỀ PHÉP ĐẾM, GIẢI TÍCH TỔ HỢP- NHỊ THỨC NEWTON

1.5.1 Sơ lược về phép đếm

Các kết quả sau được suy trực tiếp từ tính chất của tập hữu hạn và ánh xạ:

a) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, *(công thức cộng)* **(1.32)**

b) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, *(công thức nhân)* **(1.33)**

c) $|\{f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$, *(chỉnh hợp có lặp)* **(1.34)**

d) $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$, **(1.35)**

e) Nếu $f : A \to B$ song ánh thì $|A| = |B|$. **(1.36)**

Công thức cộng (1.32) thường được sử dụng trong trường hợp đặc biệt khi A, B rời nhau (thỏa mãn $A \cap B = \varnothing$), lúc đó $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Công thức cộng (1.32) mở rộng cho trường hợp k tập đôi một rời nhau:

$$|A_1 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + ... + |A_k| \quad \textbf{(1.37)}$$

Một nhóm các đối tượng được phân thành k nhóm rời nhau và có số các phần tử tương ứng là $n_1, ..., n_k$ thì tổng số các đối tượng cần tính là $n_1 + \cdots + n_k$

Công thức nhân (1.33) có thể mở rộng cho k tập bất kỳ

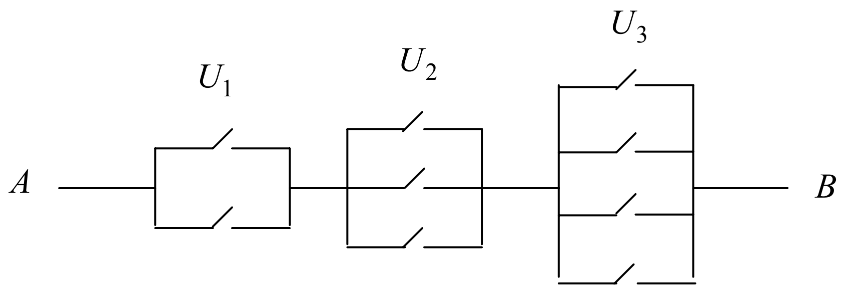
$$|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k| \quad \textbf{(1.38)}$$

Hoặc nếu một hành động H gồm k giai đoạn $A_1, ..., A_k$. Mỗi giai đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i phương án thì cả thảy có $n_1 \times ... \times n_k$ phương án thực hiện H.

Ví dụ 1.27: Cho mạch điện theo sơ đồ dưới đây. Hỏi:

a) Có bao nhiêu trạng thái của mạch.

b) Có bao nhiêu trạng thái có thể của mạch để có dòng điện chạy từ A đến B



Giải: Áp dụng công thức nhân ta có:

a) Số các trạng thái của mạch $2^2.2^3.2^4 = 2^9 = 512$.

b) Ở U_1 có 2^2 trạng thái nhưng có 1 trạng thái dòng điện không qua được, do đó ở U_1 có 3 trạng thái dòng điện qua được. Tương tự ở U_2 có $2^3 - 1$ và ở U_3 có $2^4 - 1$ trạng thái dòng điện qua được. Vậy số các trạng thái của mạch có dòng điện chạy từ A đến B là $3 \times 7 \times 15 = 315$.

1.5.2 Hoán vị, phép thế

Định nghĩa 1.17: *Cho tập hữu hạn $E = \{x_1, x_2, ... x_n\}$. Mỗi song ánh từ E lên E được gọi là một phép thế, còn ảnh của song ánh này được gọi là một hoán vị n phần tử của E.*

Nếu ta xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó thì mỗi hoán vị là một sự đổi chỗ các phần tử này.

Đặc biệt nếu $E = \{1, 2, ... n\}$ thì mỗi phép thế được ký hiệu bởi ma trận

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.39)}$$

trong đó hàng trên là các số từ 1 đến n sắp theo thứ tự tăng dần, hàng dưới là ảnh tương ứng của nó qua song ánh σ. Còn $[\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)]$ là hoán vị của phép thế σ.

Ví dụ 1.28: $[4 \quad 2 \quad 1 \quad 3]$ là hoán vị từ phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có:

$$\sigma(1) = 4,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1,\ \sigma(4) = 3.$$

Tập hợp $\{1, 2\}$ có hai hoán vị là:

$$[1\ 2]\ \textit{và}\ [2\ 1].$$

Tập hợp $\{1,2,3\}$ có sáu hoán vị là:

$$[1\ 2\ 3],\ [2\ 1\ 3],\ [3\ 1\ 2],\ [1\ 3\ 2],\ [2\ 3\ 1]\ \textit{và}\ [3\ 2\ 1].$$

Với tập $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ thì có n cách chọn giá trị $\sigma(x_1)$, $n-1$ cách chọn giá trị $\sigma(x_2)$ .... cho một phép thế σ bất kỳ.

Vậy có $n(n-1)(n-2)...1=n!$ hoán vị (phép thế) của tập n phần tử.

1.5.3 Chỉnh hợp

Cho tập hợp hữu hạn có n phần tử $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tập hợp hữu hạn $B=\{1,2,...,p\}$.

Định nghĩa 1.18: *Một chỉnh hợp lặp chập p các phần tử của E là ảnh của một ánh xạ từ B vào E.*

Ta cũng có thể xem một chỉnh hợp lặp chập p như một bộ gồm p thành phần là các phần tử có thể trùng nhau của E. Nói cách khác, một chỉnh hợp lặp chập p là một phần tử của tích Descartes E^p.

Vậy số các chỉnh hợp lặp chập p của n vật là n^p (công thức 1.34).

Ví dụ 1.29: Cho n vật $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tiến hành bốc có hoàn lại p lần theo cách sau:

Bốc lần thứ nhất từ tập E được x_{i_1}, ta trả x_{i_1} lại cho E và bốc tiếp lần thứ hai...

Mỗi kết quả sau p lần bốc $(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_p})$ là một chỉnh hợp có lặp n chập p.

Định nghĩa 1.19: *Một chỉnh hợp (không lặp) chập p gồm n phần tử của $E\,(p\le n)$ là ảnh của một đơn ánh từ B vào E.*

Hai chỉnh hợp n chập p là khác nhau nếu:

- hoặc chúng có ít nhất một phần tử khác nhau,
- hoặc gồm p phần tử như nhau nhưng có thứ tự khác nhau.

Như vậy ta có thể xem mỗi chỉnh hợp là một bộ có p thành phần gồm các phần tử khác nhau của E hay có thể xem như một cách sắp xếp n phần tử của E vào p vị trí.

Có n cách chọn vào vị trí thứ nhất, $n-1$ cách chọn vào vị trí thứ hai, ... và $n-p+1$ cách chọn vào vị trí thứ p.

