CHƯƠNG 4

CHUỖI MARKOV VÀ QUÁ TRÌNH DỪNG

Các hiện tượng diễn ra trong tự nhiên, xã hội hoặc có tính chất tất định (có tính quy luật, có thể biết trước kết quả) hoặc có tính chất ngẫu nhiên (không biết trước kết quả). Mặc dù không thể nói trước một hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một lần quan sát, tuy nhiên nếu tiến hành quan sát nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong các phép thử như nhau, ta có thể đáng giá được khả năng xuất hiện của các biến cố tương ứng và rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này. Lý thuyết xác suất nghiên cứu khả năng xuất hiện của các hiện tượng ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tế.

Trong học phần xác suất và thống kê chúng ta đã tìm hiểu khái niệm biến ngẫu nhiên, đó là các biến nhận giá trị nào đó phụ thuộc vào các yếu tố ngẫu nhiên. Khi họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc vào thời gian ta có quá trình ngẫu nhiên.

Lý thuyết quá trình ngẫu nhiên lần đầu tiên được nghiên cứu liên quan đến bài toán dao động và nhiễu của các hệ vật lý. Quá trình ngẫu nhiên là một mô hình toán học của quá trình thực nghiệm mà sự phát triển bị chi phối bởi các quy luật xác suất. Quá trình ngẫu nhiên cung cấp những mô hình hữu ích để nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như vật lý thống kê, viễn thông, điều khiển, phân tích chuỗi thời gian, sự tăng trưởng dân số và các ngành khoa học quản lý.

Các tín hiệu video, tín hiệu thoại, dữ liệu máy tính, nhiễu của một hệ thống viễn thông, nhiễu điện trong các thiết bị điện, số khách hàng đến một điểm phục vụ, chỉ số chứng khoán trong thị trường chứng khoán… là các quá trình ngẫu nhiên.

Quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong viễn thông là quá trình Markov (quá trình không nhớ, memoryless) và quá trình dừng.

Chuỗi Markov là một quá trình Markov có không gian trạng thái rời rạc, thời gian rời rạc và thuần nhất. Chuỗi Markov thường gặp trong bài toán chuyển mạch của hệ thống viễn thông.

Tín hiệu viễn thông, nhiễu không có tính Markov. Các quá trình này quá khứ của nó có ảnh hưởng lớn đến sự tiến triển của quá trình trong tương lai. Tuy nhiên hàm trung bình không thay đổi và hàm tương quan thuần nhất theo thời gian, đó là quá trình dừng. Khi các quá trình dừng biểu diễn các tín hiệu hoặc nhiễu thì biến đổi Fourier của hàm tương quan của quá trình là hàm mật độ phổ công suất của tín hiệu hoặc nhiễu này.

Trong chương này ta chỉ nghiên cứu một cách khái quát khái niệm quá trình ngẫu nhiên, chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất và quá trình dừng.

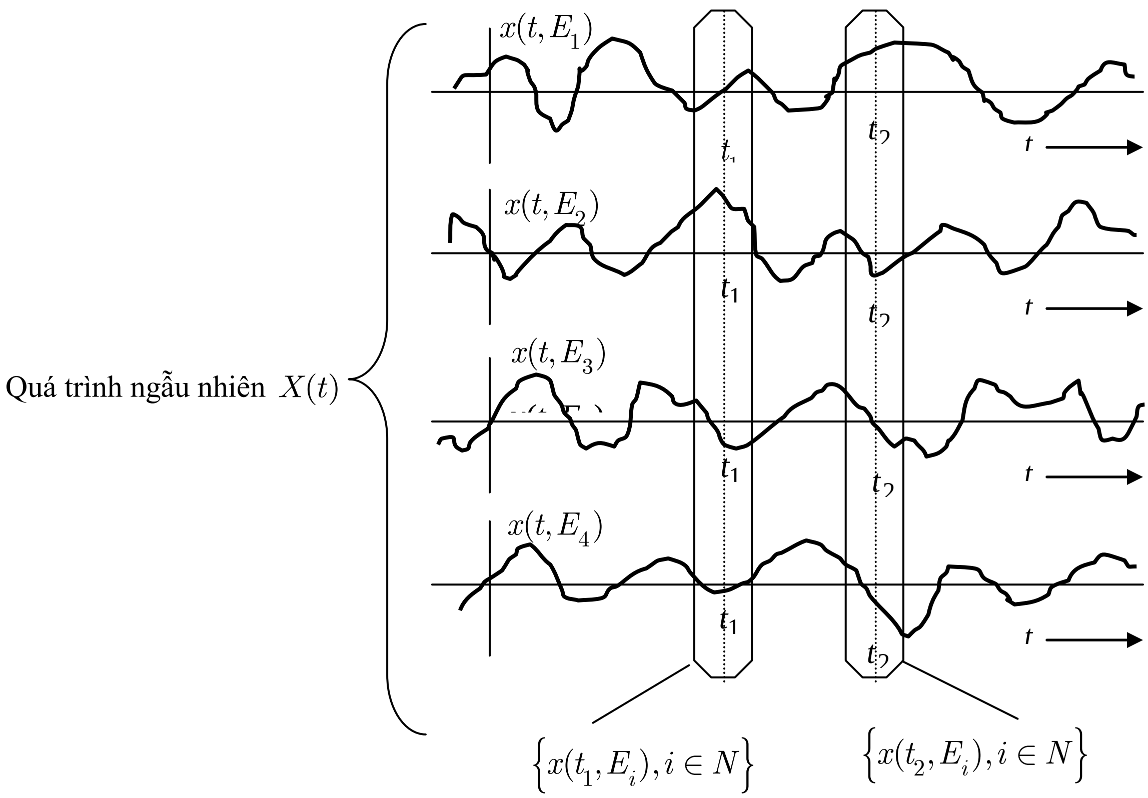
Để học tốt chương này học viên cần nắm vững khái niệm xác suất, xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ, biến ngẫu nhiên, các đặc trưng: kỳ vọng, phương sai, hiệp phương sai của các biến ngẫu nhiên và các kiến thức đại số tuyến tính như ma trận, hệ phương trình tuyến tính.

4.1 KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.1 Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Các tín hiệu của các hệ thống thông tin là các tín hiệu ngẫu nhiên vì ngoài thành phần mang tin còn có sự tác động của giao thoa ngẫu nhiên và nhiễu của thiết bị.

Giả sử một tín hiệu nào đó mà tại mỗi thời điểm t nhận các giá trị phụ thuộc hệ các biến cố $\left\{E_i, i \in N\right\}$ của phép thử, tín hiệu này nhận giá trị mẫu là $x(t, E_i)$ tại thời điểm t và khi biến cố E_i xảy ra. Như vậy $\left\{x(t, E_i)\right\}$ là một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ vừa phụ thuộc thời gian t, vừa phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên E_i.



Hình 4.1: *Mô hình quá trình ngẫu nhiên*

*Một cách tổng quát một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$ xác định trong cùng một phép thử. Các quá trình này vừa phụ thuộc vào thời gian t. Khi cố định tham số t thì $X(t,\omega)$ là biến ngẫu nhiên phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên ω, các giá trị quan sát nhận được theo thời gian t được gọi là **hàm mẫu** hoặc một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên. Tập chỉ số T thường biểu diễn tham số thời gian.*

Do tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nên một tín hiệu $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$ được truyền đi là một quá trình ngẫu nhiên. Tín hiệu cụ thể nhận được $\left\{x(t); t \in T\right\}$ là hàm mẫu (một thể hiện) của quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$.

Để đơn giản trong cách viết người ta ký hiệu quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in T\}$ thay cho $\{X(t,\omega); t \in T\}$, hàm mẫu tương ứng được ký hiệu $\{x(t); t \in T\}$.

4.1.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên

Có thể phân loại các quá trình ngẫu nhiên theo các đặc trưng sau:

- Không gian trạng thái,
- Tập chỉ số thời gian T,
- Quan hệ độc lập và quy luật phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên $X(t)$.

4.1.2.1 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập trạng thái E

Ta ký hiệu E là tập tất cả các giá trị của $X(t), \forall t \in T$ và gọi là không gian trạng thái của quá trình, mỗi giá trị của $X(t)$ được gọi là một trạng thái.

♦ Nếu E là tập đếm được thì $\{X(t); t \in T\}$ gọi là quá trình có trạng thái rời rạc.

♦ Nếu E là 1 khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình thực hoặc quá trình trạng thái liên tục.

♦ Nếu E tập con của tập số phức $\mathbb{C}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái phức.

♦ Nếu $E \subset \mathbb{R}^k$ thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái k-véc tơ.

4.1.2.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập các chỉ số T

❖ Nếu T là tập con của tập số nguyên ($T \subset \mathbb{Z}$) thì quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian rời rạc hoặc tham số rời rạc. Trường hợp này ta ký hiệu X_n thay cho $X(t)$ và gọi là một dãy ngẫu nhiên.

❖ Nếu $T = [0; \infty)$ hoặc $T = \mathbb{R}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian liên tục.

4.1.2.3 Phân loại theo các tính chất phân bố xác suất của quá trình ngẫu nhiên

a. *Quá trình độc lập*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình độc lập nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$ các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

$$X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n) \qquad \textbf{(4.1)}$$

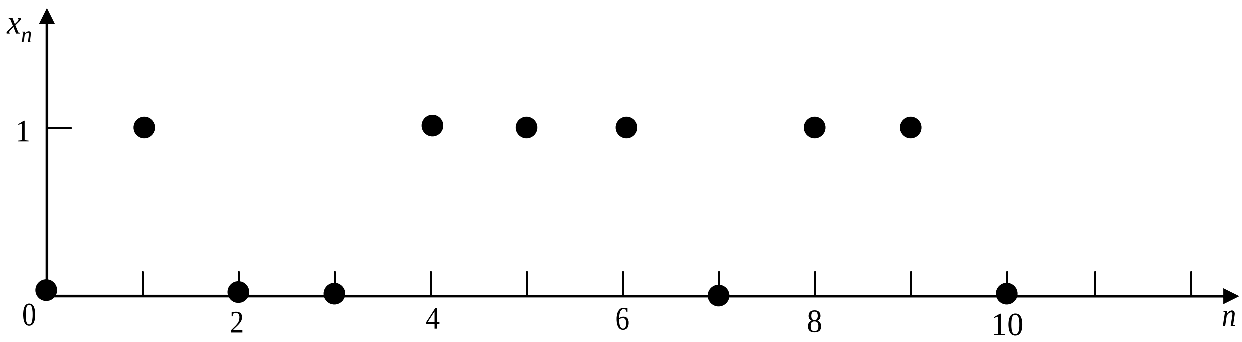
Ví dụ 4.1: Giả sử $X_1, X_2, ...$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Bernoulli với xác suất $P\{X_n = 1\} = p$, $P\{X_n = 0\} = q = 1 - p$ với mọi $n = 1, 2, ...$. Khi đó

$\left\{X_n, n \geq 1\right\}$ là một quá trình ngẫu nhiên gọi là ***quá trình Bernoulli***. Vậy quá trình Bernoulli là quá trình độc lập có không gian trạng thái rời rạc $E = \left\{0,1\right\}$, thời gian rời rạc $T = \left\{1,2,...\right\}$.

Một ví dụ mô phỏng về dãy mẫu của quá trình Bernoulli có thể nhận được bằng cách gieo đồng xu liên tiếp. Nếu mặt sấp xuất hiện ta gán giá trị 1, nếu mặt ngửa xuất hiện ta gán giá trị 0. Chẳng hạn

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Mặt xuất hiện	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	$\cdots$
x_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

Dãy mẫu $\left\{x_n, n \geq 1\right\}$ nhận được ở trên được minh họa trong hình sau



Hình 4.2: *Hàm mẫu của quá trình Bernoulli*

b. ***Quá trình có gia số độc lập:***

Quá trình $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập nếu các gia số của quá trình trong các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tức là với mọi cách chọn $t_1 < t_2 < .... < t_n$, các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1}). \qquad \textbf{(4.2)}$$

Đặc biệt với quá trình thời gian rời rạc $\{X_n\}$ thì tính chất gia số độc lập dẫn đến dãy các biến ngẫu nhiên $Z_0 = X_0$, $Z_i = X_i - X_{i-1}$; $i = 1,2,...$ là độc lập. Ngoài ra nếu ta biết luật phân bố của từng biến ngẫu nhiên Z_0, Z_1, ... thì ta biết được luật phân bố của mọi X_n.

Thật vậy, điều này được suy từ công thức phân bố tổng của các biến ngẫu nhiên độc lập

$$X_i = Z_0 + Z_1 + ... + Z_i.$$

c. ***Quá trình gia số độc lập dừng***

Quá trình gia số độc lập $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập dừng nếu

$\forall s,t,s<t$; $\forall h\ge 0$: $X(t)-X(s)$ và $X(t+h)-X(s+h)$ độc lập và có cùng phân bố **(4.3)**

Quá trình Wiener (ví dụ 4.10) là một ví dụ của quá trình gia số độc lập dừng.

d. *Quá trình Martingal*

Quá trình $\left\{X(t);t\in T\right\}$ được gọi là quá trình Martingal nếu:

Với mọi thời điểm $t_1<t_2<....<t_n<t_{n+1}$, với mọi giá trị $a_1,a_2,....,a_n$ thì

$$\mathrm{E}\left[X(t_{n+1})\middle|X(t_1)=a_1,...,X(t_n)=a_n\right]=a_n. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Quá trình Martingal có thể xem như là mô hình mô tả trò chơi may rủi, trong đó $X(t)$ là số tiền của người chơi ở thời điểm t. Tính chất Martingal nói rằng *số tiền trung bình* của người chơi sẽ có ở thời điểm tương lai t_{n+1} bằng số tiền anh ta có ở thời điểm hiện tại t_n và *không phụ thuộc vào những gì anh ta có trước đó trong quá khứ.*

Nếu $\left\{X(t);t\ge 0\right\}$ là quá trình gia số độc lập với kỳ vọng bằng 0 thì $\left\{X(t);t\ge 0\right\}$ là quá trình Martingal với thời gian liên tục (xem [8]).

e. *Quá trình Markov:*

Quá trình $\left\{X(t);t\in T\right\}$ được gọi là quá trình Markov nếu:

Với mọi thời điểm $t_1<t_2<....<t_n$, với mọi giá trị $a_1,a_2,....,a_n$ cho trước, với mọi thời điểm $t>t_n$ và với mọi a ta có

$$P\left\{X(t)\le a\middle|X(t_1)=a_1,...,X(t_n)=a_n\right\}=P\left\{X(t)\le a\middle|X(t_n)=a_n\right\}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Nghĩa là qui luật phân bố xác suất trong tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ. Nói cách khác ***quá trình Markov mô tả các hệ không có trí nhớ*** (memoryless).

