CHƯƠNG 3

CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp của các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số. Hàm không phải sơ cấp được gọi là hàm siêu việt. Các hàm số thường gặp là các hàm sơ cấp, tuy nhiên có một số hàm siêu việt và hàm theo nghĩa suy rộng được sử dụng nhiều trong kỹ thuật nói chung và trong ngành điện tử viễn thông nói riêng.

Trong chương này ta xét các hàm siêu việt sau: Hàm delta, hàm Gamma hàm Beta, các hàm tích phân, hàm xác suất lỗi và các hàm Bessel. Đối với mỗi hàm ta khảo sát các tính chất của chúng, tìm biến đổi Laplace và khai triển Mac Laurin.

3.1 HÀM DELTA

3.1.1 Khái niệm hàm delta

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hoặc hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng. Hàm xung đơn vị tại $t = t_0$ được ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- vì $\delta_{t_0}(t)$ là hàm xung nên chỉ tập trung giá trị tại $t = t_0$, nghĩa là

$$\delta_{t_0}(t) = 0 \text{ với mọi } t \neq t_0, \tag{3.1}$$

- xung đơn vị đòi hỏi tích phân bằng 1, nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1. \tag{3.2}$$

Rõ ràng rằng không tồn tại hàm theo nghĩa thông thường thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện trên, vì hàm thỏa mãn điều kiện (3.1) sẽ có tích phân bằng 0.

Kỹ sư Oliver Heaviside là người đầu tiên sử dụng hàm delta để biểu diễn các kết quả trong công trình của mình, mặc dù các nhà toán học lý thuyết cùng thời cho rằng đó là ý nghĩ điên rồ. Ba mươi năm sau, nhà Vật lý lý thuyết nổi tiếng Paul Dirac đã sử dụng hàm delta trong lý thuyết cơ học lượng tử của mình, nhờ đó cuối cùng các nhà lý thuyết đã chập nhận hàm delta. Năm 1944 nhà toán học Pháp Laurent Schwartz cuối cùng đã xây dựng được lý thuyết phân bố kết hợp với hàm suy rộng, điều này giải thích cơ sở tồn tại của hàm delta.

Có thể sử dụng hàm delta để biểu diễn các tín hiệu có nhiễu.

Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm trơn theo nghĩa thông thường.
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp.

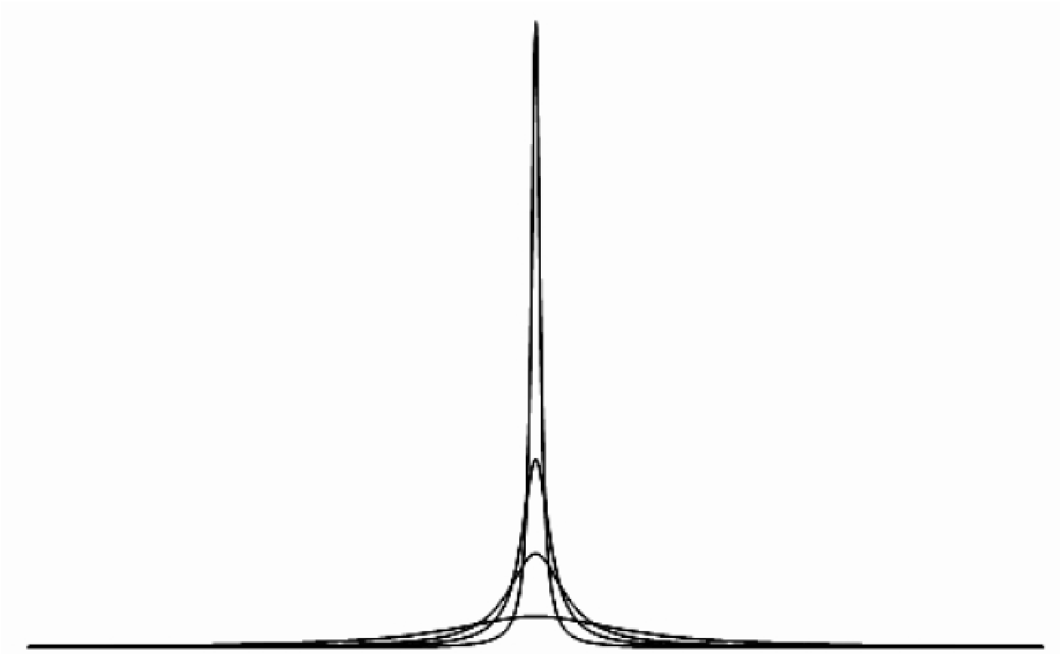
Cả hai đều quan trọng và đáng quan tâm. Tuy nhiên cách thứ nhất sẽ dễ dàng tiếp thu hơn, vì vậy ta chỉ xét phương pháp này.