Vậy số các chỉnh hợp chập p của n phần tử là

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \textbf{(1.40)}$$

1.5.4 Tổ hợp

Định nghĩa 1.20: *Một tổ hợp chập p của tập E có n phần tử là một cách lấy ra đồng thời p phần tử từ E. Như vậy ta có thể xem một tổ hợp chập p của n phần tử là một tập con p phần tử của tập có n phần tử E.*

Nếu ta hoán vị p phần tử của một tổ hợp thì ta có các chỉnh hợp khác nhau của cùng p phần tử này. Vậy ứng với một tổ hợp p phần tử có đúng $p!$ chỉnh hợp của p vật này. Ký hiệu C_n^p là số các tổ hợp n chập p thì

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad \textbf{(1.41)}$$

Ví dụ 1.30: a) Có bao nhiêu cách bầu trực tiếp một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn mà không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

b) Có bao nhiêu cách bầu một ban chấp hành gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

Giải: a) Mỗi kết quả bầu trực tiếp là một chỉnh hợp chập 3 của 50 phần tử.

Vậy có $A_{50}^3 = 50\times 49\times 48 = 117.600$ cách bầu trực tiếp.

b) Mỗi kết quả bầu một ban chấp hành là một tổ hợp chập 3 của 50 phần tử.

Vậy có $C_{50}^3 = \dfrac{50!}{3!47!} = \dfrac{50\times 49\times 48}{6} = 19.600$ cách bầu ban chấp hành lớp.

Ví dụ 1.31: Có bao nhiêu số tự nhiên viết dưới dạng thập phân có n chữ số $(n\ge 3)$ trong đó có đúng hai chữ số 8.

Giải: Giả sử N là số tự nhiên có n chữ số mà chữ số thứ nhất bên trái khác chữ số 0 và có đúng hai chữ số 8.

♦ Trường hợp 1: Nếu chữ số thứ nhất bên trái là chữ số 8 thì có $n-1$ vị trí để đặt chữ số 8 thứ hai, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-2$ vị trí còn lại. Vậy có đúng $(n-1)9^{n-2}$ số N thuộc loại này.

♦Trường hợp 2: Nếu chữ số thứ nhất bên trái không phải là chữ số 8 thì có C_{n-1}^2 vị trí để đặt 2 chữ số 8, có 8 cách chọn chữ số cho vị trí thứ nhất, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-3$ vị trí khác vị trí thứ nhất và hai vị trí đã chọn cho chữ số 8. Vậy có đúng $C_{n-1}^2 \cdot 8 \cdot 9^{n-3} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 8 \cdot 9^{n-3}$ số N thuộc loại này.

Sử dụng công thức cộng ta suy ra số các số tự nhiên cần tìm là:

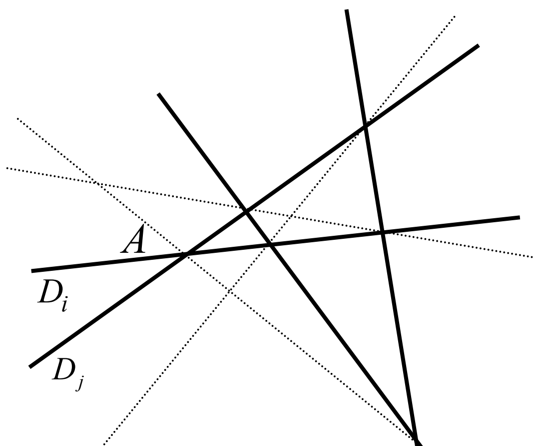
$$(n-1)9^{n-2} + 4(n-1)(n-2)9^{n-3} = (4n+1)(n-1)9^{n-3}.$$

Ví dụ 1.32: Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau và các giao điểm này khác nhau $(n \geq 4)$.

a) Tìm số các giao điểm của chúng.

b) Tìm số các đường thẳng mới được tạo bởi các giao điểm trên.

Giải:



a) Số các giao điểm của n đường thẳng bằng số các cặp của n đường thẳng này. Vậy có C_n^2 giao điểm.

b) Xét tại điểm A bất kỳ trong C_n^2 giao điểm của câu a). Tồn tại đúng hai đường trong n đường trên đi qua A là $D_i, D_j; i < j$.

Trên mỗi đường có đúng $n-1$ điểm trong số C_n^2 giao điểm của câu a).

Vậy trên D_i, D_j có $2(n-1)-1$ điểm, do đó có

$C_n^2 - (2(n-1)-1) = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ đường thẳng mới nối đến A.

Vì mỗi đường thẳng mới đều nối hai điểm ở câu a) nên số đường thẳng mới là:

$$\frac{1}{2}C_n^2\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

1.5.5 Nhị thức Newton

Xét đa thức bậc n: $(x+1)^n=\underbrace{(x+1)(x+1)...(x+1)}_{n \text{ thừa số}}$

Khai triển đa thức này ta được:

$$(x+1)^n=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+1$$

Hệ số của x^p bằng số cách chọn p thừa số trong n thừa số trên. Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập p của n phần tử, do đó $a_p=C_n^p$.

Vậy $$(x+1)^n=C_n^nx^n+C_n^{n-1}x^{n-1}+...+C_n^px^p+...+C_n^0$$

Thay $x=a/b$ (nếu $b\neq 0$) ta có:

$$(a+b)^n=C_n^na^n+C_n^{n-1}a^{n-1}b+...+C_n^0b^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^pa^pb^{n-p} \qquad \textbf{(1.42)}$$

Công thức này được gọi là *nhị thức Newton*, đúng với mọi $a,b\in\mathbb{C}$ (kể cả trường hợp $b=0$).

<u>**Ví dụ 1.33**</u>: Cho tập con A có p phần tử của tập E có n phần tử $(p<n)$. Hãy đếm số các cặp (X,Y) các tập con của E thỏa mãn điều kiện :

$$X\cup Y=E,\ X\cap Y\supset A \qquad \textbf{(1.43)}$$

Giải: Ký hiệu $B=E\setminus A$.

Đặt $$\mathscr{A}=\{(X,Y)\,|\,X\cup Y=E,\ X\cap Y\supset A\}$$

$$\mathscr{B}=\{(X',Y')\,|\,X'\subset B,Y'\subset B;\ X'\cup Y'=B\}$$

Tương ứng $f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$; $(X,Y)\mapsto(X\cap B,Y\cap B)$ là một song ánh.

Mặt khác $X'\subset B,Y'\subset B$: $X'\cup Y'=B\Leftrightarrow B\setminus X'\subset Y'$.

Vậy số các cặp (X,Y) thoả mãn điều kiện (1.43) cần tìm bằng bản số của tập

$$\{(X'',Y')\,|\,X''\subset B,Y'\subset B,X''\subset Y'\}.$$

Với mỗi tập $Y'\subset B$ có bản số y' thì bản số của tập $\left\{X''\middle| X''\subset Y'\right\}$ là $2^{y'}$; Số các tập con $Y'\subset B$ có y' phần tử là $C_{n-p}^{y'}$. Áp dụng công thức cộng và nhị thức Newton suy ra bản số cần tìm là $\sum_{y'=0}^{n-p} 2^{y'} C_{n-p}^{y'} = 3^{n-p}$.

1.6 CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.6.1 Luật hợp thành trong

Định nghĩa 1.21: *Một luật hợp thành trong của tập $X \neq \varnothing$ là ánh xạ từ $X \times X$ vào X.*

Ta thường ký hiệu
$$\begin{aligned} *: X\times X &\to X \\ (x,y) &\mapsto x*y \end{aligned}$$

Luật hợp thành trong kết hợp hai phần tử x, y của X thành một phần tử $x*y$ của X vì vậy luật hợp thành trong còn được gọi là *phép toán hai ngôi.*

Ví dụ 1.34: Phép cộng và phép nhân là các luật hợp thành trong của các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1.35: Phép cộng véc tơ theo quy tắc hình bình hành là phép toán trong của tập R_3 các véc tơ tự do trong không gian, nhưng tích vô hướng không phải là phép toán trong vì $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \notin R_3$.