Với mọi $t>s$; với mọi tập giá trị $A\subset\mathbb{R}$ và giá trị a ta ký hiệu

$$p(s,a;t,A)=P\left\{X(t)\in A\middle|X(s)=a\right\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

và gọi là *hàm xác suất chuyển từ thời điểm s đến thời điểm t*.

Như vậy công thức (4.5) được viết lại

$$P\left\{X(t)\le a\middle|X(t_1)=a_1,...,X(t_n)=a_n\right\}=p(t_n,a_n;t,A),\ \text{trong đó } A=\left(-\infty,a\right]. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được gọi là chuỗi Markov (hay xích Markov, Markov chains). Chuỗi Markov với thời gian rời rạc và thuần nhất được xét trong mục tiếp theo.

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xét qua hàm khối lượng xác suất $p_X(x)=P\left\{X=x\right\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$; vì vậy tính chất Markov – công thức (4.5) đối với chuỗi Markov $\left\{X_n;n=0,1,2,...\right\}$ với thời gian rời rạc được viết lại như sau

$$P\left\{X_{n+1}=j\middle|X_0=i_0,X_1=i_1,...,X_n=i\right\}=P\left\{X_{n+1}=j\middle|X_n=i\right\},\ i_0,i_1,\ldots,i,j\in E\,. \quad \textbf{(4.8)}$$

f. ***Quá trình dừng*** *(stationary)*

Xét quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t);t\in T\right\}$ có thời gian $T=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+,\mathbb{Z}$ hoặc $\mathbb{N}$.

Nói một cách khái quát một quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng nếu các tính chất thống kê của quá trình không phụ thuộc thời gian. Các tính chất thống kê của quá trình được xác định bởi các hàm phân bố đồng thời của quá trình tại các thời điểm. Tùy theo mức độ không phụ thuộc thời gian của các biến ngẫu nhiên của quá trình tại các thời điểm ta có các mức độ dừng khác nhau.

- ***Quá trình dừng bậc nhất*** nếu: với mọi h, với mọi $t_1\in T$ hai biến ngẫu nhiên

$$X(t_1) \text{ và } X(t_1+h)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Như vậy quá trình dừng bậc nhất có quy luật phân bố xác suất tại mọi thời điểm là như nhau. Do đó quá trình dừng bậc nhất có hàm trung bình là hàm hằng $\mathrm{E}\,X(t)=\ \mathrm{const}$.

- ***Quá trình dừng bậc hai*** nếu: với mọi h, với mọi $t_1,t_2\in T$ hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\Big(X(t_1),X(t_2)\Big) \text{ và } \Big(X(t_1+h),X(t_2+h)\Big)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Như vậy $\Big(X(t_1),X(t_2)\Big)$ và $\Big(X(0),X(t_2-t_1)\Big)$ có cùng quy luật phân bố xác suất. Nói cách khác hàm phân bố xác suất đồng thời của quá trình dừng bậc hai không phụ thuộc thời điểm $t_1,t_2\in T$ mà chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa hai thời điểm là t_2-t_1.

Trong chương trình Xác suất Thống kê ta đã biết rằng nếu $F_{X,Y}(x,y)$ là hàm phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên $X,\ Y$ thì ta có thể xác định hàm phân bố xác suất thành phần theo công thức sau

$$F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y) \text{ và } F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty,y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y).$$

Do đó quá trình dừng bậc hai cũng là quá trình dừng bậc nhất. Hơn nữa

$$\mathrm{E}\,X(t)=\ \mathrm{const}$$

$$\mathrm{E}\Big(X(t)X(t+\tau)\Big) \text{ chỉ phụ thuộc } \tau.$$

Dựa vào kết quả này, ta mở rộng khái niệm dừng bậc hai theo nghĩa rộng

- ***Dừng theo nghĩa rộng hay dừng hiệp phương sai*** (wide sense stationary or covariance stationary) nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\mathrm{E}\,X(t)=m=\mathrm{const}$

ii) Với mọi t, $\mathrm{E}\Big(X(t)X(t+\tau)\Big)$ chỉ phụ thuộc τ.

Đặt

$$K_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\Big(X(t)X(t+\tau)\Big) \tag{4.9}$$

gọi là ***hàm tự tương quan*** của quá trình $\left\{X(t); t \in T\right\}$.

Quá trình dừng bậc hai là quá trình dừng theo nghĩa rộng, nhưng điều ngược lại không đúng.

- ***Quá trình dừng bậc N*** nếu: với mọi $t_1, t_2, \ldots, t_N \in T$, với mọi h, hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\Big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_N)\Big) \text{ và } \Big(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_N+h)\Big)$$

có cùng phân bố xác suất.

Tương tự trường hợp trên, các hàm phân bố xác suất biên của véc tơ ngẫu nhiên *N* chiều có thể nhận được từ hàm phân bố xác suất đồng thời. Vì vậy quá trình dừng bậc *N* cũng là quá trình dừng bậc *k*, với mọi $k \le N$.

- ***Dừng theo nghĩa chặt*** (strictly stationary) là quá trình dừng mọi bậc. Nghĩa là:

Với mọi *N*, với mọi $t_1, t_2, \ldots, t_N \in T$, với mọi $h > 0$; hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\Big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_N)\Big) \text{ và } \Big(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_N+h)\Big)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Nói riêng mọi $X(t)$ có cùng phân bố.

Quá trình dừng theo nghĩa chặt rất ít gặp trong thực tế, quá trình dừng hiệp phương sai được sử dụng nhiều hơn. Vì vậy người ta gọi tắt quá trình dừng hiệp phương sai là quá trình dừng.

4.2 CHUỖI MARKOV

Xét quá trình Markov $\left\{X(t); t \in T\right\}$ *có không gian trạng thái* E *đếm được.*

Tùy theo tập chỉ số $T = \{0,1,2,\ldots\}$ hoặc $T = (0;\infty)$ ta có tương ứng quá trình Markov với thời gian rời rạc hoặc liên tục.

Công thức xác suất chuyển (4.6) của quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được viết cụ thể

$$p(s,i;t,j) = P\left\{X(t) = j \,\middle|\, X(s) = i\right\},\ t > s; i, j \in E. \tag{4.10}$$

Nếu xác suất chuyển (4.10) chỉ phụ thuộc vào $t - s$, nghĩa là với mọi h

$$p(s,i;t,j) = p(s+h,i;t+h,j) \tag{4.11}$$

thì ta nói ***quá trình Markov thuần nhất theo thời gian***.

4.2.1 Chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất

Định nghĩa 4.1: *Quá trình* $\left\{X_n,\ n = 0,1,2,\ldots\right\}$ *với thời gian rời rạc được gọi là chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất nếu thỏa mãn hai điều kiện sau*

i) Không gian trạng thái E của mọi X_n *là tập đếm được.*

ii) Hàm xác suất chuyển là thuần nhất theo thời gian, tức là thoả mãn (4.11).

Từ đây trở đi ta chỉ xét chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất và ta gọi tắt chuỗi Markov.

4.2.2 Ma trận xác suất chuyển

Giả sử $\left\{X_n,\ n=0,1,2,...\right\}$ là chuỗi Markov thời gian rời rạc có không gian trạng thái E đếm được. Các phần tử của E được ký hiệu $i, j, k...$

Với mọi $i, j \in E$; đặt

$$p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = P\left\{X_1 = j \middle| X_0 = i\right\} \qquad \textbf{(4.12)}$$

không phụ thuộc vào n. Đó là *xác suất để từ trạng thái* i *sau một bước sẽ chuyển thành trạng thái* j.

Định nghĩa 4.2: *Ma trận* $P = \left[p_{ij}\right]$ *với* p_{ij} *xác định theo* (4.12) *được gọi là* ***ma trận xác suất chuyển*** *hay ma trận xác suất chuyển sau 1 bước của chuỗi Markov* $\left\{X_n,\ n=0,1,2,...\right\}$.

Các phần tử p_{ij} trên mỗi hàng của ma trận xác suất chuyển thỏa mãn điều kiện

$$p_{ij} \ge 0;\ \sum_{j\in E} p_{ij} = 1,\ \forall i \in E \qquad \textbf{(4.13)}$$

- Nếu tập trạng thái E vô hạn thì ma trận xác suất chuyển có vô số hàng, vô số cột và tổng các xác suất chuyển trên mỗi hàng trong công thức (4.13) là tổng của một chuỗi số dương.
- Nếu tập trạng thái E hữu hạn, chẳng hạn $E = \left\{1,2,...,m\right\}$ thì ma trận xác suất chuyển và công thức (4.13) được viết dưới dạng

$$P = \left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$p_{ij} \ge 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ \forall i = 1,...,m \qquad \textbf{(4.15)}$$

Ma trận vuông thỏa mãn điều kiện (4.15) được gọi là ***ma trận Markov*** hoặc ***ma trận ngẫu nhiên***.

4.2.3 Ma trân xác suất chuyển bậc cao, Phương trình Chapman–Kolmogorov

Đặt

$$p_{ij}^{(k)} = P\left\{X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right\} = P\left\{X_k = j \middle| X_0 = i\right\}. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Đó là *xác suất sau* k *bước hệ sẽ chuyển từ trạng thái* i *sang trạng thái* j.

Định nghĩa 4.3: *Ma trận vuông* $P^{(k)} = \left[p_{ij}^{(k)}\right]$ *gọi là ma trận xác suất chuyển sau* k *bước.*

Ký hiệu $P^{(0)} = I$, I là ma trận đơn vị; $P^{(1)} = P$.

Tương tự ma trận xác suất chuyển P, số hàng số cột của $P^{(k)}$ có thể vô hạn nếu không gian trạng thái E có vô số đếm được các phần tử. Nếu không gian trạng thái E hữu hạn thì ma trận xác suất chuyển sau k bước $P^{(k)}$ cũng là ma trận Markov (xem bài tập 4.8).

Định lý 4.1: Với mọi $n \ge 0$, ta có:

$$P^{(n+1)} = PP^{(n)} = P^{(n)}P \tag{4.17}$$

Từ đó suy ra

$$P^{(n)} = P^n \tag{4.18}$$

Chứng minh: Áp dụng công thức xác xuất đầy đủ với hệ đầy đủ các biến cố $\left\{A_k; k \in E\right\}$, trong đó $A_k = \left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\}$, ta có

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i, X_1 = k\right\} P\left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_1 = k\right\} P\left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\} = \sum_{k\in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \end{aligned}$$

(do tính chất không nhớ của chuỗi Markov). $\Rightarrow P^{(n+1)} = PP^{(n)}$.

Ta cũng có

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i, X_n = k\right\} P\left\{X_n = k \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = k\right\} P\left\{X_n = k \middle| X_0 = i\right\} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \end{aligned}$$

$\Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(n)}P$.

Từ (4.17) suy ra $P^{(2)} = PP = P^2$, bằng quy nạp ta có $P^{(n)} = P^n$ với mọi $n = 0,1,2,\ldots$

Từ công thức (4.18) và đẳng thức $P^{n+m} = P^n P^m$, $\forall n, m \ge 0$; ta có

$$P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)},\ \forall n, m \ge 0$$

ta có thể viết các phần tử tương ứng dưới dạng

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \tag{4.19}$$

Công thức (4.19) được gọi là ***Phương trình Chapman-Kolmogorov***.

Phương trình Chapman-Kolmogorov giải thích quy luật chuyển trạng thái của chuỗi Markov như sau: hệ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j sau $n+m$ bước có thể đạt được bằng cách chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước (với xác suất ${p_{ik}}^{(n)}$) và tiếp tục chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước (với xác suất ${p_{kj}}^{(m)}$). Hơn nửa biến cố "chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước" và biến cố "chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước" là độc lập. Vậy xác suất chuyển từ i sang j sau $n+m$ bước qua các trạng thái i, k, j bằng tích ${p_{ik}}^{(n)}{p_{kj}}^{(m)}$. Cuối cùng xác suất chuyển từ i sang j có được bằng cách lấy tổng theo mọi trạng thái trung gian k, k chạy trong không gian các trạng thái của chuỗi.

4.2.4 Phân bố xác suất của hệ tại thời điểm thứ n

Giả sử không gian trạng thái có dạng $E = \{0,1,2,...\}$

Ma trận hàng

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) & p_1(n) & p_2(n) & \cdots \end{bmatrix},\ p_j(n) = P\{X_n = j\},\ n = 0,1,2,\dots \quad \textbf{(4.20)}$$

gọi là ***ma trận phân bố xác suất của hệ tại thời điểm*** n hoặc phân bố của X_n.