Phương pháp giới hạn xem hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm khả vi $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại $t = t_0$ và có tích phân luôn bằng 1.

Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \; t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } \; t = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan n\,t\Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1 \tag{3.4}$$



Hình 3.1: *Đồ thị các hàm* $g_n(t)$

Vì vậy, một cách hình thức ta đồng nhất giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ là hàm delta tập trung tại gốc $t = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \delta(t) = \delta_0(t). \tag{3.5}$$

Hình 3.1 cho thấy các hàm $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại gốc $t = 0$.

Cần chú ý rằng có nhiều cách chọn các hàm $g_n(t)$ có giới hạn là hàm delta.

Hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ có giá trị tập trung tại t_0 bất kỳ có thể nhận được từ hàm $\delta(t)$ bằng cách tịnh tiến

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0). \tag{3.6}$$

Vì vậy, có thể xem $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm

$$\hat{g}_n(t) = g_n(t - t_0) = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2(t - t_0)^2\right)} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Tích chập của hàm delta

Từ (3.2) và (3.6) ta có công thức tính tích chập của hàm delta.

$$f(t_0) * \delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \qquad \textbf{(3.8)}$$

3.1.2 Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Từ công thức (3.1)-(3.2) ta có

Với mọi hàm liên tục $x(t)$:

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt = \begin{cases} x(v) & \text{nếu } 0 < v < l \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \qquad \textbf{(3.9)}$$

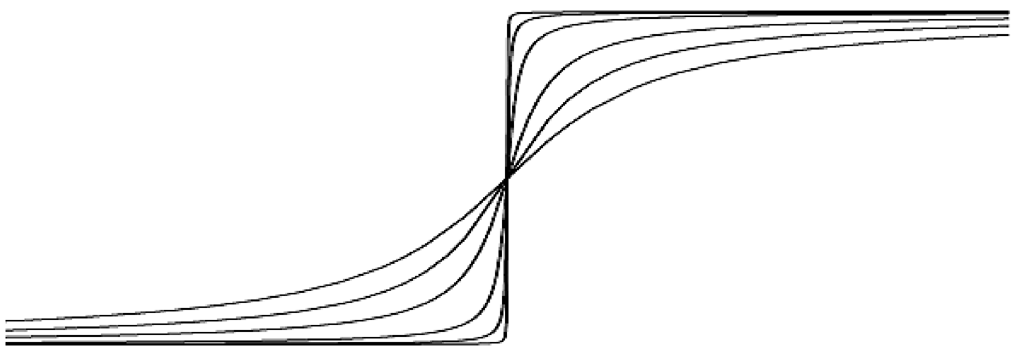
Do đó

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_v(u)du = \eta(t - v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > v \\ 0 & \text{nếu } t < v \end{cases} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Theo định nghĩa thông thường của nguyên hàm, từ công thức (3.10) ta có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta. Sự khác biệt ở đây là mặc dù hàm delta là hàm suy rộng nhưng hàm bước nhảy là hàm số theo nghĩa thông thường.

Công thức (3.10) cũng phù hợp với định nghĩa của hàm delta theo giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ có dãy các nguyên hàm $f_n(t)$ hội tụ về hàm bước nhảy

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{n}{\pi\left(1 + n^2u^2\right)} du = \frac{1}{\pi}\arctan nt + \frac{1}{2}$$



Hình 3.2: *Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm* $f_n(t)$

Các hàm này sẽ hội tụ về hàm bước nhảy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nếu } t = 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$

Với nhận xét trên ta có thể coi

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \delta(t) \quad \textbf{(3.11)}$$

Đối với các hàm số theo nghĩa thông thường tính liên tục là điều kiện cần của tính khả vi, như vậy hàm không liên tục thì không khả vi. Tuy nhiên người ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm của các hàm không liên tục có đạo hàm là hàm suy rộng, với các hàm delta tập trung giá trị tại những điểm gián đoạn.