Định nghĩa 1.22: *Luật hợp thành trong * của tập X được gọi là:*

1) Có tính kết hợp nếu $\forall x,y,z \in X : x*(y*z) = (x*y)*z$

2) Có tính giao hoán nếu $\forall x,y \in X : x*y = y*x$

3) Có phần tử trung hoà (hay có phần tử đơn vị) là $e\in X$ nếu

$$\forall x \in X : x*e = e*x = x$$

*4) Giả sử * có phần tử trung hoà $e \in X$. Phần tử $x' \in X$ được gọi là phần tử đối của $x\in X$ nếu $x*x' = x'*x = e$.*

Ta dễ dàng thấy rằng phần tử trung hoà có phần tử đối là chính nó.

Các phép hợp thành trong hai ví dụ trên đều có tính kết hợp và giao hoán. Số 0 là phần tử trung hoà đối với phép cộng và 1 là phần tử trung hoà đối với phép nhân trong. Véc tơ $\vec{0}$ là phần tử trung hoà của phép toán cộng véc tơ trong R_3.

Mọi phần tử x trong $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ đều có phần tử đối của phép + là $-x$. Phần tử đối của $x\neq 0$ ứng với phép nhân trong $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ là $1/x$.

Mọi phần tử khác 0 trong $\mathbb{N}$ không có phần tử đối đối với phép cộng, mọi phần tử khác 1 trong $\mathbb{Z}$ không có phần tử đối đối với phép nhân.

Định lý 1.4: *Giả sử $*$ là một luật hợp thành trong của tập $X \neq \varnothing$. Ta có các kết quả sau:*

1) Phần tử trung hoà nếu tồn tại là duy nhất.

*2) Nếu * có tính kết hợp, thì phần tử đối của mỗi phần tử là duy nhất.*

*3) Nếu * có tính kết hợp và phần tử a có phần tử đối thì có luật giản ước: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ và phương trình $a * x = b$ có duy nhất nghiệm $x = a' * b$ với a' là phần tử đối của a.*

Chứng minh:

1) Giả sử e và e' là hai phần tử trung hoà thì $e' = e' * e = e$ (dấu "=" thứ nhất có được do e là phần tử trung hoà, còn dấu "=" thứ hai là do e' là phần tử trung hoà).

2) Giả sử a có hai phần tử đối là a' và a'', khi đó:

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

3) $a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y) \Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y \Rightarrow x = y.$ ■

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các luật hợp thành trong có tính giao hoán bởi dấu "+", khi đó phần tử trung hoà được ký hiệu là **0** và phần tử đối của x là $-x$. Nếu ký hiệu luật hợp thành bởi dấu nhân "." thì phần tử trung hoà được ký hiệu **1** và gọi là phần tử đơn vị, phần tử đối của x ký hiệu x^{-1} và gọi là phần tử nghịch đảo của x.

1.6.2 Nhóm

Định nghĩa 1.23: *Giả sử G là tập khác trống với luật hợp thành *, cặp $(G,*)$ được gọi là một vị nhóm nếu thoả mãn hai điều kiện sau:*

G_1: ** có tính kết hợp.*

G_2: ** có phần tử trung hoà e.*

Vị nhóm $(G,*)$ là một nhóm nếu thoả mãn thêm điều kiện:

G_3: *Mọi phần tử của G đều có phần tử đối.*

Nhóm $(G,*)$ được gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel nếu :

G_4: ** có tính giao hoán.*

Ví dụ 1.36: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$ là hai vị nhóm giao hoán. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ *là các nhóm Abel.*

Nhận xét 1.4: 1) Một nhóm là tập khác rỗng G với luật hợp thành * thoả mãn G1, G2, G3, nhưng nếu * đã xác định và không sợ nhầm lẫn thì ta nói tắt nhóm G thay cho nhóm $(G,*)$.

2) Cho nhóm giao hoán $(G,+)$ và A,B là hai tập con của G, ta ký hiệu:

$$A+B=\left\{a+b \middle| a\in A, b\in B\right\};\quad a+B=\left\{a+b \middle| b\in B\right\} \qquad \textbf{(1.44)}$$

Định nghĩa 1.24: *Đồng cấu nhóm từ nhóm $(G,*)$ vào nhóm $(G',\square)$ là ánh xạ $f:G\to G'$ sao cho*

$$\forall x,y\in G: f(x*y)=f(x)\square f(y). \qquad \textbf{(1.45)}$$

Nếu f đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì f được gọi là đơn cấu nhóm (toàn cấu, đẳng cấu, một cách tương ứng).

Ví dụ 1.37: $\log_a:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R};\ 0<a\neq 1$ là một đẳng cấu nhóm từ nhóm $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$ lên nhóm $(\mathbb{R},+)$.

Định nghĩa 1.25: *Tập con G' được gọi là nhóm con của nhóm $(G,*)$ nếu thỏa mãn 3 điều kiện sau:*

i) $\forall x,y\in G' \Rightarrow x*y\in G'$

ii) $e\in G'$

iii) $\forall x\in G' \Rightarrow x'\in G'$.

Định lý 1.6: *$(G,*)$ là một nhóm, $\varnothing\neq G'\subset G$. G' là một nhóm con của G khi và chỉ khi $\forall x,y\in G'\Rightarrow x*y'\in G'$.*

Ví dụ 1.38: $(\mathbb{Z},+)$ là nhóm con của $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$. $(\mathbb{C},+)$.

1.6.3 Vành

Định nghĩa 1.26: *Giả sử trên tập $A\neq\varnothing$ có hai luật hợp thành trong ký hiệu bởi dấu cộng và dấu nhân, khi đó $(A,+,\cdot)$ được gọi là một vành nếu:*

A_1*: $(A,+)$ là một nhóm Abel,*

A_2*: Luật nhân có tính kết hợp,*

A_3*: Luật nhân có tính phân phối hai phía đối với luật cộng, nghĩa là:*

$\forall x,y,z\in A:\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ *phân phối bên trái*

$\forall x,y,z\in A:\ (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ *phân phối bên phải*

Nếu thoả mãn thêm điều kiện:

A_4*: Luật nhân có tính giao hoán thì* $(A,+,\cdot)$ *là vành giao hoán.*

A_5*: Luật nhân có phần tử đơn vị là* 1 *thì* $(A,+,\cdot)$ *là vành có đơn vị.*

Nhận xét 1.5:

1) Tồn tại vành giao hoán nhưng không có đơn vị và ngược lại.

2) Ta nói tắt vành A thay cho vành $(A,+,\cdot)$.

Định nghĩa 1.27:

1) Phần tử $x \neq \mathbf{0}$ *của* A *được gọi là ước trái của* $\mathbf{0}$ *nếu tồn tại* $y \in A, y \neq \mathbf{0}$ *sao cho* $x \cdot y = \mathbf{0}$ *(*$\mathbf{0}$ *là phần tử trung hoà của luật cộng của vành* $(A,+,\cdot)$*). Tương tự* $x \neq \mathbf{0}$ *của* A *được gọi là ước phải của* $\mathbf{0}$ *nếu tồn tại* $y \in A, y \neq \mathbf{0}$ *sao cho* $y \cdot x = \mathbf{0}$.

x *được gọi là ước của* $\mathbf{0}$ *nếu* x *là ước trái hoặc ước phải của* $\mathbf{0}$.