Các phần tử của ma trận hàng $\mathbf{P}(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$p_k(n) \ge 0;\ \sum_{k\in E} p_k(n) = 1$$

$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_0(0) & p_1(0) & p_2(0) & \cdots \end{bmatrix}$ là ma trận phân bố tại thời điểm $n = 0$ và được gọi là ***ma trận phân bố xác suất ban đầu***.

Định lý 4.2: Với mọi n, $m \ge 0$:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)} \quad \textbf{(4.21)}$$

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n)P \quad \textbf{(4.22)}$$

$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)P^{(m)}. \quad \textbf{(4.23)}$$

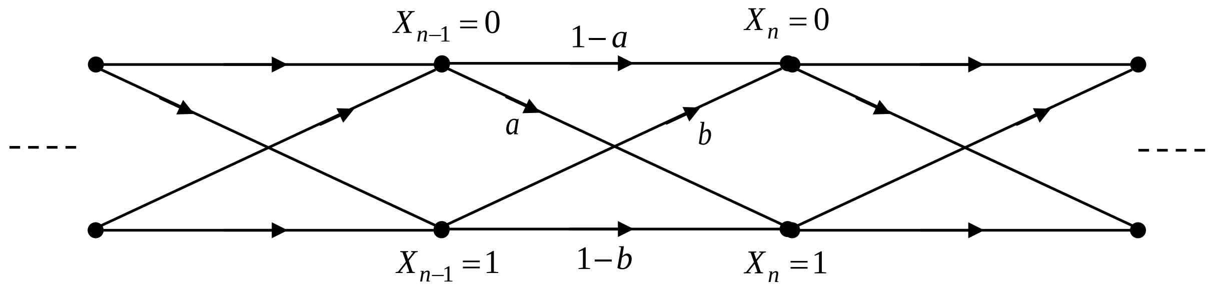
Chứng minh: Từ định lý 4.1 ta suy ra 3 điều trên là tương đương. Vì vậy để chứng minh định lý 4.2 ta chỉ cần chứng minh (4.23) và công thức này được chứng minh bằng cách áp dụng công thức xác suất đầy đủ như sau.

$$p_j(n+m) = P\{X_{n+m} = j\} = \sum_{i\in E} P\{X_n = i\} P\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = \sum_{i\in E} p_i(n){p_{ij}}^{(m)}.$$

Vậy chuỗi Markov rời rạc thuần nhất hoàn toàn được xác định bởi ma trận xác suất chuyển một bước P và ma trận phân bố ban đầu $\mathbf{P}(0)$.

Ví dụ 4.2: Một mạng viễn thông gồm một dãy các trạm chuyển tiếp các kênh viễn thông nhị phân cho trong sơ đồ sau, trong đó X_n ký hiệu mã số nhị phân đầu ra của trạm thứ n và X_0 ký hiệu mã số nhị phân đầu vào của trạm đầu tiên.

Đây là 1 mô hình chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0,1\}$, tập chỉ số $T = \{0,1,...,n,...\}$.



Hình 5.3: *Mạng viễn thông nhị phân*

Ma trận xác suất chuyển của mạng viễn thông này thường được gọi là ma trận kênh:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}; \ 0 < a < 1, \ 0 < b < 1.$$

Trong đó a, b là xác suất lỗi.

Giả sử $a = 0,1$, $b = 0,2$ và phân bố xác suất đầu $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0,5$ (hai tín hiệu 0, 1 đồng khả năng).

a.Tìm ma trận xác suất chuyển sau 2 bước,

b. Tìm phân bố xác suất của trạm thứ hai.

Giải: **a.** $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix}$.

b. $\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(0)P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,585 & 0,415 \end{bmatrix}$.

Như vậy có 58,5% tín hiệu 0 và 41,5% tín hiệu 1 ở đầu ra của trạm thứ hai, mặc dù đầu vào ở trạm đầu tiên hai tín hiệu này xuất hiện đồng khả năng.

4.2.5 Một số mô hình chuỗi Markov quan trọng

4.2.5.1 Mô hình phục vụ đám đông

Xét mô hình phục vụ đám đông (lý thuyết sắp hàng). Khách đến sắp hàng chờ phục vụ theo nguyên tắc FIFO (first in first out) và trong mỗi chu kỳ cửa hàng chỉ phục vụ một khách. Số khách đến trong chu kỳ thứ n là biến ngẫu nhiên ξ_n. Giả sử ξ_1, ξ_2,... là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố xác suất với biến ngẫu nhiên ξ có phân bố xác suất.

$$P\left\{\xi = k\right\} = a_k \,;\; k = 0,1,2,\ldots \,;\;\; a_k > 0;\; \sum_k a_k = 1\,. \tag{4.24}$$

Trạng thái của hệ (cửa hàng) là số khách xếp hàng chờ phục vụ tại thời điểm đầu của mỗi chu kỳ (khi một khách hàng vừa được phục vụ xong). Nếu hiện tại hệ ở trạng thái i và sau 1 chu kỳ hệ rơi vào trạng thái j thì

$$j = \begin{cases} i - 1 + \xi & \text{nếu } i \geq 1, \\ \xi & \text{nếu } i = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Vì các biến ngẫu nhiên ξ_n độc lập và có cùng phân bố với biến ngẫu nhiên ξ.

Ký hiệu X_n là số khách hàng tại thời điểm đầu của chu kỳ thứ n, ta có

$$X_{n+1} = \left(X_n - 1\right)^+ + \xi_n, \text{ trong đó ký hiệu } X^+ = \max(0, X),$$

Từ (4.24)-(4.25) suy ra

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = \begin{cases} P\left\{\xi_n = j + 1 - i\right\} & \text{nếu } i > 0 \\ P\left\{\xi_n = j\right\} & \text{nếu } i = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j + 1 < i \\ a_{j+1-i} & \text{nếu } j + 1 \geq i > 0 \\ a_j & \text{nếu } i = 0, j \geq 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

Vì các quá trình đến ξ_n độc lập do đó xác suất chuyển $p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\}$ thỏa mãn điều kiện (4.7), hơn nữa các biến ngẫu nhiên ξ_n có cùng phân bố với biến ngẫu nhiên ξ do đó xác suất chuyển p_{ij} thuần nhất theo thời gian.

Vậy $\left\{X_n; n = 0,1,\ldots\right\}$ là chuỗi Markov thuần nhất có ma trận xác suất chuyển được xác định từ công thức (4.26)

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.2.5.2 Mô hình kiểm kê (Inventory Model)

Giả thiết phải dự trữ trong kho một loại hàng nào đó để đáp ứng nhu cầu liên tục của khách hàng. Hàng được nhập kho tại cuối mỗi chu kỳ

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}\right) = \sum_k \pi_k p_{kj}$$

Giả sử tổng số lượng hàng cần phải đáp ứng nhu cầu trong chu kỳ n là biến ngẫu nhiên ξ_n có phân bố độc lập với chu kỳ thời gian, nghĩa là dãy biến ngẫu nhiên $\left\{\xi_n\right\}$ độc lập có cùng phân bố với ξ.

$$P\Big\{\xi = k\Big\} = a_k \; ; \; a_k > 0 \text{ và } \inf_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} = \varepsilon > 0 . \qquad \textbf{(4.27)}$$

Mức hàng dự trữ được kiểm kê tại cuối mỗi chu kỳ. Cách nhập hàng căn cứ vào 2 chỉ số tiêu chuẩn s và $m_j^{(n)} = \inf_i p_{ij}^{(n)}$, $M_j^{(n)} = \sup_i p_{ij}^{(n)}$ $(s < S)$ như sau: Nếu ở cuối mỗi chu kỳ lượng hàng dự trữ $\le s$ thì ngay tức khắc nhập hàng để có số hàng dự trữ bằng S; Nếu hàng hiện có $> s$ thì không cần nhập hàng. Giả sử số nhu cầu trong mỗi chu kỳ không vượt quá $m_j^{(n)} = \inf_i p_{ij}^{(n)}$, $M_j^{(n)} = \sup_i p_{ij}^{(n)}$, công thức (4.27) trở thành $\sum_{k=0}^{S} a_k = 1$.

Ký hiệu X_n là lượng hàng hiện có tại cuối chu kỳ $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0$ và trước khi nhập hàng, như vậy

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1} & \text{nếu } \; s < X_n \le S, \\ S - \xi_{n+1} & \text{nếu } \; X_n \le s. \end{cases} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Các trạng thái của quá trình $\Big\{X_n, n \ge 0\Big\}$ là các số lượng hàng dự trữ:

$$s + 1 - S, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, S - 1, S$$

trong đó giá trị âm là nhu cầu chưa được phục vụ mà sẽ được đáp ứng ngay sau khi nhập hàng. Từ công thức (4.28) ta có

$$p_{ij} = P\Big\{X_{n+1} = j \Big| X_n = i\Big\} = \begin{cases} P\Big\{\xi = i - j\Big\} & \text{nếu } \; s < i \le S \\ P\Big\{\xi = S - j\Big\} & \text{nếu } \; i \le s. \end{cases} \qquad \textbf{(4.29)}$$

Ví dụ 4.3: Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế, trong đó yêu cầu có thể là 0, 1 hoặc 2 đơn vị phụ tùng cần thay thế trong một chu kỳ bất kỳ với phân bố xác suất như sau

$$P\Big\{\xi = 0\Big\} = 0{,}3; \; P\Big\{\xi = 1\Big\} = 0{,}6; \; P\Big\{\xi = 2\Big\} = 0{,}1$$

và giả sử $s = 0$; $S = 2$.

Không gian trạng thái sẽ là $E = \Big\{-1, 0, 1, 2\Big\}$.

Ta có: $$p_{ij} = P\Big\{X_{n+1} = j \Big| X_n = i\Big\} = \begin{cases} P\Big\{\xi = i - j\Big\} & \text{nếu } \; 0 < i \le 2, \\ P\Big\{\xi = 2 - j\Big\} & \text{nếu } \; i \le 0. \end{cases}$$

$$p_{-1,-1} = P\Big\{X_{n+1} = -1 \Big| X_n = -1\Big\} = P\Big\{\xi = 2 - (-1)\Big\} = P(\varnothing) = 0,$$

$$p_{-1,0} = P\Big\{X_{n+1} = 0 \Big| X_n = -1\Big\} = P\Big\{\xi = 2 - 0\Big\} = P\Big\{\xi = 2\Big\} = 0{,}1,$$

$$p_{-1,1} = P\Big\{X_{n+1} = 1 \Big| X_n = -1\Big\} = P\Big\{\xi = 2 - 1\Big\} = P\Big\{\xi = 1\Big\} = 0{,}6,$$

$$p_{-1,2} = P\left\{ X_{n+1} = 2 \middle| X_n = -1 \right\} = P\left\{\xi = 2-2\right\} = P\left\{\xi = 0\right\} = 0{,}3,$$

. . . .

$$p_{2,-1} = P\left\{ X_{n+1} = -1 \middle| X_n = 2 \right\} = P(\varnothing) = 0,$$

$$p_{2,0} = P\left\{ X_{n+1} = 0 \middle| X_n = 2 \right\} = P\left\{\xi = 2-0\right\} = P\left\{\xi = 2\right\} = 0{,}1,$$

$$p_{2,1} = P\left\{ X_{n+1} = 1 \middle| X_n = 2-1 \right\} = P\left\{\xi = 2-1\right\} = P\left\{\xi = 1\right\} = 0{,}6,$$

$$p_{2,2} = P\left\{ X_{n+1} = 2 \middle| X_n = 2 \right\} = P\left\{\xi = 2-2\right\} = P\left\{\xi = 0\right\} = 0{,}3$$

Ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

4.2.6 Phân bố dừng, phân bố giới hạn, phân bố ergodic

Định nghĩa 4.4: $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *được gọi là ma trận phân bố dừng của chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển* P *nếu thoả mãn 2 điều kiện*:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P & (a) \\ p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1 & (b) \end{cases} \qquad \textbf{(4.30)}$$

Điều kiện (4.30-b) là cần thiết để $\mathbf{P}^*$ là phân bố xác suất của hệ tại thời điểm bất kỳ.

Điều kiện (4.30-a) suy ra $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P = \mathbf{P}^* P^2 = \dots = \mathbf{P}^* P^n$; $\forall\ n$.

Như vậy nếu chuỗi Markov có phân bố dừng tại thời điểm n_0 nào đó thì hệ sẽ có phân bố xác suất không thay đổi sau mọi bước chuyển kể từ thời điểm n_0. Đặc biệt nếu phân bố đầu $\mathbf{P}^*$ của chuỗi Markov thỏa mãn điều kiện (4.30) thì $\mathbf{P}^*(n) = \mathbf{P}^*$ với mọi n, nghĩa là phân bố xác suất của hệ không thay đổi.

Điều kiện (4.30-a) có thể viết lại dưới dạng

$$P^t\, \mathbf{P}^{*t} = \mathbf{P}^{*t} \qquad \textbf{(4.31)}$$

trong đó ma trận cột $\mathbf{P}^{*t}$ là ma trận chuyển vị của ma trận hàng $\mathbf{P}^*$.

Công thức (4.31) cho thấy phân bố dừng $\mathbf{P}^*$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng bằng 1 của ma trận P^t.

Định nghĩa 4.5: *Ta nói rằng chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển* P *có ma trận phân bố giới hạn là* $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *nếu thoả mãn 2 điều kiện:*

1) *Với mọi* j *tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ *không phụ thuộc* i, **(4.32)**

2) $\sum\limits_{j\in E} p_j = 1$, $p_j \ge 0$, **(4.33)**

Nếu điều kiện (4.33) được thay bởi

3) $\sum\limits_{j\in E} p_j = 1$, $p_j > 0$ **(4.34)**

thì chuỗi Markov được gọi là *có tính ergodic và* $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *là ma trận phân bố ergodic.*

Nhận xét 4.1:

➢ Nếu phân bố của X_{n_0} (ở thời điểm thứ n_0) của chuỗi là phân bố dừng thì từ thời điểm này trở đi phân bố xác suất của chuỗi không thay đổi; nghĩa là với mọi $m \ge n_0$, X_m và X_{n_0} có cùng phân bố xác suất.