Giả sử $x(t)$ là hàm khả vi (theo nghĩa thông thường) tại mọi t ngoại trừ tại điểm gián đoạn t_0 với bước nhảy β, khi đó ta có thể biểu diễn lại hàm $x(t)$ dưới dạng tiện lợi hơn

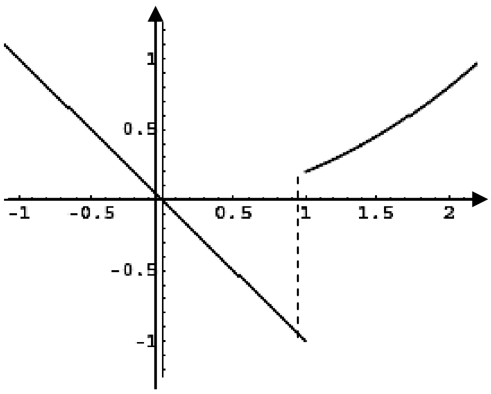
$$x(t) = y(t) + \beta\eta(t - t_0) \quad \textbf{(3.12)}$$

Trong đó $y(t)$ là hàm liên tục tại mọi điểm và khả vi tại mọi điểm có thể trừ điểm gián đoạn. Đạo hàm công thức (3.12) và áp dụng công thức (3.11) ta được

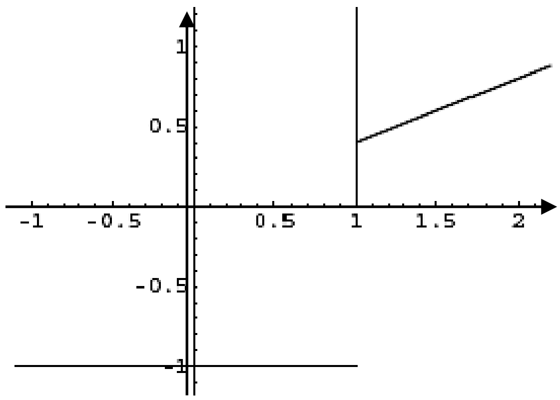
$$x'(t) = y'(t) + \beta\delta(t - t_0) \quad \textbf{(3.13)}$$

Ví dụ 3.1: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

Hàm số gián đoạn tại $t = 1$ với bước nhảy $\frac{6}{5}$ (có đồ thị trong hình 3.3).



Đồ thị hàm $x(t)$



Đồ thị hàm $x'(t)$

Hình 3.3: *Đồ thị của $x(t)$ và đạo hàm $x'(t)$ ví dụ 3.1*

Do đó có thể biểu diễn theo công thức (3.13) như sau

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\eta(t-1), \qquad y(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 - \frac{6}{5} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