2) Vành giao hoán không có ước của $\mathbf{0}$ *được gọi là vành nguyên.*

Vậy vành $(A,+,\cdot)$ là vành nguyên khi và chỉ khi mọi $x, y \in A$ sao cho $x \cdot y = \mathbf{0}$ thì $x = \mathbf{0}$ hoặc $y = \mathbf{0}$.

Ví dụ 1.39:

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một vành nguyên.

2) Ký hiệu $C_{[a;b]}$ là tập hợp các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $C_{[a;b]}$ xác định như sau:

$$\forall f, g \in C_{[a;b]} : (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

Ta có thể kiểm chứng được rằng với hai phép toán này thì $C_{[a;b]}$ là một vành giao hoán có đơn vị và có ước của $\mathbf{0}$.

3) $\left(K[x],+,\cdot\right)$ là một vành nguyên, trong đó $K[x]$ là tập các đa thức của biến x có hệ số thuộc vào vành số $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ví dụ 1.40: *Tập* $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\text{mod}\, n$ *các số đồng dư môđulô* n.

Ta có thể chứng minh được rằng: $\begin{cases} x \equiv x'(\text{mod}\, n) \\ y \equiv y'(\text{mod}\, n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \equiv x' + y'(\text{mod}\, n) \\ xy \equiv x'y'(\text{mod}\, n) \end{cases}$

Vì vậy ta có thể định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{Z}_n$ bởi:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \quad \text{và} \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y} \qquad \textbf{(1.46)}$$

Chẳng hạn $5(\bmod 7)+4(\bmod 7)=2(\bmod 7)$

$5(\bmod 7)\cdot 4(\bmod 7)=-1(\bmod 7)=6(\bmod 7)$.

Với hai phép toán này $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

<u>Định nghĩa 1.28</u>: *Đồng cấu vành từ vành $(A,+,\cdot)$ vào vành $(A',+,\cdot)$ là ánh xạ $f:A\to A'$ thỏa mãn 3 điều kiện sau:*

i) $\forall x,y\in A: f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii) $\forall x,y\in A: f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ **(1.47)**

Trường hợp A, A' là hai vành có đơn vị $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A'}$ thì thêm điều kiện

iii) $f(1_A)=1_{A'}$.

Khi f đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì f được gọi là đơn cấu vành (toàn cấu, đẳng cấu, một cách tương ứng).

1.6.4 Trường

<u>Định nghĩa 1.29</u>: *Vành giao hoán có đơn vị $(K,+,\cdot)$ được gọi là một trường nếu mọi phần tử $x\neq\mathbf{0}$ của K đều khả nghịch (có phần tử đối của luật nhân). Nghĩa là:*

K_1: *$(K,+,\cdot)$ là nhóm Abel,*

K_2: *$(K^*,\cdot)$ là nhóm Abel, $K^*=K\setminus\{\mathbf{0}\}$,*

K_3: *Luật nhân phân phối đối với luật cộng.*

Rõ ràng rằng mọi trường là vành nguyên, nhưng điều ngược lại không đúng.

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một ví dụ về vành nguyên có đơn vị nhưng không phải là trường.

<u>Ví dụ 1.41</u>: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *là trường.*

Vì vậy ta có các trường số hữu tỉ, trường số thực, trường số phức và vành số nguyên.

<u>Ví dụ 1.42</u>: $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ *là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.*

Giải: Giả sử n là số nguyên tố và $\overline{m}\in\mathbb{Z}_n$, $\overline{m}\neq\overline{0}(\bmod n)$ thì $(m,n)=1$ do đó tồn tại hai số nguyên u,v sao cho $um+vn=1$ (Định lý Bezout) $\Rightarrow\overline{u}\cdot\overline{m}=\overline{1}(\bmod n)$. Vậy $\overline{u}$ là phần tử nghịch đảo của $\overline{m}$.

Ngược lại, nếu $\mathbb{Z}_n$ là trường thì với mọi $m\in\mathbb{Z}$ ($0<m<n$) tồn tại $m'\in\mathbb{Z}$ sao cho $\overline{m}\cdot\overline{m'}=\overline{1}\Rightarrow mm'=1+kn\Rightarrow(m,n)=1$.

Vậy n là số nguyên tố.

1.7 ĐẠI SỐ BOOLE

Lý thuyết đại số Boole được George Boole (1815 - 1864) giới thiệu vào năm 1854 trong bài báo " Các quy luật của tư duy", trong đó kỹ thuật đại số được dùng để phân tích các quy luật của lôgích và các phương pháp suy diễn. Sau đó đại số Boole được áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học như đại số, giải tích, tô pô, lý thuyết xác suất... Vào khoảng năm 1938, Claude Shannon (Clau Sê-nôn) (một kỹ sư viễn thông người Mỹ) là người đầu tiên đã áp dụng đại số Boole vào lĩnh vực máy tính điện tử và lý thuyết mạng.

1.7.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole

Định nghĩa 1.30: *Một đại số Boole* $(B,\vee,\wedge,')$ *là một tập khác trống* B *với hai phép toán hai ngôi* $\vee,\wedge : B\times B \to B$ *và phép toán một ngôi* $': B \to B$ *thoả mãn các tiên đề sau:*

- B_1: $\vee,\wedge$ *có tính kết hợp, nghĩa là với mọi* $a,b,c\in B$

$$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c,\ \ a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c \quad \mathbf{(1.48)}$$

- B_2: $\vee,\wedge$ *có tính giao hoán, nghĩa là với mọi* $a,b\in B$

$$a\vee b=b\vee a,\ \ a\wedge b=b\wedge a \quad \mathbf{(1.49)}$$

- B_3: *Tồn tại các phần tử không và phần tử đơn vị* $\mathbf{0},\mathbf{1}\in B$; $\mathbf{0}\neq\mathbf{1}$ *sao cho với mọi* $a\in B$

$$a\vee \mathbf{0}=a,\ \ a\wedge \mathbf{1}=a \quad \mathbf{(1.50)}$$

- B_4: *Với mọi* $a\in B$ *tồn tại* $a'\in B$ *là phần tử đối của* a *theo nghĩa:*

$$a\vee a'=\mathbf{1},\ \ a\wedge a'=\mathbf{0} \quad \mathbf{(1.51)}$$

- B_5: *Luật* $\vee$ *phân phối đối với luật* $\wedge$ *và luật* $\wedge$ *phân phối đối với luật* $\vee$, *nghĩa là với mọi* $a,b,c\in B$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),\ \ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c). \quad \mathbf{(1.52)}$$

Ví dụ 1.43: Giả sử $X\neq\varnothing$, xét $\mathscr{P}(X)$ là tập các tập con của X. Các luật hợp thành $\vee,\wedge$ là phép hợp, phép giao các tập con của X và phép toán một ngôi ' là phép lấy phần bù của tập con trong X. Khi đó $\left(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\right)$ là đại số Boole với phần tử không là $\varnothing$ và phần tử đơn vị là chính tập X.