➢ Phân bố giới hạn là phân bố hệ sẽ đạt được khi thời gian tiến đến vô cùng. Phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển, không phụ thuộc phân bố đầu (ví dụ 4.5). Trong thực tế có thể đến thời điểm nào đó trở đi ma trận xác suất chuyển có các hàng bằng nhau, lúc đó chuỗi đạt được phân bố giới hạn. Ví dụ 4.4 sau đây chứng tỏ với $n = 20$ thì chuỗi đạt được phân bố giới hạn.

➢ Phân bố ergodic là phân bố giới hạn với xác suất dương tại mọi trạng thái của chuỗi. Như vậy về lâu dài hệ nhận giá trị tại mọi trạng thái với xác suất dương.

Ví dụ 4.4: Có 3 mạng điện thoại di động *A, B, C* cùng khai thác thị trường. Tỉ lệ chiếm lĩnh thị trường hiện tại tương ứng là 40%, 30% và 30%. Theo thống kê người ta thấy xác suất thay đổi mạng của khách hàng trong mỗi quí (3 tháng) như sau:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Áp dụng công thức (4.18) và (4.21) ta tính được phân bố tại thời điểm thứ n: $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)}$ trong các trường hợp sau.

$n = 0$ $\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$,

$n = 1$ $P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$ $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)P = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,43 & 0,22 \end{bmatrix}$,

$$n=6 \quad P^6=\begin{bmatrix}0{,}2125 & 0{,}5492 & 0{,}2383\\ 0{,}1969 & 0{,}5648 & 0{,}2383\\ 0{,}1969 & 0{,}5181 & 0{,}2853\end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(6)=\mathbf{P}(0)P^6=\begin{bmatrix}0{,}2047 & 0{,}5476 & 0{,}2477\end{bmatrix},$$

$$n=12 \quad P^{12}=\begin{bmatrix}0{,}2002 & 0{,}5503 & 0{,}2495\\ 0{,}2000 & 0{,}5506 & 0{,}2495\\ 0{,}2000 & 0{,}5484 & 0{,}2516\end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(12)=\mathbf{P}(0)P^{12}=\begin{bmatrix}0{,}2001 & 0{,}550 & 0{,}2499\end{bmatrix},$$

$$n=18 \quad P^{18}=\begin{bmatrix}0{,}2000 & 0{,}5500 & 0{,}2500\\ 0{,}2000 & 0{,}5500 & 0{,}2500\\ 0{,}2000 & 0{,}5499 & 0{,}2501\end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(18)=\mathbf{P}(0)P^{18}=\begin{bmatrix}0{,}2000 & 0{,}550 & 0{,}2500\end{bmatrix}.$$

$$n=20 \quad P^{20}=\begin{bmatrix}0{,}2000 & 0{,}5500 & 0{,}2500\\ 0{,}2000 & 0{,}5500 & 0{,}2500\\ 0{,}2000 & 0{,}5500 & 0{,}2500\end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(20)=\mathbf{P}(0)P^{20}=\begin{bmatrix}0{,}20 & 0{,}55 & 0{,}25\end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng khi n càng lớn xác suất trên mỗi cột càng gần bằng nhau và đạt được phân bố giới hạn khi $n=20$.

Vậy thị trường đạt trạng thái ổn định với tỉ lệ chiếm lĩnh thị trường tương ứng 20%, 55% và 25%. Ta nhận thấy phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển và không phụ thuộc phân bố ban đầu.

Ví dụ sau đây cũng minh họa thêm về điều đó.

Ví dụ 4.5: Về sự bình đẳng trong giáo dục giữa các nhóm chủng tộc.

Trên cơ sở báo cáo điều tra dân số của văn phòng điều tra dân số Hoa kỳ năm 1960, hai tác giả Lieberson và Fuguitt (1967) đã xác định được ma trận chuyển trình độ học vấn giữa hai thế hệ khi so sánh tình trạng học vấn của nhóm thanh niên độ tuổi 20-24 với trình độ học vấn của bố của họ:

$$P=\begin{array}{r} \\ \text{Dưới ĐH} \\ \text{ĐH} \\ \text{Trên ĐH}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{Dưới ĐH} & \text{ĐH} & \text{Trên ĐH}\end{array}\\ \begin{bmatrix}0{,}43 & 0{,}34 & 0{,}23\\ 0{,}10 & 0{,}36 & 0{,}54\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}80\end{bmatrix}\end{array}$$

Nghĩa là xác suất để người con có trình độ dưới ĐH với điều kiện người bố dưới ĐH là 0,43 và xác suất để người con có trình độ ĐH với điều kiện người bố dưới ĐH là 0,34 …

Hai tác giả đồng ý rằng có hai loại bất lợi đối với các nhóm chủng tộc và dân tộc. Loại bất lợi thứ nhất bắt nguồn từ nguồn gốc chủng tộc và dân tộc mà kết quả là có sự khác nhau giữa ma trận chuyển của nhóm người da trắng và nhóm người da mầu. Ngay cả khi sự phân biệt chủng tộc bị loại bỏ thì vẫn còn loại bất lợi thứ hai đó là vị trí xã hội và thu nhập của người da mầu thấp hơn nhiều so với người da trắng. Nói cách khác ngay cả khi ma trận chuyển về học vấn giữa hai thế hệ

P (ma trận xác suất chuyển) được xem là như nhau giữa hai nhóm thì điều kiện ban đầu $\mathbf{P}(0)$ (phân bố đầu) cũng khác nhau.

Hai tác giả cho rằng có thể xem ma trận chuyển P giữa hai nhóm da trắng và da mầu là như nhau nhưng có xuất phát điểm khác nhau. Nghĩa là trình độ học vấn ở thời điểm ban đầu (năm 1960) của hai nhóm chủng tộc khác nhau.

Chẳng hạn năm 1960: Tỷ lệ trình độ học vấn dưới ĐH, ĐH, trên ĐH của nhóm chủng tộc da trắng tương ứng là: 46%, 31%, 23%. Tỷ lệ trình độ học vấn dưới ĐH, ĐH, trên ĐH của nhóm chủng tộc da màu tương ứng là: 75%, 16%, 09%.

Vậy phân bố đầu của nhóm chủng tộc da trắng $P(1)=\begin{bmatrix}0,46 & 0,31 & 0,23\end{bmatrix}$,

phân bố đầu của nhóm chủng tộc da màu $P(1)=\begin{bmatrix}0,75 & 0,16 & 0,09\end{bmatrix}$.

Áp dụng công thức (4.21) ta có thể tính được phân bố xác suất của các thế hệ tiếp theo. Chẳng hạn tỉ lệ trình độ học vấn của thế hệ tiếp theo là

$$\text{Da trắng: } P(2)=\begin{bmatrix}0,46 & 0,31 & 0,23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}43 & 0{,}34 & 0{,}23\\ 0{,}10 & 0{,}36 & 0{,}54\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,24 & 0,30 & 0,46\end{bmatrix}$$

$$\text{Da màu: } P(2)=\begin{bmatrix}0,75 & 0,16 & 0,09\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}43 & 0{,}34 & 0{,}23\\ 0{,}10 & 0{,}36 & 0{,}54\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,34 & 0,33 & 0,33\end{bmatrix}$$

Tiếp tục tính toán ta được kết quả trình bày trong bảng sau, trong đó chỉ số khác nhau trong bảng là tỷ lệ % khoảng cách mà hai nhóm cần phải thay đổi để đạt được phân bố trình độ học vấn bằng nhau.

		% Dưới ĐH	% ĐH	% Trên ĐH	Chỉ số % khác nhau
(1960)	Da trắng	46	31	23	29
	Da mầu	75	16	09	
$\mathbf{P}(2)$	Da trắng	24	30	46	13
	Da mầu	34	33	33	
$\mathbf{P}(3)$	Da trắng	16	26	58	6
	Da mầu	20	28	52	
$\mathbf{P}(4)$	Da trắng	12	23	64	3
	Da mầu	14	25	61	
$\mathbf{P}(5)$	Da trắng	11	22	68	1
	Da mầu	11	23	66	
$\mathbf{P}(6)$	Da trắng	10	22	68	1
	Da mầu	11	22	67	
$\mathbf{P}(7)$	Da trắng	10	21	69	1
	Da mầu	10	22	68	
$\mathbf{P}(8)$	Da trắng	10	21	69	0
	Da mầu	10	21	69	

Như vậy không phụ thuộc vào xuất phát điểm, sau 8 thế hệ các nhóm người trong cộng đồng đều có trình độ học vấn như nhau theo tỷ lệ 10% dưới ĐH, 21% ĐH và 69% trên ĐH.

Các định lý sau cho quan hệ giữa phân bố giới hạn và phân bố dừng, và điều kiện tồn tại phân bố ergodic.

Định lý 4.3: Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì đó là phân bố dừng duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ là phân bố giới hạn, khi đó với mọi j ta có:

$$p_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}\right) = \sum_k p_k p_{kj}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix} P$. Do đó $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ là một phân bố dừng.

Ngược lại giả sử $\begin{bmatrix} \overline{p}_1 & \overline{p}_2 & \dots \end{bmatrix}$ là một phân bố dừng bất kỳ của chuỗi Markov này thì

$$\overline{p}_j = \sum_k \overline{p}_k p_{kj} = \sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(2)} = ... = \sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \overline{p}_j = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(n)}\right) = \sum_k \overline{p}_k p_j = p_j .$$

Nghĩa là phân bố giới hạn là phân bố dừng duy nhất.

Định lý 4.4: Nếu chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn thì chuỗi này là ergodic khi và chỉ khi tồn tại n_0 sao cho $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$.

Nhận xét 4.2: 1) Phân bố dừng là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (4.30), cụ thể:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... \end{bmatrix} P \\ x_j \ge 0, \ \sum_j x_j = 1. \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} P^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ x_j \ge 0, \ \sum_j x_j = 1. \end{cases} \qquad \textbf{(4.35)}$$

Hệ phương trình (4.35) có thể vô nghiệm, duy nhất nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Do đó, một cách tương ứng chuỗi Markov có thể không tồn tại phân bố dừng, có phân bố dừng duy nhất hoặc có vô số phân bố dừng.

Giải hệ phương trình (4.35) cho trường hợp ví dụ 4.5 ta cũng thu được phân bố dừng tương ứng $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{bmatrix}$.

2) Từ định lý 4.3 và 4.4 ta thấy rằng nếu chuỗi Markov hữu hạn trạng thái với ma trận xác suất chuyển $P = \begin{bmatrix} p_{ij} \end{bmatrix}$ thỏa mãn điều kiện tồn tại n_0 sao cho $\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$ thì chuỗi này là ergodic. Phân bố ergodic là phân bố giới hạn và cũng là phân bố dừng duy nhất, đó là nghiệm của hệ phương trình (4.35).

Ví dụ 4.6: Xét chuỗi Markov ở ví dụ 4.2, ma trận xác suất chuyển

$$P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix},\ 0<a,b<1$$

Theo định lý 4.4 chuỗi Markov có tính ergodic với phân bố ergodic là nghiệm của hệ phương trình (theo nhận xét 4.2-2).

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\ x_1+x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-ax_1+bx_2=0\\ x_1+x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{b}{a+b}\\ x_2=\dfrac{a}{a+b}\end{cases}$$

Mặt khác cũng có thể tính trực tiếp ma trận chuyển sau n bước

$$P^n=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}^n=\frac{1}{a+b}\left\{\begin{bmatrix}b & a\\ b & a\end{bmatrix}+(1-a-b)^n\begin{bmatrix}a & -a\\ -b & b\end{bmatrix}\right\}\qquad\textbf{(4.36)}$$

Vì $-1<1-a-b<1$ do đó $(1-a-b)^n\to 0$ khi $n\to\infty$.

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}P^{(n)}=\begin{bmatrix}\dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b}\\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b}\end{bmatrix}.$$

Để chứng minh (4.36) ta có thể tính theo một trong các cách sau:

- Quy nạp theo n.
- Sử dụng công thức: nếu $AB=BA$ thì $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k}$ và bằng cách đặt

$$P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & a\\ b & -b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix}-a & a\\ b & -b\end{bmatrix}\Rightarrow A^k=(-a-b)^{k-1}A$$

$$P^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^k=I+\sum_{k=1}^{n}C_n^kA^k=I+\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-a-b)^{k-1}\right)A$$

$$=I+\frac{1}{-(a+b)}\Big((1-a-b)^n-1\Big)A=\frac{1}{a+b}\left\{\begin{bmatrix}b & a\\ b & a\end{bmatrix}+(1-a-b)^n\begin{bmatrix}a & -a\\ -b & b\end{bmatrix}\right\}.$$

Ví dụ 4.7: Trong một bài báo viết năm 1913 A. A. Markov đã chọn 1 dãy gồm 20.000 chữ cái trong trường ca Evghenhi Onheghin của A. X. Puskin và thấy rằng các chữ cái này chuyển đổi liên tiếp theo hai trạng thái nguyên âm (Na) và phụ âm (Pa) với ma trận xác suất chuyển là

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \end{array} \\ \begin{array}{c} Na \\ Pa \end{array} & \begin{bmatrix} 0,128 & 0,872 \\ 0,663 & 0,337 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} Na & \quad Pa \end{array} \end{array}$$

Phân bố giới hạn (cũng là phân bố dừng) của chuỗi Markov này là

$$P(Na) = \frac{0,663}{0,872 + 0,663} = 0,423\,,\ P(Pa) = \frac{0,872}{0,872 + 0,663} = 0,568\,.$$

Vậy có khoảng 42,3% nguyên âm và 56,8% phụ âm trong tác phẩm trên.