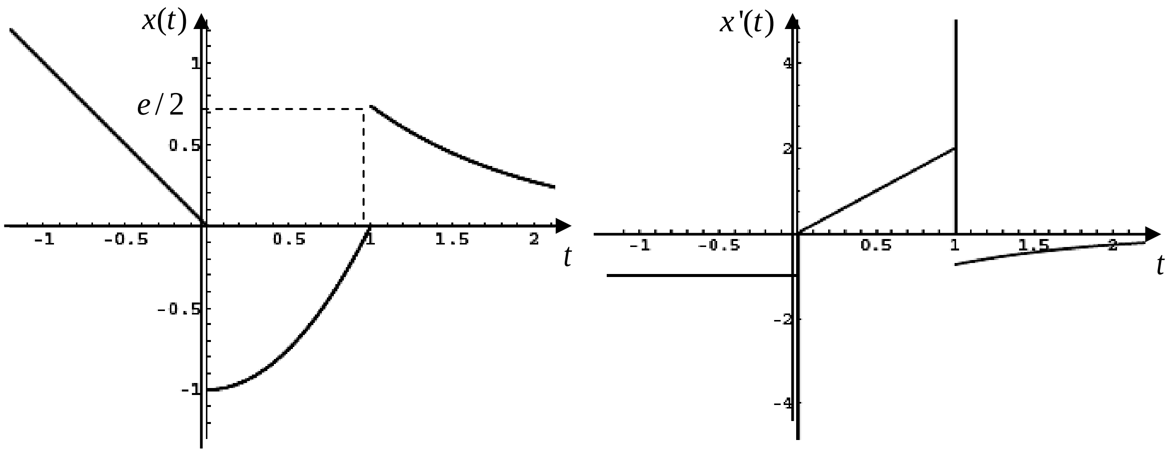
Công thức đạo hàm (3.13) tương ứng

$$x'(t) = y'(t) + \frac{6}{5}\delta(t-1), \qquad y'(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{2}{5}t & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.2: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 0 \\ t^2 - 1 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

Hàm số gián đoạn tại $t = 0$ với bước nhảy -1 và tại $t = 1$ với bước nhảy $\frac{2}{e}$ (có đồ thị trong hình 3.4), do đó đạo hàm suy rộng có dạng

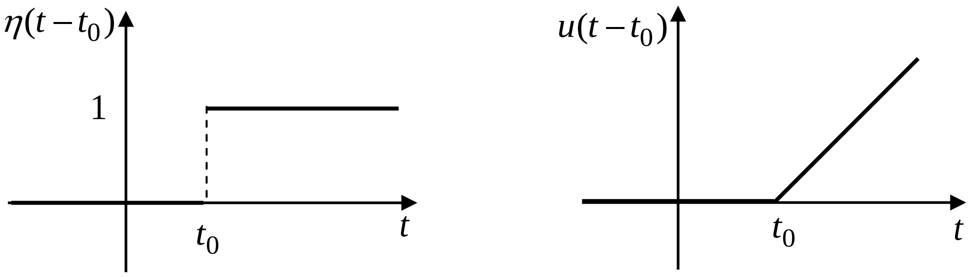
$$x'(t) = -\delta(t) + \frac{2}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 0 \\ 2t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ -2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$



Hình 3.4: *Đồ thị của $x(t)$ và đạo hàm $x'(t)$ ví dụ 3.2*

Tích phân của hàm bước nhảy $\eta(t - t_0)$ (hàm gián đoạn) là hàm dốc liên tục $u(t - t_0)$ (xem hình 3.5).

$$\eta_{t_0}(t) = \eta(t - t_0); \quad \int_a^t \eta_{t_0}(t)dt = u_{t_0}(t) = u(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & \text{nếu } t > t_0 > a \\ 0 & \text{nếu } a < t < t_0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.14)}$$

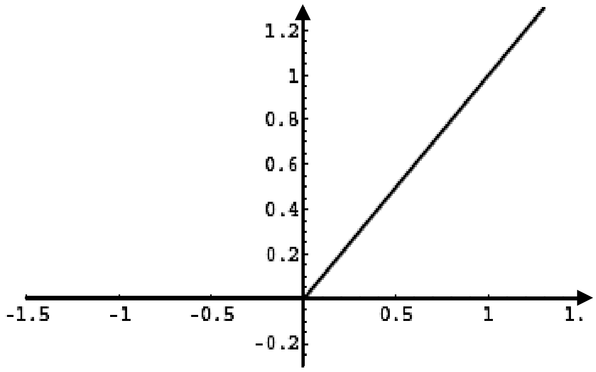


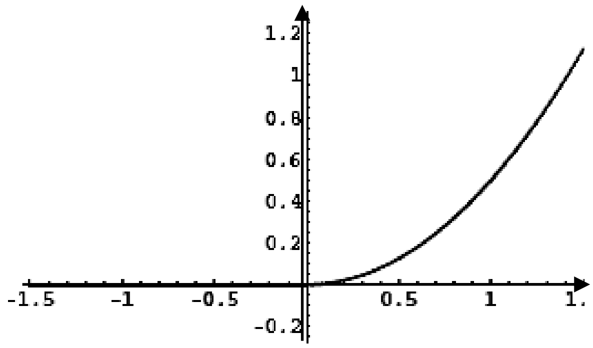
Hình 3.5: *Đồ thị của hàm bước nhảy và hàm dốc*

Hàm dốc $u(t-t_0)$ có điểm góc tại $t=t_0$ do đó không khả vi tại điểm này; đạo hàm $\dfrac{du}{dt}=\eta(t)$ gián đoạn tại điểm này và đạo hàm bậc hai $\dfrac{d^2u}{dt^2}=\delta$ là hàm suy rộng.