Ví dụ 1.44: Xét $B_2=\{\mathbf{0};\mathbf{1}\}$ tập gồm hai phần tử $\mathbf{0}$ và $\mathbf{1}$. Ta định nghĩa:

$$a \vee b = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu ít nhất một trong hai phần tử } a,b \text{ là } \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu cả hai phần tử } a,b \text{ là } \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}, \quad a' = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu } a = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{nếu } a = \mathbf{1} \end{cases}$$

thì $(B_2, \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole.

<u>Ví dụ 1.45</u>: Xét $B_4 = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; a; b\}$, ta định nghĩa các phép toán

$\vee$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
a	a	$\mathbf{1}$	a	$\mathbf{1}$
b	b	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	b

$\wedge$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
a	$\mathbf{0}$	a	a	$\mathbf{0}$
b	$\mathbf{0}$	b	$\mathbf{0}$	b

	$'$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
a	b
b	a

thì $(B_4, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole.

<u>Ví dụ 1.46</u>: Cho m là số tự nhiên lớn hơn 1, ký hiệu $D(m)$ là tập các số tự nhiên là ước số của m. Chẳng hạn $D(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$, $D(42) = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Ta định nghĩa các phép toán $\vee, \wedge, '$ trong $D(m)$ như sau:

$$a \vee b = \text{bội chung nhỏ nhất của } a,b$$

$$a \wedge b = \text{ước chung lớn nhất của } a,b \ ; \quad a' = \frac{m}{a}.$$

Có thể kiểm chứng được rằng các phép toán vừa định nghĩa thỏa mãn các điều kiện B_1, B_2, B_5 và B_3 với số 1 đóng vai trò là phần tử $\mathbf{0}$ và số m đóng vai trò là phần tử $\mathbf{1}$. Tuy nhiên điều kiện B_4 nói chung không đúng. Chẳng hạn với $m = 12$ thì $6' = 2$ và $2 \vee 6 = 6 \neq 12$.

Người ta chứng minh được rằng $(D(m), \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole khi m bằng tích các số nguyên tố phân biệt, ví dụ $m = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $m = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ …. Tuy nhiên $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ không thỏa mãn.

1.7.2 Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu

<u>Định nghĩa 1.31</u>: Một biểu thức chứa các biến được liên kết bởi một số hữu hạn lần các phép toán $\vee, \wedge, '$ và hai phần tử $\mathbf{0}; \mathbf{1}$ của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là một *công thức Boole.*

<u>Ví dụ 1.47</u>: $(x \vee y') \wedge \mathbf{1}$ và $(x' \wedge y) \vee z$ là hai công thức Boole.

Mỗi công thức Boole của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ xác định một hàm nhận giá trị thuộc B vì khi thay các biến có mặt trong công thức bởi các phần tử của B thì nhận được giá trị là phần tử của B. Mỗi hàm xác định bởi công thức Boole được gọi là *Hàm Boole* .

Hai công thức Boole xác định cùng một hàm Boole được gọi là hai công thức tương đương. Chẳng hạn $x \wedge (y \vee z)$ và $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ là hai công thức tương đương, ta kí hiệu $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Định nghĩa 1.32: Hai công thức Boole trong đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là *đối ngẫu* nếu trong một công thức ta thay $\vee$, $\wedge$, $\mathbf{0}; \mathbf{1}$ lần lượt bằng $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{1}, \mathbf{0}$ thì ta được công thức hai.

Ví dụ 1.48: Hai công thức $x \wedge (y \vee \mathbf{1})$ và $x \vee (y \wedge \mathbf{0})$ là đối ngẫu.

Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B_1-B_5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhau, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau:

Nguyên lý đối ngẫu: *Nếu hai công thức của đại số Boole được chứng minh là tương đương dựa trên cơ sở hệ tiên đề* B_1-B_5 *thì hai công thức đối ngẫu của chúng cũng tương đương.*

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$, do đó theo nguyên lý đối ngẫu ta cũng có $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Tính chất 1.7: Giả sử $(B, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole với phần tử không và đơn vị là $\mathbf{0}; \mathbf{1}$. Khi đó với mọi $a, b \in B$ ta có:

1) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;
2) $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{0}$;
3) $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
4) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$; *(tính hấp thu)*
5) Nếu tồn tại $c \in B$ sao cho $a \vee c = b \vee c$ và $a \wedge c = b \wedge c$ thì $a = b$;
6) Nếu $a \vee b = \mathbf{1}$ và $a \wedge b = 0$ thì $b = a'$; *(tính duy nhất của phần bù)*
7) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ và $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. *(công thức De Morgan)*

Chứng minh:

Theo nguyên lý đối ngẫu ta chỉ cần chứng minh các đẳng thức thứ nhất từ 1)-7).

1)
$a = a \vee \mathbf{0}$ theo B_3
$= a \vee (a \wedge a')$ theo B_4
$= (a \vee a) \wedge (a \vee a')$ theo B_5
$= (a \vee a) \wedge \mathbf{1}$ theo B_4

	$= a \vee a$	theo B_3
2)	$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' \vee \mathbf{0}$	theo B_3
	$= \mathbf{1}$	theo B_2, B_4
3)	$a \vee 1 = a \vee (a \vee a')$	theo B_4
	$= (a \vee a) \vee a'$	theo B_1
	$= a \vee a'$	theo 1)
	$= \mathbf{1}$	theo B_4
4)	$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge \mathbf{1}) \vee (a \wedge b)$	theo B_3
	$= a \wedge (\mathbf{1} \vee b)$	theo B_5
	$= a \wedge \mathbf{1}$	theo 1)
	$= a$	theo B_3
5)	$a = a \vee (a \wedge c)$	theo 4)
	$= a \vee (b \wedge c)$	vì $a \wedge c = b \wedge c$
	$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	theo B_5
	$= (a \vee b) \wedge (b \vee c)$	vì $a \vee c = b \vee c$
	$= b \vee (a \wedge c)$	theo B_5
	$= b \vee (b \wedge c)$	vì $a \wedge c = b \wedge c$
	$= b$	theo 4)

6) Vì $a \vee b = \mathbf{1} = a \vee a'$ và $a \wedge b = \mathbf{0} = a \wedge a'$, theo 5) suy ra $b = a'$.

7) Ta dễ dàng kiểm chứng $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = \mathbf{1}$ và $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = \mathbf{0}$, áp dụng 6) suy ra điều phải chứng minh.

Áp dụng các tính chất này cùng với hệ tiên đề B_1-B_5 ta có thể đơn giản hoá các công thức Boole bất kỳ.

Ví dụ 1.49: Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y)$.

Giải: Ta có $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge \mathbf{1} = x$.

$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y) = x \vee (x' \vee y) = (x \vee x') \vee y = \mathbf{1} \vee y = \mathbf{1}$.

Ví dụ 1.50: Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y') \vee \left[x \wedge (y \wedge z)'\right] \vee z$.