4.3 QUÁ TRÌNH DỪNG

4.3.1 Hàm tự hiệp phương sai và hàm tự tương quan của quá trình dừng

Giả sử $\left\{X(t);\, t \in I\right\}$ là quá trình dừng với giá trị trung bình m và hàm tự tương quan $K_X(\tau)$, nghĩa là:

1) $m(t) = \mathrm{E}\, X(t) = m = \mathrm{const}$,

2) *Hàm tự tương quan:* $K_{XX}(t-s) = \mathrm{E}\left[X(s)X(t)\right];\ \forall s, t \in I$.

Hoặc $K_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right]$

Hàm tự tương quan có các tính chất sau.

Định lý 4.5:

1) $K_{XX}(-\tau) = K_{XX}(\tau)$.

2) $\left|K_{XX}(\tau)\right| \le K_{XX}(0) = \mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 = \mathrm{E}\left|X(0)\right|^2,\ \forall t.$

Nếu $X(t)$ là tín hiệu ngẫu nhiên thì $K_{XX}(0) = \mathrm{E}\left|X(t)\right|^2$ được gọi là năng lượng trung bình của tín hiệu.

Hai *hàm tương quan chéo* của hai quá trình $\left\{X(t);\, t \in I\right\}$, $\left\{Y(t);\, t \in I\right\}$ được định nghĩa và ký hiệu

$$R_{XY}(s;t) = \mathrm{E}\left[X(s)Y(t)\right]\,,\ R_{YX}(s;t) = \mathrm{E}\left[Y(s)X(t)\right]\ ;\ \forall s, t \in I \qquad \textbf{(4.37)}$$

Hai quá trình dừng $\left\{X(t);\, t \in I\right\}$, $\left\{Y(t);\, t \in I\right\}$ được gọi là ***dừng liên kết cùng nhau*** nếu hàm tự tương quan chéo chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa hai thời điểm, nghĩa là

$$R_{XY}(t;t+\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = R_{XY}(\tau).$$

Trường hợp $R_{XY}(t;t+\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = 0$ ta nói hai quá trình $X(t)$, $Y(t)$ ***trực giao*** nhau.

Hàm tương quan chéo của hai quá trình dừng $X(t)$, $Y(t)$ có các tính chất sau:

1) $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$

2) $| R_{XY}(\tau) | \le \sqrt{R_{XX}(0) R_{YY}(0)} \le \frac{1}{2}\left[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)\right]$

Nhận xét 4.3:

1) Ý nghĩa vật lý của hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)$ của quá trình dừng thể hiện sự phụ thuộc lẫn nhau của hai biến ngẫu nhiên của quá trình $X(t)$ lấy ở hai thời điểm cách nhau τ đơn vị thời gian. Vì vậy rõ ràng rằng nếu quá trình $X(t)$ thay đổi nhiều theo thời gian thì hàm tự tương quan giảm nhanh từ giá trị cực đại $K_{XX}(0)$ khi τ tăng. Sự giảm nhanh của hàm tự tương quan có thể được đặc trưng bởi thời gian không tương quan τ_0, đó là giá trị sao cho khi $\tau > \tau_0$ thì trị tuyệt đối của $K_{XX}(\tau)$ nhỏ hơn mức ý nghĩa, và thường chọn bằng 1% của giá trị cực đại $K_{XX}(0)$.

2) Giả sử quá trình $\left\{X(t);\, t \in I\right\}$ có hàm trung bình $m(t) = \mathrm{E}\,X(t) = m = \mathrm{const}$ và hàm tự tương quan $\mathrm{E}\left[X(s)X(t)\right]$ chỉ phụ thuộc vào $t - s$, khi đó hàm tự hiệp phương sai

$$\mathrm{cov}(X(s), X(t)) = \mathrm{E}\Big[\big(X(s) - m\big)\overline{\big(X(t) - m\big)}\Big] = \mathrm{E}\Big[X(s)\overline{X(t)}\Big] - \left|m\right|^2$$

cũng chỉ phụ thuộc vào $t - s$, nghĩa là tồn tại hàm ký hiệu $C_X(\tau)$, sao cho

$$C_{XX}(t - s) = \mathrm{cov}(X(s), X(t));\ \forall s, t \in I \qquad \textbf{(4.38)}$$

$C_{XX}(\tau)$ được gọi là ***hàm tự hiệp phương sai*** của quá trình dừng $\left\{X(t);\, t \in I\right\}$.

Vì vậy có thể định nghĩa quá trình dừng theo nghĩa rộng là quá trình thỏa mãn hai điều kiện sau:

1’) $m(t) = \mathrm{E}X(t) = m = \mathrm{const}$,

2’) hàm tự hiệp phương sai $R_{XX}(s,t) = \mathrm{cov}(X(s), X(t))$ chỉ phụ thuộc vào $t - s$; $\forall s, t \in I$.

Rõ ràng rằng hai định nghĩa này trùng nhau khi $m(t) = \mathrm{E}\,X(t) = 0, \forall t$.

Ví dụ 4.8: *Giả sử U, V là hai biến ngẫu nhiên thoả mãn*

$$\mathrm{E}U = \mathrm{E}V = 0,\ \mathrm{var}U = \mathrm{var}V = \sigma^2,\ \mathrm{cov}(U,V) = 0.$$

Khi đó quá trình $X(t) = U\cos\lambda t + V\sin\lambda t$ *,* λ *là một hằng số, là quá trình dừng với hàm tự tương quan* $K_X(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

Giải: $\mathrm{E}\,X(t) = \mathrm{E}\left[U\cos\lambda t + V\sin\lambda t\right] = \cos\lambda t\,\mathrm{E}U + \sin\lambda t\,\mathrm{E}V = 0$.

Từ giả thiết $\mathrm{E}\,U = \mathrm{E}\,V = 0$, $\operatorname{var} U = \operatorname{var} V = \sigma^2 \Rightarrow \mathrm{E}(U^2) = \mathrm{E}(V^2) = \sigma^2$,

$$0 = \operatorname{cov}(U,V) = \mathrm{E}(UV) - (\mathrm{E}\,U)(\mathrm{E}\,V) \Rightarrow \mathrm{E}(UV) = 0.$$

$$\mathrm{E}\Big[X(s)X(t)\Big] = \mathrm{E}\Big[\big(U\cos\lambda s + V\sin\lambda s\big)\big(U\cos\lambda t + V\sin\lambda t\big)\Big]$$

$$= \mathrm{E}\Big[U^2\cos\lambda s\cos\lambda t + V^2\sin\lambda s\sin\lambda t + UV\big(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\big)\Big]$$

$$= \cos\lambda s\cos\lambda t\,\mathrm{E}\Big[U^2\Big] + \sin\lambda s\sin\lambda t\,\mathrm{E}\Big[V^2\Big] + \big(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\big)\mathrm{E}\Big[UV\Big]$$

$$= \sigma^2\big(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\big) = \sigma^2\cos\lambda(t-s)$$

Vậy $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

Ví dụ 4.9: *Tín hiệu ngẫu nhiên hình sin $X(t) = A\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)$, trong đó A,Θ là hai biến ngẫu nhiên độc lập, A có phương sai hữu hạn và Θ có phân bố đều trên đoạn $\big[0;2\pi\big]$, ω_0 là hằng số. $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \dfrac{\sigma^2}{2}\cos\omega_0\tau$, với $\sigma^2 = \mathrm{E}\Big[A^2\Big]$.*

Giải: Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $\big[0;2\pi\big]$ với hàm mật độ

$$f_\Theta(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{nếu } \; 0 \le u \le 2\pi \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\Big[\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)\Big] = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t + u)f_\Theta(u)du = \int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t + u)\frac{1}{2\pi}du = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega_0 t + u)\Big|_{u=0}^{2\pi} = 0$$

$$\mathrm{E}\,X(t) = \mathrm{E}\Big[A\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)\Big] = \mathrm{E}\Big[A\Big]\mathrm{E}\Big[\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)\Big] = 0$$

(vì A,Θ độc lập và $\mathrm{E}\Big[\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)\Big] = 0$)

$$\mathrm{E}\Big[X(s)X(t)\Big] = \mathrm{E}\Big[\Big(A\cos\big(\omega_0 s + \Theta\big)\Big)\Big(A\cos\big(\omega_0 t + \Theta\big)\Big)\Big]$$

$$= \mathrm{E}\Big[A^2\big(\cos(\omega_0 s + \Theta)\big)\big(\cos(\omega_0 t + \Theta)\big)\Big] = \mathrm{E}\Big[A^2\Big]\mathrm{E}\Big[\big(\cos(\omega_0 s + \Theta)\big)\big(\cos(\omega_0 t + \Theta)\big)\Big]$$

$$\mathrm{E}\Big[\big(\cos(\omega_0 s + \Theta)\big)\big(\cos(\omega_0 t + \Theta)\big)\Big] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\Big\{\cos\big(\omega_0(s+t) + 2\Theta\big)\Big\} + \frac{1}{2}\Big\{\cos\omega_0(t-s)\Big\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}\Big[\cos\big(\omega_0(s+t) + 2\Theta\big)\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{E}\Big[\cos\omega_0(t-s)\Big] = \frac{1}{2}\cos\omega_0(t-s).$$

Do đó quá trình ngẫu nhiên hình sin là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)=\frac{1}{2}\sigma^2\cos\omega_0\tau$.

Ví dụ 4.10: (Quá trình Wiener) *Quá trình* $W(t),\ t\geq 0$ *được gọi là một quá trình Wiener với tham số* σ^2 *nếu nó thoả mãn các tính chất sau:*

a. $W(0)=0$.

b. *Với mọi* $0\leq s<t$ *thì* $W(t)-W(s)$ *là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn* $\mathbf{N}(0;\sigma^2(t-s))$.

c. $W(t),\ t\geq 0$ *là quá trình với gia số độc lập, nghĩa là với mọi* $0\leq t_1<t_2...<t_n$ *các biến ngẫu nhiên:* $W(t_2)-W(t_1),\ W(t_3)-W(t_2),...,\ W(t_n)-W(t_{n-1})$ *là độc lập.*

Như vậy $W(t),\ t\geq 0$ là một quá trình có: $m(t)=\mathrm{E}W(t)=0\ \ \forall\ t\geq 0$.

$\forall\ t,s\geq 0$, giả sử $s\leq t$:

$$r(s,t)=\mathrm{E}\Big[W(s)W(t)\Big]=\mathrm{E}\Big[W(s)\Big(W(s)+W(t)-W(s)\Big)\Big]$$

$$=\mathrm{E}\Big[W(s)\Big]^2+\mathrm{E}\Big[\Big(W(s)-W(0)\Big)\Big(W(t)-W(s)\Big)\Big]$$

$$=\sigma^2 s+\mathrm{E}\Big[W(s)-W(0)\Big]\mathrm{E}\Big[W(t)-W(s)\Big]=\sigma^2 s.$$ (do gia số độc lập và $\mathrm{E}W(s)=0$)

Do đó $r(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$.

Vậy quá trình Wiener là một quá trình gia số độc lập dừng (thỏa mãn điều kiện 4.3) nhưng không phải là quá trình dừng. Quá trình Wiener biểu diễn chuyển động Brown, mô tả sự chuyển động của hạt trong môi trường chất lỏng thuần nhất.

4.3.2 Đặc trưng phổ của quá trình dừng

Đối với các hệ thống tuyến tính tất nhiên hoặc các tín hiệu tất nhiên người ta có thể sử dụng cả hai phương pháp phân tích theo miền thời gian và theo miền tần số.

Các tính chất phổ tần số của tín hiệu tất nhiên $x(t)$ nhận được từ biến đổi Fourier (xem chương 2)

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi tf}x(t)dt$$

Hàm $\widehat{X}(f)$ đôi khi được gọi một cách đơn giản là phổ của $x(t)$, có đơn vị volt/hertz.

Nếu biết phổ $\widehat{X}(f)$ thì có thể khôi phục tín hiệu thông qua phép biến đổi Fourier ngược

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi tf}\widehat{X}(f)df$$

Một cách tự nhiên ta cũng tìm cách sử dụng hai phương pháp này cho trường hợp tín hiệu ngẫu nhiên là quá trình dừng.

Biểu diễn phổ của tín hiệu tất nhiên nhận được từ biến đổi Fourier của tín hiệu đó. Mặc dù phép biến đổi Fourier cũng có vai trò rất quan trọng trong việc đặc trưng phổ của các tín hiệu ngẫu nhiên. Tuy nhiên không thể tính trực tiếp biến đổi Fourier các tín hiệu ngẫu nhiên, vì phép biến đổi có thể không tồn tại đối với hầu hết các hàm mẫu của quá trình. Vì vậy phân tích phổ của các quá trình ngẫu nhiên đòi hỏi tỉ mỉ hơn phân tích các tín hiệu tất nhiên.

Mặt khác ta có thể biểu diễn công suất của quá trình ngẫu nhiên dưới dạng hàm theo tần số thay vì theo hiệu điện thế (đẳng thức Parseval 2.92 và định lý năng lượng Rayleigh 2.109-2.110), biểu diễn như thế tồn tại. Trong mục này ta xét đến các hàm đó và gọi là ***mật độ phổ công suất***.

A. *Mật độ phổ công suất*

Xét tín hiệu là quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t);\, t\in\mathbb{R}\right\}$, có hàm mẫu $x(t)$.