Như vậy lấy tích phân hai lần của hàm delta ta được hàm dốc. Bằng cách quy nạp ta có tích phân $n+1$ lần của hàm delta là hàm dốc bậc n

$$u_n(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{(t-t_0)^n}{n!} & \text{nếu } t>t_0\\ 0 & \text{nếu } t<t_0\end{cases} \tag{3.15}$$





Hình 3.6: *Đồ thị của hàm dốc bậc nhất và hàm dốc bậc hai*

Ví dụ 3.3: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên X xác định bởi công thức:

$$F_X(x)=P\left\{X\le x\right\}, \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ sao cho

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}$$

Nếu biến ngẫu nhiên X rời rạc có miền giá trị là một tập đếm được $R_X=\left\{x_1,\, x_2,\, ...\right\}$, phân bố xác suất chỉ tập trung tại các giá trị này. Xác suất của X nhận các giá trị $x_k;\ k=1,2,\ ...$ gọi là hàm khối lượng xác suất

$$p_X(x_k)=P\left\{X=x_k\right\}$$

Hàm phân bố xác suất được xác định từ hàm khối lượng xác suất theo công thức

$$F_X(x)=P\left\{X\le x\right\}=\sum_{x_k\le x} p_X(x_k)$$

Đồ thị của hàm phân bố $F_X(x)$ là có dạng bậc thang liên tục phải tại các bước nhảy.

Sử dụng công thức (3.6) và (3.10) ta có thể viết lại

$$F_X(x)=\sum_{x_k\le x;\, x_k\in R_X} p_X(x_k)=\int_{-\infty}^{x}\sum_{x_k\in R_X} p_X(x_k)\delta(t-x_k)dt$$

Vì vậy ta có thể xem hàm mật độ của biến ngẫu nhiên rời rạc là

$$f_X(x) = \sum_{x_k \in R_X} p_X(x_k)\delta(x - x_k).$$

3.1.3 Khai triển Fourier của hàm delta

Áp dụng công thức (2.57) tính hệ số Fourier ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\cos n0 = \frac{1}{\pi},\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\sin n0 = 0 \quad \textbf{(3.16)}$$

Vậy hàm delta có khai triển Fourier

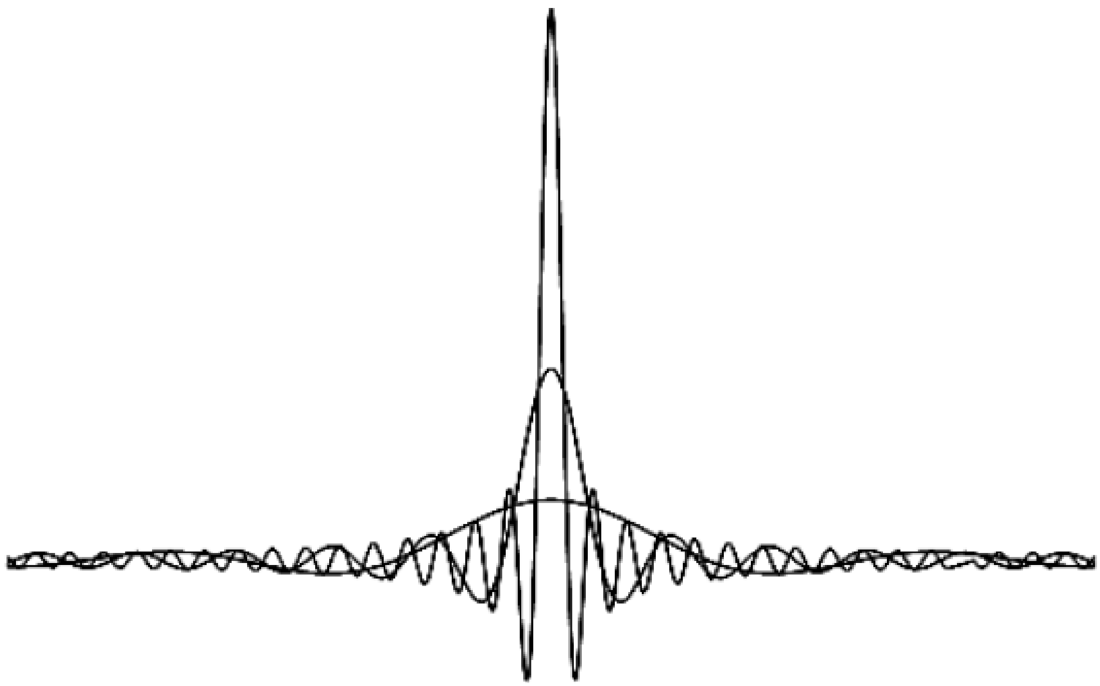
$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots\right) \quad \textbf{(3.17)}$$