Giải: Ta có $(x \wedge y') \vee \left[x \wedge (y \wedge z)'\right] \vee z = (x \wedge y') \vee \left[(x \wedge y') \vee (x \wedge z')\right] \vee z$

$$= (x \wedge y') \vee (x \wedge z') \vee z = (x \wedge y') \vee \left[(x \vee z) \wedge (z' \vee z)\right]$$

$$=(x\wedge y')\vee\left[(x\vee z)\wedge\mathbf{1}\right]=(x\wedge y')\vee(x\vee z)=\left[(x\wedge y')\vee x\right]\vee z=x\vee z\,.$$

Ví dụ 1.51: Rút gọn công thức $(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)$.

Giải: Ta có $(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)$

$$=\left[(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\right]\vee\left[(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z)\right]$$

$$=\left[(x\wedge y)\wedge(z\vee z')\right]\vee\left[(y\wedge z)\wedge(x\vee x')\right]$$

$$=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)=y\wedge(x\vee z)\,.$$

1.7.3 Phương pháp xây dựng hàm Boole thỏa mãn giá trị cho trước

Một vài trường hợp khi ứng dụng đại số Boole để giải quyết vấn đề thực tế sẽ dẫn đến bài toán cần tìm các hàm Boole theo các biến nào đó thỏa mãn các điều kiện cho trước (mục 7.4.2). Trong tiết này chúng ta chỉ ra hai phương pháp xây dựng các hàm như thế. Phương pháp thứ nhất biểu diễn hàm cần tìm dạng "tổng ($\vee$) các tích ($\wedge$)". Sử dụng nguyên lý đối ngẫu ta có phương pháp thứ hai dạng "tích các tổng".

Để xây dựng hàm cần tìm dạng "tổng các tích" ta thực hiện các bước sau:

1. Lập bảng các giá trị các biến $x_i\in B_2$ có mặt trong công thức và giá trị tương ứng của hàm F của các biến này (tương tự bảng chân trị trong mục 1.2).
2. Chỉ xét các hàng của bảng trên mà hàm F nhận giá trị 1. Trong mỗi hàng này ta lập biểu thức là $\wedge$ của các biến:

   - x_i nếu x_i nhận giá trị 1
   - x'_i nếu x_i nhận giá trị 0.

3. Hàm F cần tìm có được bằng cách lấy $\vee$ của các biểu thức theo hàng.

Ví dụ 1.52: Tìm hàm của hai biến $F(x,y)$ nhận giá trị 1 khi x,y đồng thời nhận giá trị 1 hoặc 0.

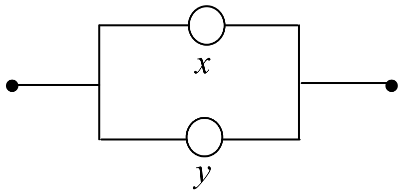
Lập bảng các giá trị của hàm và biến:

x	y	$F(x,y)$	Biểu thức theo hàng
1	1	1	$x\wedge y$
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	$x'\wedge y'$

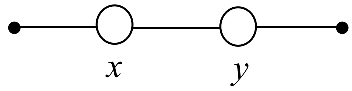
Vậy hàm cần tìm là $F(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y')$.

1.7.4 Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch *(switching networks)*

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch có hai trạng thái đóng (dòng điện đi qua được) và mở (dòng điện không qua được). Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản (basic parallel network) và mạng nối tiếp cơ bản (basic series network) được mô tả trong hình vẽ sau:



mạng song song cơ bản (hình 1)

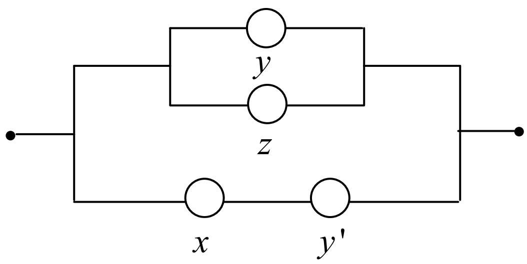


mạng nối tiếp cơ bản (hình 2)

Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này.

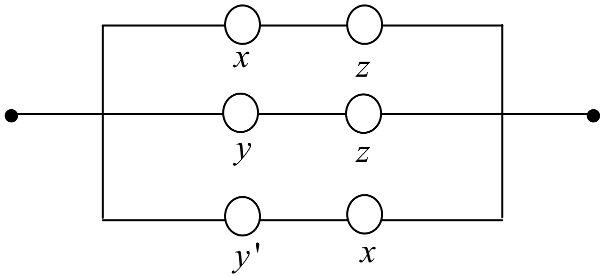
Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các chữ $x,y,z,\ldots$. Nếu x ở trạng thái mở ta x cho nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1. Trong một mạng nếu hai chuyển mạch luôn cùng trạng thái thì ta ký hiệu cùng một chữ. Hai chuyển mạch có trạng thái luôn ngược nhau, nếu một chuyển mạch được ký hiệu là x thì chuyển mạch kia được ký hiệu là x'.

Mạng song song (hình 1) nhận giá trị 1 khi có ít nhất một trong hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x\vee y$. Còn mạng nối tiếp (hình 2) nhận giá trị 1 khi cả hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x\wedge y$. Như vậy $x', x\vee y, x\wedge y$ có thể được xem như các biến nhận giá trị trong đại số Boole B2 (ví dụ 1.37). Bằng phương pháp này ta có thể mô tả một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại. Chẳng hạn mạng sau đây:



tương ứng với công thức $(y\vee z)\vee(x\wedge y')$.

Còn công thức Boole $(x\wedge z)\vee(y\wedge z)\vee(y'\wedge x)$ mô tả mạng:



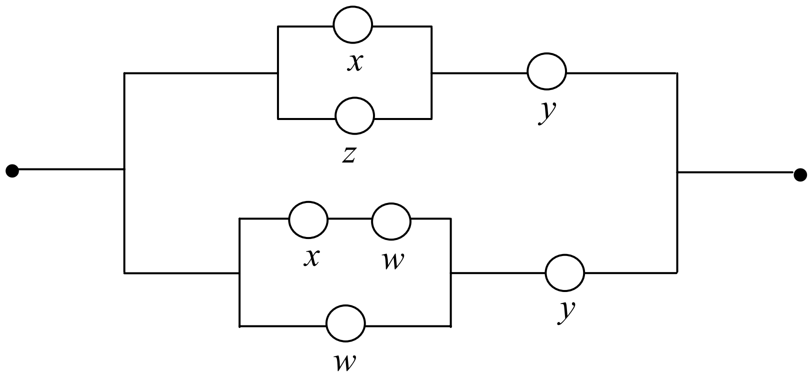
Chú ý rằng trong các công thức cần xét ta thay $(x \vee y)'$ bởi $x' \wedge y'$ và $(x \wedge y)'$ bởi $x' \vee y'$.

Hai mạng N1 và N2 được gọi là tương đương nếu nó thực hiện cùng một chức năng, nghĩa là với bất kỳ cách chọn các trạng thái đóng mở ở mọi vị trí chuyển mạch trong mạng thì trạng thái đầu vào và đầu ra của N1 và N2 đều như nhau. Như vậy hai mạng tương đương khi hai công thức Boole tương ứng của chúng là tương đương.