Với mỗi $T>0$ xét: $x_T(t)=\begin{cases} x(t) & \text{nếu } |t|<T \\ 0 & \text{nếu } |t|\ge T\end{cases}$

Đặt biến đổi Fourier của $x_T(t)$ là $\widehat{X}_T(f)=\mathscr{F}\left\{x_T(t)\right\}$

$$\widehat{X}_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i2\pi ft}dt.$$

Năng lượng của $x(t)$ trong khoảng $(-T,T)$ là

$$E(T)=\int_{-T}^{T}x_T^2(t)dt=\int_{-T}^{T}x^2(t)dt$$

Áp dụng đẳng thức Parseval ta có:

$$E(T)=\int_{-T}^{T}\left|x_T(t)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x_T(t)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2df\,.$$

Chia cho $2T$ ta được ta được công suất trung bình $P(T)$ của $x(t)$ trong khoảng $(-T,T)$.

$$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x_T(t)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}df$$

$\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ là mật độ phổ công suất của tín hiệu trong khoảng $(-T,T)$. Tuy nhiên $\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ vẫn là một biến ngẫu nhiên vì được tính toán theo hàm mẫu. Mật độ phổ công suất được tính theo giá trị trung bình (kỳ vọng) của $\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ và khi $T \to \infty$.

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df \qquad \textbf{(4.39)}$$

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 dt = A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right] \qquad \textbf{(4.40)}$$

trong đó kí hiệu và định nghĩa

$$A\left[\cdot\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\cdot\right] dt \qquad \textbf{(4.41)}$$

(xem định nghĩa 4.7 và các công thức 4.52-4.53).

Ta định nghĩa ***mật độ phổ công suất của quá trình***, viết tắt **PSD** (Power Spectral Density), là

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2. \qquad \textbf{(4.42)}$$

Từ công thức (4.31), (4.42) ta có công thức tính công suất

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f) df$$

Trường hợp quá trình $\left\{X(t);\, t \in \mathbb{R}\right\}$ là quá trình dừng thì

$\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 = R_{XX}(0) = \overline{X}^2 = \text{const}$, do đó $P_{XX} = A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right] = \overline{X}^2$.

Ví dụ 4.11: Xét quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$, trong đó A và f_0 là hai hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên khoảng $\left(0;\, \pi/2\right)$.

Ta tính trực tiếp công suất trung bình của tín hiệu:

$$\mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\cos^2\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\Theta\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\cos\left(4\pi f_0 t + 2\Theta\right)\right] = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\sin\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\sin\big(4\pi f_0 t+\pi\big)-\sin\big(4\pi f_0 t\big)\Big]=\cos\left(4\pi f_0 t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\big(4\pi f_0 t\big)$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}\Big[X^2(t)\Big]=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cos\big(4\pi f_0 t+2\theta\big)d\theta=\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{\pi}\sin\big(4\pi f_0 t\big)$$

$$P_{XX}=A\Big[\mathrm{E}\Big(X^2(t)\Big)\Big]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{\pi}\sin\big(4\pi f_0 t\big)\right]dt=\frac{A^2}{2}.$$

Cũng có thể tính qua mật độ phổ công suất như sau:

$$\widehat{X}_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}A\cos\big(2\pi f_0 t+\Theta\big)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\frac{A}{2}e^{i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{2\pi i(f_0-f)t}dt+\frac{A}{2}e^{-i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{-2\pi i(f_0+f)t}dt$$

$$=ATe^{i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}+ATe^{-i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

$$\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=A^2T^2\Big[\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos 2\Theta\Big],\ \alpha=\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T};\ \beta=\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

Vì $\mathrm{E}\Big[\cos 2\Theta\Big]=0$, do đó

$$\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\frac{A^2\pi}{2}\left[\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}\right)^2+\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}\right)^2\right]$$

Sử dụng kết quả (Lathi, 1968: An Introduction to Random Signals and Communication Theory, International Textbook, Scranion, Pennsylvania. p.24)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin aT}{aT}\right]^2=\delta(a). \tag{4.43}$$

Ta có $\rho_{XX}(f)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\dfrac{A^2\pi}{2}\Big[\delta\big\{2\pi(f-f_0)\big\}+\delta\big\{2\pi(f+f_0)\big\}\Big]$

Áp dụng công thức (3.24) ta được $\rho_{XX}(f)=\dfrac{A^2}{4}\Big[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\Big]$

Vậy $P_{XX}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{4}\Big[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\Big]df=\frac{A^2}{2}.$

Tính chất mật độ phổ công suất

1. $\rho_{XX}(f)$ là hàm thực
2. $\rho_{XX}(f)\geq 0$

3. $\rho_{XX}(-f) = \rho_{XX}(f)$ nếu   là quá trình thực

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f)df = A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right]$

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f)e^{i2\pi f\tau}df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right];\, \rho_{XX}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]e^{-i2\pi f\tau}d\tau$ **(4.44)**

Chứng minh:

Từ công thức (4.42) suy ra tính chất 1. và 2.

Tính chất 3. suy từ tính chất của phép biến đổi Fourier, công thức (2.107-3).

Ta chứng minh công thức (4.44):

Theo công thức (4.42): $\rho_{XX}(f) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2$

Mặt khác $\widehat{X}_T(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int\limits_{-T}^{T} x(t)e^{-i2\pi ft}dt.$

Do đó $\rho_{XX}(f) = \lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} X(t_1)e^{i2\pi ft_1}dt_1 \int\limits_{-T}^{T} X(t_2)e^{-i2\pi ft_2}dt_2\right]$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T} \mathrm{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right]e^{-i2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

$\mathrm{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = R_{XX}(t_1,t_2)$ với $-T < t_1 < T$ và $-T < t_2 < T$

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T} R_{XX}(t_1,t_2)e^{-i2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2 .$$

Đổi biến số lấy tích phân $\begin{cases} t = t_1 \\ \tau = t_2 - t_1 = t_2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = dt_1 \\ d\tau = dt_2 \end{cases}$

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T-t}^{T-t}\int\limits_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau)dte^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau)dt\right\}e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

Mặt khác $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau)dt = A\left[R_{XX}(t,t+\tau)\right]$

Vậy $\rho_{XX}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]e^{-i2\pi f\tau}d\tau .$

Sử dụng công thức biến đổi Fourier ngược ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f) e^{i2\pi f\tau} df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]$.

b. Biểu diễn phổ của quá trình dừng

Định nghĩa 4.6: Giả sử $\left\{X(t);\, t\in I\right\}$ *quá trình dừng với hàm tự tương quan* $K_{XX}(\tau)$. *Nếu tồn tại* $\mathscr{P}_{XX}(f)$ *sao cho:*

$$K_{XX}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f} \mathscr{P}_{XX}(f) df \quad \text{khi } I \subset \mathbb{Z} \tag{4.45}$$

hoặc

$$K_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau 2\pi f} \mathscr{P}_{XX}(f) df \quad \text{khi } I = \mathbb{R} \tag{4.46}$$

thì $\mathscr{P}_{XX}(f)$ *được gọi là* **mật độ phổ** *của quá trình dừng* $\left\{X(t);\, t\in I\right\}$.

Định lý 4.6: 1) Trường hợp thời gian rời rạc $I=\mathbb{Z}$: Nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|K_{XX}(n)\right| < \infty$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathscr{P}_{XX}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f} K_{XX}(n). \tag{4.47}$$

2) Trường hợp thời gian liên tục $I=\mathbb{R}$: Nếu $K_{XX}(\tau)$ khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathscr{P}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f} K_{XX}(\tau) d\tau. \tag{4.48}$$

Như vậy hàm mật độ phổ là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan và hàm tự tương quan là biến đổi Fourier ngược của mật độ phổ.

$$\mathscr{P}_{XX}(f) = \mathscr{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\},\ K_{XX}(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{P}_{XX}(f)\right\}. \tag{4.49}$$

Định lý 4.7 (Định lý Wiener - Khintchine)**:** Mật độ phổ công suất PSD của quá tình dừng $\left\{X(t);\, t\in I\right\}$ có giá trị trung bình $\mathrm{E}X(t)=0$ bằng mật độ phổ của quá trình này và bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan:

$$\mathscr{P}_{XX}(f) = \rho_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 \text{ và ta có } P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{P}_{XX}(f) df \tag{4.50}$$

Chứng minh: Theo công thức (4.44) ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f) e^{i2\pi f\tau} df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right] \; ; \; \rho_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right] e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$X(t)$ là quá trình dừng do đó $R_{XX}(t+\tau,t) = K_{XX}(\tau), \forall t \Rightarrow A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right] = K_{XX}(\tau)$, từ tính duy nhất của phép biến đổi Fourier và công thức (4.49) suy ra $\mathscr{P}_{XX}(f) = \rho_{XX}$.

Ví dụ 4.12: *Xét quá trình ngẫu nhiên* $X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$, *trong đó* f_0 *là hai hằng số;* A, Θ *là hai biến ngẫu nhiên độc lập, A có phương sai hữu hạn* $\mathrm{E}\left[A^2\right] = \sigma^2$ *và* Θ *có phân bố đều trên đoạn* $\left[0; 2\pi\right]$ (xem ví dụ 4.9).

Hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$; Theo công thức (4.49), (4.50) và (3.26) ta được $\rho_{XX} = \mathscr{P}_{XX}(f) = \mathscr{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)\right\} = \frac{1}{4}\sigma^2\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$.

Ta có thể tính trực tiếp công suất trung bình của tín hiệu như sau:

$$\mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\cos^2\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\Theta\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right) d\theta = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$P_{XX} = A\left[\mathrm{E}\left(X^2(t)\right)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{\sigma^2}{2}dt = \frac{\sigma^2}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\sigma^2\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]df.$$

Có thể tính trực tiếp mật độ phổ công suất như sau:

$$\widehat{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^{T} X(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^{T} A\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-T}^{T} A\frac{e^{i\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)} + e^{-i\left(2\pi f_0 t+\Theta\right)}}{2} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{A}{2}e^{i\Theta}\int_{-T}^{T} e^{i2\pi\left(f_0 - f\right)t} dt + \frac{A}{2}e^{-i\Theta}\int_{-T}^{T} e^{-i2\pi\left(f_0+f\right)t} dt$$

Ta có $\displaystyle\int_{-T}^{T} e^{i2\pi\left(f_0-f\right)t}dt = \left.\frac{e^{i2\pi\left(f_0-f\right)t}}{i2\pi\left(f_0-f\right)}\right|_{-T}^{T} = \frac{e^{i2\pi\left(f_0-f\right)T} - e^{-i2\pi\left(f_0-f\right)T}}{i2\pi\left(f_0-f\right)} = \frac{\sin\left[2\pi\left(f_0-f\right)T\right]}{\pi\left(f_0-f\right)}$

$$\int_{-T}^{T} e^{-i2\pi\left(f_0+f\right)t}dt = \left.\frac{e^{-i2\pi\left(f_0+f\right)t}}{-i2\pi\left(f_0+f\right)}\right|_{-T}^{T} = \frac{e^{i2\pi\left(f_0+f\right)T} - e^{-i2\pi\left(f_0+f\right)T}}{i2\pi\left(f_0+f\right)} = \frac{\sin\left[2\pi\left(f_0+f\right)T\right]}{\pi\left(f_0+f\right)}$$

$$\Rightarrow \widehat{X}_T(f) = ATe^{i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T} + ATe^{-i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

$$\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = A^2T^2\left[\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos 2\Theta\right],\ \alpha=\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T};\ \beta=\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

Vì $\mathrm{E}\left[\cos 2\Theta\right]=0$, do đó

$$\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\frac{\sigma^2\pi}{2}\left[\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}\right)^2+\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}\right)^2\right]$$

Sử dụng kết quả (Lathi, 1968), công thức (4.43) $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin aT}{aT}\right]^2=\delta(a)$, ta được

$$\rho_{XX}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\frac{\sigma^2\pi}{2}\left[\delta\left(2\pi(f-f_0)\right)+\delta\left(2\pi(f+f_0)\right)\right]$$

Áp dụng công thức (3.24) ta được $\rho_{XX}(f)=\frac{\sigma^2\pi}{2}\frac{1}{2\pi}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$

Vậy mật độ phổ công suất $\rho_{XX}(f)=\frac{1}{4}\sigma^2\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$.

Nhận xét 4.4:

1. Ta có thể kiểm tra công thức (4.43) bằng cách chỉ ra hàm $\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin aT}{aT}\right]^2$ thỏa mãn điều kiện (3.1), (3.2) như sau:

   Khi $t\neq 0$, $\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin aT}{aT}\right]^2\le\frac{1}{\pi aT}\xrightarrow[T\to\infty]{}0$ (thỏa mãn điều kiện 3.1).

Ta có $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\pi$ (ví dụ 2.63), do đó $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin tT}{tT}\right]^2dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin tT}{tT}\right]^2d(Tt)=1$ (thỏa mãn điều kiện 3.2).

2. Từ công thức (4.42) ta có: giá trị của hàm mật độ phổ tại 0 bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm tự tương quan, $\mathscr{P}_{XX}(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{XX}(\tau)d\tau$.
3. Giá trị bình phương trung bình của quá trình dừng bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm mật độ phổ $\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2=\mathrm{E}\left|X(0)\right|^2=K_{XX}(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}_{XX}(f)df$.
4. Hàm mật độ phổ là hàm chẵn và nhận giá trị không âm

$$\mathscr{P}_{XX}(-f)=\mathscr{P}_{XX}(f);\ \mathscr{P}_{XX}(f)\ge 0\quad \text{với mọi } f.$$

5. Định lý 4.7 cho ta ý nghĩa của khái niệm mật độ phổ của quá trình dừng, đó là mật độ phổ công suất của quá trình. Như vậy ta có thể tính mật độ phổ của một quá trình dừng theo 2 công thức khác nhau (4.41)-(4.42) hoặc (4.44). Tuy nhiên có thể tồn tại quá

trình ngẫu nhiên không dừng (không có mật độ phổ) nhưng vẫn có mật độ phổ công suất.