Thay $\cos kt = \dfrac{e^{\mathrm{ik}t} + e^{-\mathrm{ik}t}}{2}$ (công thức Euler) vào (3.17) ta được

$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{ik}t} = \frac{1}{2\pi}\left(\cdots + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots\right) \quad \textbf{(3.18)}$$

Cũng có thể nhận được công thức khai triển trên bằng cách tính trực tiếp các hệ số theo công thức (2.73) và (3.2)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)e^{\mathrm{ik}t}dt = \frac{1}{2\pi}e^{ik0} = \frac{1}{2\pi}.$$



Hình 3.7: *Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier hàm delta*

Tổng riêng của chuỗi Fourier

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{ik}t}$$

là tổng của $2n+1$ số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu tiên là $e^{-\mathrm{in}t}$ và công bội e^{it}, do đó:

$$s_n = \frac{1}{2\pi}e^{-\mathrm{in}t}\left(\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n+1)t}-e^{-\mathrm{in}t}}{e^{it}-1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

3.1.4 Biến đổi Fourier của hàm delta

Trong chương 2 ta xét biến đổi Fourier của các hàm khả tích tuyệt đối trên tập số thực. Đối với các hàm không khả tích tuyệt đối (chẳng hạn hàm sin hàm cosin) ta cũng có thể tìm biến đổi Fourier mở rộng thông qua biến đổi Fourier của hàm delta.

Theo điều kiện (3.2) ta có thể tính biến đổi Fourier của hàm delta

$$\mathscr{F}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i2\pi ft}dt = 1,$$

$$\mathscr{F}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-i2\pi ft}dt = e^{-i2\pi t_0 f} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Từ công thức (3.19) ta được biến đổi ngược

$$\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi ft}df,\ \ \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-i2\pi t_0 f}\right\} = \delta(t-t_0). \qquad \textbf{(3.20)}$$

Từ công thức (3.20) ta có

$$\delta(t-t_0) = \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-i2\pi t_0 f}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi t_0 f}\cdot e^{i2\pi tf}df = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi(t-t_0)f}df \qquad \textbf{(3.21)}$$

Theo giả thiết $\delta(t)$ là hàm chẵn, do đó

$$\delta(t) = \delta(-t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm i2\pi ft}df.$$

Từ công thức (3.21) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi(f-f_0)t}dt = \delta(f-f_0) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi(f-f_0)t}dt = \delta(f-f_0) \qquad \textbf{(3.22)}$$

Tương tự

$$\mathscr{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(f+f_0)t}dt=\delta(f+f_0) \qquad \textbf{(3.23)}$$

Áp dụng tính đồng dạng của biến đổi Fourier ta có

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t). \qquad \textbf{(3.24)}$$

Hoặc có thể tính trực tiếp

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)\delta(t)\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\delta(t)}{a}dt, \forall a>0$$

vì vậy $\delta(at)=\dfrac{1}{a}\delta(t),\ \forall a>0$.

Ngoài ra $\delta(-at)=\delta(at)$.