Ta có thể áp dụng đại số Boole để giải quyết hai vấn đề sau:

1.7.4.1 Với một mạng cho trước tìm mạng tương đương đơn giản hơn

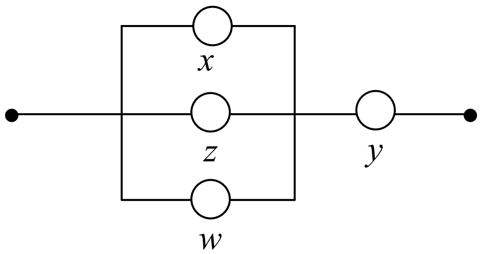
Ví dụ 1.53: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau



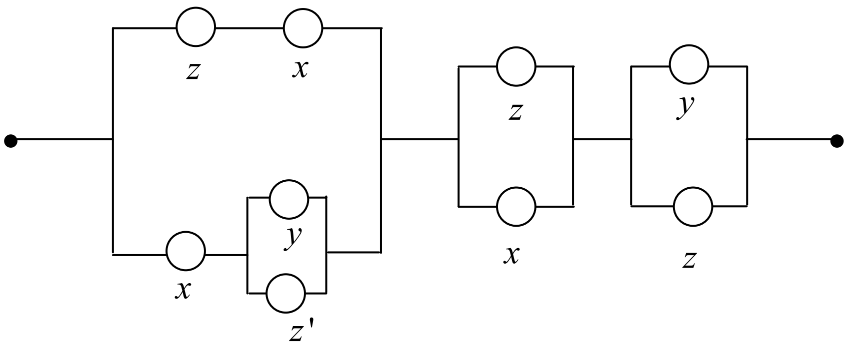
Công thức Boole tương ứng: $\left[(x \vee z) \wedge y\right] \vee \left[\left((x \wedge w) \vee w\right) \wedge y\right]$.

Ta có $(x \wedge w) \vee w = w$ (luật hấp thu), do đó công thức trên có thể biến đổi thành $\left[(x \vee z) \wedge y\right] \vee \left[w \wedge y\right] = (x \vee z \vee w) \wedge y$.

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn



Ví dụ 1.54: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau:



Công thức Boole tương ứng: $\left[(z\wedge x)\vee\big(x\wedge(y\vee z')\big)\right]\wedge(z\vee x)\wedge(z\vee y)$.

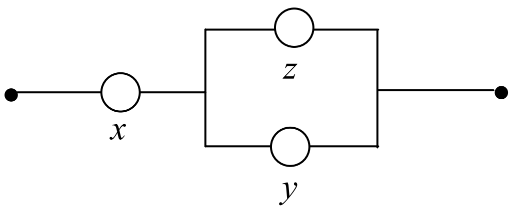
Ta có $\left[(z\wedge x)\vee\big(x\wedge(y\vee z')\big)\right]\wedge(z\vee x)\wedge(z\vee y)$

$=\left[(z\wedge x)\vee\big((x\wedge y)\vee(x\wedge z')\big)\right]\wedge\left[z\vee(x\wedge y)\right]$

$=\left[\big(x\wedge(z\wedge z')\big)\vee(x\wedge y)\right]\wedge\left[z\vee(x\wedge y)\right]$

$=x\wedge\left[z\vee(x\wedge y)\right]=(x\wedge z)\vee\left[x\wedge(x\wedge y)\right]=(x\wedge z)\vee(x\wedge y)=x\wedge(z\vee y)$

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn

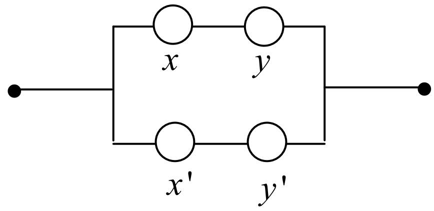


1.7.4.2 Thiết kế một mạng thoả mãn các điều kiện cho trước

Ví dụ 1.55: Thiết kế một mạng điện cho một bóng đèn ở cầu thang mà có thể bật tắt ở cả hai đầu cầu thang.

Giải: Gọi x và y là hai công tắc ở hai đầu cầu thang. Theo yêu cầu đặt ra ta cần thiết kế một mạng điện sao cho khi thay đổi trạng thái của một trong hai vị trí x, y thì trạng thái của đầu ra (bóng đèn) phải thay đổi. Bảng giá trị của hàm cho trong ví dụ 1.52 thỏa mãn đòi hỏi này.

Vậy mạng cần tìm là



BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1) Hai tập hợp A và B trong các trường hợp sau đây có bằng nhau hay là tập hợp con của nhau?

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2+2x>1\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x>\sqrt{2}-1\right\}$.

b) A là tập mọi số thực ≥ 0, B là tập mọi số thực $\geq$ trị tuyệt đối của chính nó.

c) A là tập mọi số nguyên không âm có luỹ thừa bậc 3 là một số lẻ không chia hết cho 3, B là tập các số nguyên không âm có bình phương trừ 1 chia hết cho 24.

1.2) A,B,C,D là tập con của E. Chứng minh rằng:

a) $A\setminus B=\varnothing$ khi và chỉ khi $A\subset B$.

b) Nếu $A\subset B, C\subset D$ thì $A\cup C\subset B\cup D$, $A\cap C\subset B\cap D$.

c) Nếu $A\cup C\subset A\cup B$, $A\cap C\subset A\cap B$ thì $C\subset B$.

1.3) Cho A,B là hai tập con của E, Chứng minh rằng:

a) $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$.

b) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow \overline{A}\cup B=E$.

c) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow \overline{B}\cap A=\varnothing$.

d) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

e) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

f) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

1.4) A,B,C,D là tập con của E. Chứng minh rằng:

a) $A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow (A\times B)\cap(B\times A)\neq\varnothing$.

b) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$.

1.5) Trong $\mathbb{R}$, xét quan hệ $\mathcal{R}$ xác định bởi:

$$a\mathcal{R}b\Leftrightarrow a^3-b^3=a-b$$

Chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương. Tìm lớp tương đương $\overline{a}$ của a.

1.6) Trong tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$, các quan hệ sau có phải là quan hệ tương đương không?

a) $a\mathcal{R}b\Leftrightarrow a$ chia hết cho b.

b) $a\mathcal{R}b\Leftrightarrow a$ không nguyên tố với b.

1.7) Trong $\mathbb{R}$, xét quan hệ $\mathscr{R}$ xác định bởi:

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow (a^3+2)(b^2+1)=(b^3+2)(a^2+1)$$

Chứng minh $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương. Xác định số phần tử của lớp tương đương $\overline{a}$ của a.

1.8) Trong tập các đường thẳng trong không gian, quan hệ vuông góc có phải là quan hệ tương đương không?

1.9) Trong $\mathbb{R}^2$ xét quan hệ $(x,y)\le(x',y') \Leftrightarrow x\le x',\ y\le y'$. Chứng minh $\le$ là một quan hệ thứ tự. Quan hệ này có phải là quan hệ thứ tự toàn phần không?

1.10) Ta sắp xếp thứ hạng học sinh bằng cách dựa vào kiểm tra hai môn học mà kết quả được đánh giá bằng điểm, điểm môn thứ nhất ký hiệu là x, điểm môn thứ hai ký hiệu là y. Học sinh có điểm (x_1,y_1) kém hơn học sinh có điểm (x_2,y_2), ký hiệu $(x_1,y_1)\le(x_2,y_2)$ xác định như sau:

$$(x_1,y_1)\le(x_2,y_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1<x_2 \\ \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1\le y_2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giả sử điểm của môn thứ hai của các học sinh là khác nhau, chứng minh quan hệ $\le$ là quan hệ thứ tự toàn phần (được gọi là sắp thứ tự từ điển).