Ví dụ 4.13: Xét quá trình tín hiệu cực với dữ liệu nhị phân $X(t)$

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n g(t-nT_b), \tag{4.51}$$

trong đó $g(t)$ là xung mẫu $g(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } |t|<T_b/2\\ 0 & \text{nếu } |t|>T_b/2,\end{cases}$ T_b là chu kỳ 1 bít.

$\{A_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập biểu diễn các dữ liệu nhị phân. Các biến ngẫu nhiên A_n có phân bố rời rạc nhận hai giá trị ± 1 đồng khả năng. Vậy

$$P\{A_n=1\}=P\{A_n=-1\}=1/2;\ \mathrm{E}[A_n]=0;\ \mathrm{var}[A_n]=\mathrm{E}\left[|A_n|^2\right]=1^2\frac{1}{2}+(-1)^2\frac{1}{2}=1;$$

$$\mathrm{cov}[A_n,A_m]=\mathrm{E}\left[A_n\overline{A_m}\right]-\mathrm{E}[A_n]\mathrm{E}[A_m]=0,\ \text{nếu } n\neq m.$$

Đặt $T=(2N+1)T_b$ thì quá trình $X_T(t)$ của quá trình (4.40) sẽ là

$$X_T(t)=\sum_{n=-N}^{N} A_n g(t-nT_b)$$

$$\widehat{X}_T(f)=\mathscr{F}\{X_T(t)\}=\sum_{n=-N}^{N} A_n\mathscr{F}\{g(t-nT_b)\}=\sum_{n=-N}^{N} A_n G(f)e^{-i\omega nT_b}=G(f)\sum_{n=-N}^{N} A_n e^{-i\omega nT_b}$$

trong đó $G(f)=\mathscr{F}\{g(t)\}=T_b\,\mathrm{sinc}(T_b f)$ (ví dụ 2.63, công thức 2.111)

$$\Rightarrow\quad \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\mathrm{E}\left[|G(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N} A_n\overline{A_m}e^{-i\omega(n-m)T_b}\right]$$

$$=|G(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N}\mathrm{E}\left[A_n\overline{A_m}\right]e^{-i\omega(n-m)T_b}=|G(f)|^2\sum_{n=-N}^{N}1=|G(f)|^2(2N+1).$$

Vậy mật độ phổ công suất PSD

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{|G(f)|^2(2N+1)}{(2N+1)T_b}=\frac{|G(f)|^2}{T_b}=T_b\,\mathrm{sinc}^2(T_b f).$$

Tuy nhiên $\mathrm{E}\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right]=\mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n g(t-nT_b)\right)\overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m g(t+\tau-mT_b)\right)}\right]$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[A_n\overline{A_m}\right]g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b)$$

trong đó $g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b)=\begin{cases}1 \text{ nếu } \left|t-nT_b\right|<T_b/2 \text{ và } \left|t+\tau-nT_b\right|<T_b/2\\ 0 \text{ nếu ngược lại}\end{cases}$

Điều này chứng tỏ $\mathrm{E}\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right]$ còn phụ thuộc vào thời điểm t nên quá trình $X(t)$ không dừng.

Ví dụ 4.14: (Sóng ngẫu nhiên nhị phân) Xét quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t);t\in\mathbb{R}\right\}$ gồm các bit 1 và các bit 0 thoả mãn các điều kiện sau:

1) Bit 1 và 0 lần lượt được biểu diễn bởi các xung chữ nhật với biên độ $+a$ và $-a$ volt với độ rộng của xung là T giây.

2) Các hàm mẫu (sample functions) là không đồng bộ và giả thiết rằng thời điểm xuất phát của xung thứ nhất t_d xảy ra đồng khả năng trong khoảng từ 0 đến T. Điều này có nghĩa là t_d là giá trị mẫu của biến ngẫu nhiên T_d có phân bố đều trong đoạn $\left[0;T\right]$.

3) Trong khoảng thời gian xung bất kỳ $(n-1)T<t-t_d<nT$, hai bit 1 và 0 là đồng khả năng xuất hiện, nghĩa là $X(t)$ nhận giá trị $+a$ hoặc $-a$ trong suốt khoảng xung này với xác suất $1/2$. $X(t)$ và $X(s)$ là độc lập nếu t,s ở trong khoảng xung thời gian khác nhau.

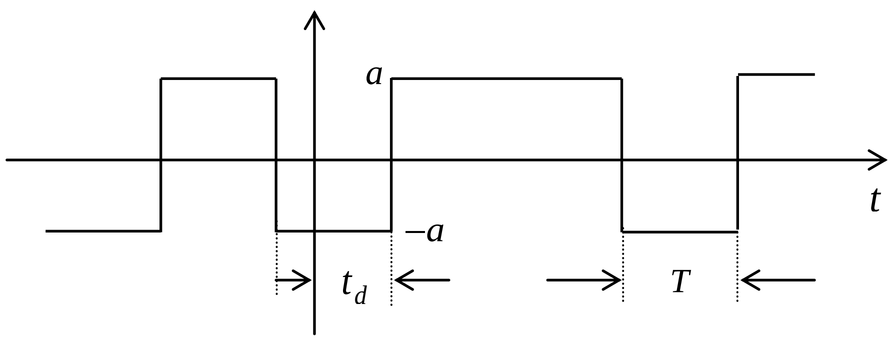
Ta có: $\forall t;\ \mathrm{E}\,X(t)=a\cdot 1/2+(-a)\cdot 1/2=0$.

Hàm tự tương quan: $R_X(t_k,t_i)=\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right]$.

* Nếu $\left|t_k-t_i\right|>T$ thì $X(t_k),\ X(t_i)$ độc lập, do đó

$\Rightarrow R_X(t_k,t_i)=\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right]=0$.

* Nếu $\left|t_k-t_i\right|<T$ và giả sử rằng $X(t_k),\ X(t_i)$ cùng có trễ là t_d thì $X(t_k),\ X(t_i)$ cùng xung khi và chỉ khi $\left|t_k-t_i\right|<T-t_d$.



Hình 4.4: *Sóng ngẫu nhiên nhị phân*

Vậy $\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\middle|\,t_d\right]=\begin{cases}a^2 & \text{nếu } t_d<T-\left|t_k-t_i\right|\\ 0 & \text{nếu ngược lại}.\end{cases}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right]=\int_0^{T-\left|t_k-t_i\right|}a^2 f_{T_d}(t_d)dt_d=\int_0^{T-\left|t_k-t_i\right|}\frac{a^2}{T}dt_d=a^2\left(1-\frac{\left|t_k-t_i\right|}{T}\right).$$

Đặt $\tau=t_k-t_i \Rightarrow$ Hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)=\begin{cases}a^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{nếu } |\tau|<T\\ 0 & \text{nếu } |\tau|\geq T.\end{cases}$

Mật độ phổ công suất $\mathscr{P}_{XX}(f)=\mathscr{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\}=\int_{-T}^{T}a^2\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i2\pi f\tau}d\tau=a^2T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$.

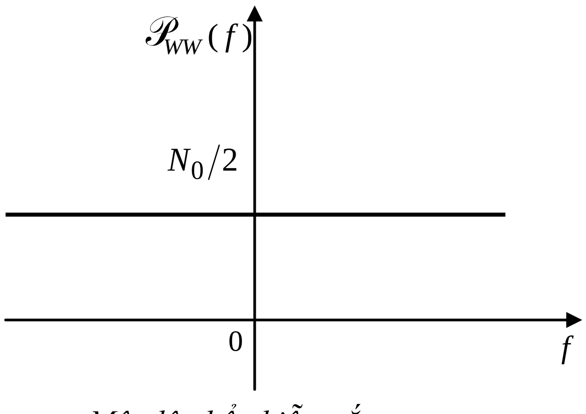
Ví dụ 4.15: Nhiễu trắng (White Noise) được mô tả như là một quá trình dừng (theo nghĩa rộng) mà mật độ phổ công suất là một hằng số $\mathscr{P}_{WW}(f)=\dfrac{N_0}{2}$.

Hệ số $1/2$ để chỉ một nửa công suất ứng với tần số dương và một nửa ứng với tần số âm. N_0 có đơn vị watt/ hertz. Từ công thức (4.42) ta có hàm tự tương quan của nhiễu trắng

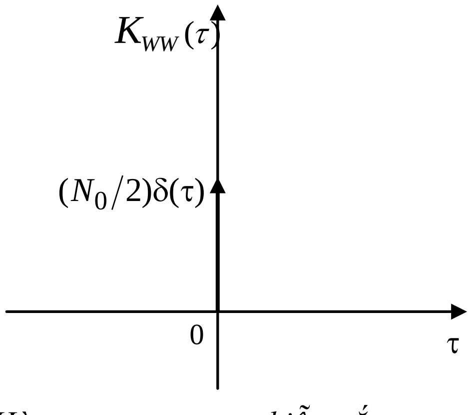
$$K_{WW}(\tau)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\right\}=\frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

Như vậy hàm tự tương quan của nhiễu trắng tỉ lệ với hàm delta tập trung tại $\tau=0$ với hằng số tỉ lệ $\dfrac{N_0}{2}$. Do đó $K_{WW}(\tau)=0$ khi $\tau\neq 0$, nói cách khác hai mẫu tại hai thời điểm khác nhau của nhiễu trắng là không tương quan.

Quá trình nhiễu trắng không phải là một quá trình vật lý có thực vì có công suất bằng ∞. Trong quang học, mật độ phổ năng lượng của ánh sáng trắng là không đổi $\mathscr{P}(\upsilon)$ = hằng số với mọi tần số υ (Năng lượng ánh sáng trắng phân bố đều theo mọi tần số υ). Vì vậy nhiễu với mật độ phổ hằng số được gọi là nhiễu trắng.



Mật độ phổ nhiễu trắng



Hàm tự tương quan nhiễu trắng

Hình 4.5: *Mật độ phổ và hàm tự tương quan của nhiễu trắng*

4.4 TRUNG BÌNH THEO THỜI GIAN VÀ TÍNH CHẤT ERGODIC

Định nghĩa 4.7: Trung bình theo thời gian của hàm số $x(t), t \in \mathbb{R}$ được định nghĩa và ký hiệu

$$A\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \qquad \textbf{(4.52)}$$

Toán tử

$$A\left[\,\cdot\,\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\,\cdot\,\right] dt \qquad \textbf{(4.53)}$$

gọi là toán tử trung bình theo thời gian. Toán tử A tương tự toán tử kỳ vọng E (trung bình theo tập hợp) của các biến ngẫu nhiên. Thực hiện toán tử trung bình theo thời gian theo các hàm mẫu $x(t)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ ta được trung bình theo thời gian và hàm tự tương quan theo thời gian xác định như sau

$$\overline{x} = A\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \qquad \textbf{(4.54)}$$

$$\mathrm{R}_{XX}(\tau) = A\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \qquad \textbf{(4.55)}$$

Trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp được gọi là tính ergodic. Quá trình ngẫu nhiên có tính ergodic được gọi là quá trình ergodic. Quá trình dừng là quá trình ergodic nếu

$$\overline{x} = \mathrm{E}\left[X(t)\right] = m \text{ và } \mathrm{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right].$$

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian ở các cấp trùng với trung bình theo tập hợp cùng cấp tương ứng. Giả thiết này đáng tiếc là không phải luôn đúng như một số các nhà kỹ thuật đầu thế kỷ 20 tin tưởng. Khoảng năm 1931 hai nhà toán học G. D. Birkhoff (Mỹ) và A. Ia. Khintchine (Nga) đã chứng minh rằng trung bình theo thời gian luôn luôn tồn tại và chỉ ra các điều kiện để nó trùng với trung bình tập hợp.

Định lý sau đây cho điều kiện cần và đủ để trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp.

Định lý 4.8: Quá trình dừng thời gian rời rạc $\left\{X(n); n \ge 0\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(n)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} C_{XX}(m) = 0. \qquad \textbf{(4.56)}$$

Định lý 4.9: Quá trình dừng $\left\{X(t); t \in \mathbb{R}\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T C_{XX}(t-s)dtds=0\,. \qquad \textbf{(4.57)}$$

Hệ quả 4.10: Quá trình dừng $\left\{X(t);t\in\mathbb{R}\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)C_{XX}(t)dt=0\,. \qquad \textbf{(4.58)}$$

Hệ quả 4.11: Nếu $\lim\limits_{\tau\to\infty}C_{XX}(\tau)=0$ thì quá trình $\left\{X(t);t\in\mathbb{R}\right\}$ là ergodic.

Ví dụ 4.16: Xét quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$. Trong đó A, ω_0 là hai hằng số. Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ với hàm mật độ

$$f_\Theta(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \text{nếu} \quad 0\le u\le 2\pi\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left[X(t)\right]=\mathrm{E}\left[A\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]=A\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t+u)f_\Theta(u)du=A\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+u)\frac{1}{2\pi}du=0$$

$$\begin{aligned}R_{XX}(t,t+\tau)&=\mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right]=\mathrm{E}\left[A\cos(\omega_0 t+\Theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\right]\\&=\frac{A^2}{2}\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta\right)+\cos\omega_0\tau\right]\\&=\frac{A^2}{2}\left(\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta\right)\right]+\mathrm{E}\left[\cos\omega_0\tau\right]\right)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\end{aligned}$$

Như vậy $\left\{X(t)\right\}$ là một quá trình dừng với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\,d\tau&=\frac{A^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Bigg|_0^T-\frac{1}{T}\left(\tau\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Bigg|_0^T+\frac{\cos\omega_0\tau}{\omega_0}\Bigg|_0^T\right)\right)\\&=\frac{A^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}-\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}+\frac{1-\cos\omega_0 T}{T\omega_0}\right)\to 0 \text{ khi } T\to\infty\end{aligned}$$

Theo hệ quả 4.10 $\left\{X(t)\right\}$ là một quá trình dừng thoả mãn điều kiện (4.58) do đó là một quá trình ergodic.