1.11) a) Cho tập được sắp $(E,\le)$ và hai tập con $A\subset B\subset E$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $\sup A$, $\sup B$ thì $\sup A\le\sup B$.

b) Tìm ba ví dụ về tập được sắp $(E,\le)$ thoả mãn:

1) Tồn tại $\sup A$ nhưng không tồn tại $\sup B$.

2) Tồn tại $\sup B$ nhưng không tồn tại $\sup A$.

3) Tồn tại $\sup A\notin A$ nhưng tồn tại $\max B$.

1.12) Các ánh xạ $f: X\to Y$ sau đây là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu tồn tại.

a) $X=Y=\mathbb{R},\ f(x)=2x+5$.

b) $X=Y=\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$.

c) $X=[1;3],\ Y=[-1;3],\ f(x)=x^2-2x$.

d) $X=Y=\mathbb{R},\ f(x)=3x-2|x|$.

e) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + bx + c;\ b, c \in \mathbb{R}$.

1.13) Cho $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$f(x) = 1/x,\ g(x) = 3x/(x^2+1)$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} g$.

b) Xác định ánh xạ tích $g \circ f$. Có đẳng thức $g \circ f = g$ không ?

1.14) Cho hai ánh xạ $f, g :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = 2n,\ \ g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (n-1)/2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

a) Xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của f, g.

b) Xác định $f \circ g,\ g \circ f$.

1.15) Cho ánh xạ $f : X \to Y$ cho $A, B \subset X$ và $C, D \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Nếu f đơn ánh thì

g) $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$.

h) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1.16) Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$.

Chứng minh:

a) f, g đơn ánh thì h đơn ánh.

b) f, g toàn ánh thì h toàn ánh.

c) h toàn ánh thì g toàn ánh.

d) h đơn ánh thì f đơn ánh.

e) h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh.

f) h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

1.17) Với mỗi bốn số nguyên $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ sao cho $ad - bc = 1$.

Ta xét ánh xạ $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ xác định bởi $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.

Gọi $\mathscr{F}$ là tập hợp các ánh xạ như trên. Chứng minh:

a) Với mọi $f \in \mathscr{F}$ thì f là song ánh và $f^{-1} \in \mathscr{F}$

b) Nếu $f, g \in \mathscr{F}$ thì $f \circ g \in \mathscr{F}$. Nói cách khác tập $\mathscr{F}$ với luật hợp thành là hợp hai ánh xạ là một nhóm không giao hoán.

1.18*) Cho ba tập hợp khác trống E, F, G.

a) Cho hai ánh xạ $f : E \to F$ và $g : E \to G$.

Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ $h : F \to G$ sao cho $h \circ f = g$ khi và chỉ khi với mọi $x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$.

b) Cho hai ánh xạ $g : E \to G$ và $h : F \to G$.

Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ $f : E \to F$ sao cho $h \circ f = g$ khi và chỉ khi với mọi $x \in E, \exists y \in F : g(x) = h(y)$.

1.19) Cho X có n phần tử . Chứng minh $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử.

1.20) Cho hai phép thế của tập $\{1,2,3,4\}$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm $\sigma \circ \mu, \mu \circ \sigma, \sigma^{-1}, \mu^{-1}$.

1.21) Cho n điểm khác nhau trong mặt phẳng:

a) Tính số các đoạn thẳng nối từng cặp điểm khác nhau.

b) Tính số các vectơ $\neq \vec{0}$ có các điểm đầu, điểm cuối từ n điểm này.

1.22) Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển của nhị thức $(37 + 19)^{31}$.

1.23*) Với hai số tự nhiên $n, p \in \mathbb{N}$, ký hiệu $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

a) Chứng minh $S_{p+1}(n+1)=\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^{k} S_k(n)$.

b) Suy ra $(n+1)^{p+1}=\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^{k} S_k(n)$

c) Suy ra các tổng $\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1.24) Chứng minh rằng $\mathscr{G}=\left\{f_{ab}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f(x)=ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$ với phép hợp ánh xạ $\circ$ là một nhóm. Nhóm này có giao hoán không?

1.25) Lũy thừa của phần tử a của nhóm G với phép nhân được định nghĩa như sau:

$$a^0=1,\ a^n=aa^{n-1},\ a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n;\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng với mọi $m,n,k\in\mathbb{Z}$: $a^m a^n=a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$, $\left(a^{m+n}\right)^k=a^{km+kn}$.

1.26) Cho nhóm G với phép nhân thỏa mãn điều kiện $(ab)^2=a^2b^2$ với mọi $a,b\in G$. Chứng minh G là nhóm Abel.

1.27) Cho $(G,*)$ là một nhóm, giả sử G là một tập hữu hạn có số phần tử chẵn. Đặt $S=\left\{x\in G\,\middle|\, x^2=e, x\neq e\right\}$. Chứng minh rằng quan hệ $\mathscr{R}$ xác định trong G bởi:

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow y=x \text{ hoặc } y=x^{-1}$$

là một quan hệ tương đương. Suy ra S có số phần tử lẻ.

1.28) Cho G, G' là hai nhóm lần lượt có phần tử trung hoà là e và e'. $f:G\to G'$ là một đồng cấu nhóm. Chứng minh: $f(e)=e'$, $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.

1.29) Cho G, G' là hai nhóm lần lượt có phần tử trung hoà là e và e'. $f:G\to G'$ là một đồng cấu nhóm. Ta định nghĩa và kí hiệu hạt nhân của đồng cấu nhóm f là $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(e')$. Chứng minh rằng f là đơn cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} f=\{e\}$.

1.30) Cho $(A,+,\cdot)$ là một vành. Tập con $C=\left\{x\in A\,\middle|\,\forall a\in A: ax=xa\right\}$ được gọi là tâm của A. Giả sử $\forall x\in A, x^2-x\in C$.

a) Chứng minh rằng $(C,+)$ là một nhóm con của nhóm $(A,+)$.

b) Chứng minh rằng $xy+yx\in C$ với mọi $x,y\in A$.

c) Suy ra vành A giao hoán.

1.31) Cho A là một vành có đơn vị.

a) Chứng minh rằng, nếu x, y thoả mãn $xy = yx$ thì ta có nhị thức Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

trong đó $x^0 = 1$, x^k là tích k lần của phần tử x.

b) Phần tử $x \in A$ được gọi là luỹ linh nếu tồn tại một số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $x^n = 0$. Chứng minh rằng, nếu x, y luỹ linh và $xy = yx$ thì $x + y$ cũng lũy linh.

c) Chứng minh rằng, nếu x luỹ linh và $xy = yx$ thì xy cũng lũy linh.

d) Nếu $x \in A$ luỹ linh thì tồn tại $(1-x)^{-1}$.

1.32) Biểu diễn sơ đồ mạng ứng với các công thức Boole sau:

a) $\left[x \vee (y' \wedge z) \vee (x \wedge z')\right] \vee (y \wedge z)$.

b) $x \vee \left[y' \vee (y \wedge z)' \vee z'\right]$.

1.33) Viết các công thức Boole ứng với các mạng sau và tìm mạng tương đương đơn giản hơn