Ta cũng có thể kiểm chứng điều này bằng cách tính trực tiếp như sau: Vì quá trình tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ nên trung bình theo thời gian

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\cos(\omega_0 t+\theta)dt = \frac{1}{T_0}\left(A\ \frac{\sin(\omega_0 t+\theta)}{\omega_0}\Bigg|_0^{T_0}\right) = 0 = \mathrm{E}\big[X(t)\big]$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)dt = \frac{A^2}{2} = K_{XX}(0) = \mathrm{E}\big[X^2(t)\big].$$

Nhận xét 4.5: Tính ergodic là một dạng rất hạn chế của tính dừng và thật khó khăn để kiểm tra xem trong tình huống vật lý cụ thể nào thì giả thiết ergodic thỏa mãn. Dù sao chúng ta vẫn thường giả thiết quá trình là ergodic để đơn giản hóa. Trong thế giới thực, chúng ta vẫn buộc lòng phải làm việc với hàm mẫu của quá trình vì hầu như ta chỉ nhận được các hàm mẫu của quá trình. Khi ấy, dù muốn hay không ta cũng chỉ nhận được các giá trị trung bình, hàm tự tương quan theo thời gian. Từ giả thiết ergodic ta có thể xem các giá trị nhận được là các thống kê của quá trình. Nhiều người cảm thấy khó chấp nhận những lời bàn luận này, tuy nhiên cần phải nhớ rằng, lý thuyết của chúng ta chỉ để mô hình hóa những điều xảy ra trong thế giới thực.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Quá trình ngẫu nhiên $\{X(t);t\in I\}$ là một hàm số của biến số t.

Đúng ☐ Sai ☐

4.2 Mọi quá trình có gia số độc lập là quá trình Markov.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.3 Chuỗi Markov là quá trình Markov $\{X(t);t\in I\}$ có không gian trạng thái E đếm được.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.4 Ma trận xác suất chuyển sau n bước của một chuỗi Markov bằng tích n lần ma trận xác suất chuyển một bước của chuỗi Markov này.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.5 Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì nó là phân bố dừng duy nhất.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.6 Mọi chuỗi Markov có hữu hạn trạng thái luôn tồn tại phân bố dừng duy nhất đó là phân bố ergodic.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.7 Hàm trung bình $m(t)=\mathrm{E}\,X(t), \forall\ t\in I$ của quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}_{t\in I}$ là một biến ngẫu nhiên.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.8 Trung bình theo thời gian của quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}_{t\in I}$ là $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$, trong đó $x(t)$ là một hàm mẫu của $\{X(t)\}_{t\in I}$.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

4.9 Hàm tự tương quan của một quá trình dừng $\{X(t)\}_{t\in I}$, là một hàm 2 biến theo thời gian.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

4.10 Mật độ phổ của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

4.11 Hàm tự tương quan của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của mật độ phổ của quá trình.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

4.12 Quá trình dừng có hàm trung bình là hàm hằng nên trung bình theo thời gian bằng trung bình theo tập hợp.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

4.13 Cho quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, các biến ngẫu nhiên X_n độc lập, có cùng phân bố với hàm phân bố $F_X(x)$, kỳ vọng μ và phương sai σ^2.

a. Tìm hàm phân bố đồng thời của $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

b. Tìm hàm trung bình $\mathrm{E}[X_n]$.

c. Tìm hàm tự tương quan của X_n.

d. Tìm hàm tự hiệp phương sai của X_n.

4.14 Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Biết phân bố xác suất ban đầu:

$$p_0 = P\{X_0 = 0\} = 0,3; p_1 = P\{X_0 = 1\} = 0,4; p_2 = P\{X_0 = 2\} = 0,3$$

a. Tính $P\{X_0 = 0, X_1 = 2, X_2 = 1\}$.

b. Tính $P\{X_2 = 2 | X_0 = 1\}$ và $P\{X_0 = 1, X_2 = 2\}$.

4.15 Giả sử $P = \left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$ là một ma trận Markov, (là ma trận thỏa mãn

điều kiện $p_{ij} \geq 0$; $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ \forall i = 1,...,m$).

Chứng minh rằng P^n cũng là ma trận Markov, với mọi số tự nhiên dương n.

4.16 Cho chuỗi Markov $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \left\{0,1,2\right\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a. Tính ma trận xác suất chuyển 2 bước.

b. Tính $P\left\{X_3 = 1 \middle| X_1 = 0\right\}$; $P\left\{X_3 = 1 \middle| X_0 = 0\right\}$.

c. Tìm phân bố dừng.

4.17 Xét bài toán truyền một bức điện gồm các tín hiệu 0, 1 thông qua kênh có nhiều trạm và mỗi trạm nhận sai tín hiệu với xác suất không đổi bằng $\alpha \in (0,1)$. Giả sử X_0 là tín hiệu truyền đi và X_n là tín hiệu nhận được tại trạm n. Cho biết $\left\{X_n; n = 0,1,2,...\right\}$ lập thành chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

a. Tính $P\left\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\right\}$.

b. Tính $P\left\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\right\} + P\left\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0\right\}$.

c. Tính $P\left\{X_5 = 0 \middle| X_0 = 0\right\}$.

4.18 Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \left\{a,b,c,d\right\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0.3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a. Tìm xác suất chuỗi đi theo đường đi: $b - a - b - c - b - a$.

b. Tính $P\left\{X_1 = a, X_3 = c, X_4 = b, X_5 = a \middle| X_0 = b\right\}$.

c. Tính $P^{(5)}$.

d. Tính $P\left\{X_5 = a \middle| X_0 = b\right\}$.

e. Tìm $\mathbf{P}(5)$ biết $\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix}0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1\end{bmatrix}$.

4.19 Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \{0,1\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},\ 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

Giả sử phân bố đầu $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0,5$.

a. Tìm phân bố dừng.

b. Tìm phân bố của X_n.

c. Tìm phân bố giới hạn.

4.20 Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế với $s = 0$ và $S = 3$ là các mức căn cứ để nhập hàng cùng với ξ_n là lượng hàng khách yêu cầu trong chu kỳ n. Biết rằng

$$P\{\xi_n = 0\} = 0,4;\ P\{\xi_n = 1\} = 0,3;\ P\{\xi_n = 2\} = 0,3 \text{ với mọi } n.$$

Xác định ma trận xác suất chuyển của chuỗi Markov $\{X_n\}$, trong đó X_n là số phụ tùng còn lại tại cuối chu kỳ n.

4.21 Hai công ti *A* và *B* cung cấp cho thị trường cùng một loại sản phẩm. Hiện tại công ti *A* chiếm 60% và công ti *B* chiếm 40% thị phần. Mỗi năm *A* mất 2/3 thị phần của mình cho *B* và *B* mất 1/2 thị phần cho *A*. Tìm tỉ lệ thị phần hai công ti chiếm được sau hai năm.

4.22 Mỗi một người dân của thị trấn *N* có một trong ba nghề (*A, B, C*). Con cái họ nối tiếp nghề của cha mình với xác suất tương ứng là $(3/5,\ 2/3,\ 1/4)$. Nếu không theo nghề của cha thì chúng chọn một trong hai nghề còn lại với xác suất như nhau. Hãy tìm:

a. Phân bố theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tiếp theo, nếu thế hệ hiện tại có tỉ lệ theo nghề nghiệp là 20% có nghề *A*, 30% có nghề *B* và 50% có nghề *C*.

b. Phân bố giới hạn theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tương lai xa.

4.23 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta)$, A_0, ω_0 là hai hằng số và Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $(-\pi, \pi)$. Xét quá trình ngẫu nhiên mới $Y(t) = X^2(t)$.

a. Tìm hàm tự tương quan của $Y(t)$.

b. Tìm hàm tự tương quan chéo của $X(t)$ và $Y(t)$.

c. $X(t)$ và $Y(t)$ có phải là hai quá trình dừng không?

d. $X(t)$ và $Y(t)$ có phải là hai quá trình dừng liên kết cùng nhau không?

4.24 Cho quá trình ngẫu nhiên $Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$; trong đó biên độ $X(t)$ là một quá trình dừng, tần số góc ω_0 không đổi và pha Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $\left(-\pi,\pi\right)$, Θ và $X(t)$ độc lập.

a. Tìm hàm trung bình $\mathrm{E}\left[Y(t)\right]$.

b. Tìm hàm tự tương quan của $Y(t)$.

c. $Y(t)$ có phải là quá trình dừng không?

4.25 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, trong đó ω_0 là hằng số; *A* và *B* là hai biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0, không tương quan, có phương sai bằng nhau và bằng σ^2. Chứng minh rằng $X(t)$ là quá trình dừng (theo nghĩa rộng) nhưng không dừng theo nghĩa chặt.

4.26 Cho $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm trung bình $\mathrm{E}\,X(t)=m,\forall t$. Chứng minh rằng $\left\{Y(t)\right\}_{t\in I}$, $Y(t)=X(t)-m$ là quá trình dừng có hàm trung bình $\mathrm{E}\,Y(t)=0,\forall t$ và hàm tự tương quan $K_{YY}=K_{XX}$.

4.27 Cho $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ là một quá trình cấp 2 có tính chất $\mathrm{E}\,X(s)$ và $\mathrm{E}\left[X(s)X(s+t)\right]$ không phụ thuộc vào s. Chứng minh rằng $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ là quá trình dừng.

4.28 Cho $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)$. Chứng minh rằng $\left\{Y(t)\right\}_{t\in I}$, $Y(t)=X(t+1)-X(t)$ cũng là quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.

4.29 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trong khoảng $\left(0,2\pi\right)$, A_0,ω_0 là hai hằng số. Chứng minh rằng $X(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\Theta)$ là một quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan. Quá trình $X(t)$ có phải là quá trình ergodic?

4.30 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $\left[0,2\pi\right]$, R là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } \ 0<r<\infty \\ 0\ , & \text{nếu } \ r\le 0\end{cases}$.

Giả sử Θ và R độc lập, $\lambda>0$. Chứng minh rằng $X(t)=R\cos(\lambda t+\Theta)$ là một quá trình dừng với trung bình 0 và hàm tự tương quan $K_{XX}(t)=\sigma^2\cos\lambda t$.

4.31 Cho A là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathrm{N}(0;\sigma^2)$. Đặt $X(t)=A\cos(\pi t)$.

a. Tìm hàm mật độ xác suất của $X(0)$ và $X(1)$.

b. Quá trình $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ có phải là quá trình dừng theo nghĩa gì không?

4.32 Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\left\{Z_1=-1\right\}=P\left\{Z_1=1\right\}=\dfrac{1}{2}$. Đặt $X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, λ là hằng số. Chứng minh $\left\{X(t)\right\}_{t\in I}$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.

4.33 Cho hai quá trình dừng $X(t)$, $Y(t)$ có trung bình bằng 0, độc lập nhau và có hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)=e^{-|\tau|}$, $R_{YY}(\tau)=\cos(2\pi\tau)$.

a. Tìm hàm tự tương quan của tổng $W_1(t)=X(t)+Y(t)$.

b. Tìm hàm tự tương quan của hiệu $W_2(t)=X(t)-Y(t)$.

c. Tìm hàm tương quan chéo của $W_1(t)$ và $W_2(t)$.

4.34 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\Theta)$, A_0,ω_0 là hai hằng số và Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $\left(0,\pi\right)$.

a. $X(t)$ có phải là quá trình dừng không?

b. Tìm công suất của $X(t)$.

c. Tìm mật độ phổ công suất và mật độ phổ của $X(t)$.

4.35 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, trong đó ω_0 là hằng số

a. Chứng minh rằng nếu *A* và *B* là hai biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0, không tương quan, có phương sai bằng nhau thì $X(t)$ là quá trình dừng.

b. Tìm hàm tự tương quan của $X(t)$.

c. Tìm mật độ phổ công suất của $X(t)$.

4.36 Cho quá trình dừng $\left\{X(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ có trung bình $\mathrm{E}\,X(n)=2$ và hàm tự tương quan $K_X(n)=\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{|n|}$. Tìm mật độ phổ.

4.37 Cho $W(t)$ là quá trình Wiener với tham số σ^2. Đặt $X(t)=e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})$, $\alpha>0$ là hằng số. Chứng minh rằng $X(t)$ là quá trình Gauss dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(t)=\sigma^2e^{-\alpha|t|}$, $-\infty<t<\infty$. Tìm mật độ phổ.

4.38 Cho quá trình dừng ergodic $X(t)$ có mật độ phổ $\mathscr{P}_{XX}(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}(B-|f|), & \text{nếu } |f|\le B\\ 0\ , & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$.

Tìm hàm tự tương quan.

4.39 Tìm mật độ phổ của quá trình dừng có hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)=P\cos^4(\omega_0\tau)$, trong đó P, ω_0 là hai hằng số. Tìm công suất của quá trình.

4.40 Tìm công suất trung bình của hai quá trình dừng có mật độ phổ công suất tương ứng sau

a. $\mathscr{P}_{XX}(f)=\dfrac{24\pi^2f^2}{1+16\pi^4f^4}$.

b. $\mathscr{P}_{YY}(f)=\dfrac{24\pi^2f^2}{\left(1+4\pi^2f^2\right)^3}$.