Do đó ta cũng có $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

$$\sin(2\pi f_0 t)=\frac{e^{i2\pi f_0 t}-e^{-i2\pi f_0 t}}{2i},\quad \cos(2\pi f_0 t)=\frac{e^{i2\pi f_0 t}+e^{-i2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\mathscr{F}\left\{\sin(2\pi f_0 t)\right\}=\frac{1}{2i}\left(\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\}-\mathscr{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\}\right)=\frac{1}{2i}\big(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\big) \qquad \textbf{(3.25)}$$

$$\mathscr{F}\left\{\cos(2\pi f_0 t)\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\}+\mathscr{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\}\right)=\frac{1}{2}\big(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\big). \qquad \textbf{(3.26)}$$

Công thức (3.11) chứng tỏ hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ là một nguyên hàm theo nghĩa rộng của hàm delta.

Hàm $\eta(t)$ không khả tích tuyệt đối trong toàn bộ trục thực nhưng từ tính chất biến đổi Fourier của tích phân (Tính chất 2.3 mục 9. chương 2) ta có thể mở rộng và xem

$$\mathscr{F}\left\{\eta(t)\right\}=\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda\right\}=\frac{1}{i2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f). \qquad \textbf{(3.27)}$$

Ví dụ 3.4: Hàm dấu

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } t>0\\ -1 & \text{nếu } t<0\end{cases}=\eta(t)-\eta(-t) \qquad \textbf{(3.28)}$$

$$\mathscr{F}\left\{\operatorname{sgn}(t)\right\}=\mathscr{F}\left\{\eta(t)\right\}-\mathscr{F}\left\{\eta(-t)\right\}=\left(\frac{1}{i2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)\right)-\left(\frac{1}{-i2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(-f)\right)=\frac{1}{i\pi f}.$$

3.2 CÁC HÀM SỐ TÍCH PHÂN

3.2.1 Công thức xác định các hàm số tích phân

Định nghĩa 3.1:

Hàm ***tích phân mũ*** xác định bởi tích phân suy rộng phụ thuộc cận dưới với mọi

$$\mathrm{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \tag{3.29}$$

Hàm ***tích phân sin***

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \tag{3.30}$$

Hàm ***tích phân cosin***

$$\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \tag{3.31}$$

Ngoài ra ký hiệu:

$$\mathrm{si}(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du$$ cũng đọc là tích phân sin của $t > 0$

vì $$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra $$\mathrm{Si}(t) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(t)\ .$$

Hàm lỗi *(error function)* xác định với mọi $t > 0$

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \tag{3.32}$$

Hàm mật độ của phân bố chuẩn tắc $\mathbf{N}(0,1)$:

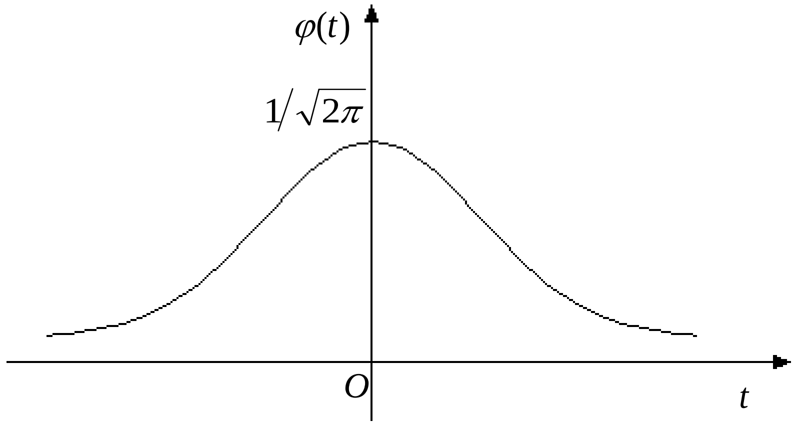
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

gọi là ***hàm Gauss***. Đồ thị của hàm Gauss được cho trên hình 3.8:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục Ot và đồ thị hàm số Gauss bằng 1, thật vậy:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Đặt $t^2 = 2u \Rightarrow S = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$



Hình 3.8: *Đồ thị hàm Gauss*

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm Gauss, nửa trục hoành bên trái tính từ điểm có hoành độ t sẽ là hàm phân phối chuẩn tắc

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{3.33}$$

Đặt $x=u\sqrt{2}$ vào (3.26) sẽ có: $\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}t}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow\ \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{3.34}$$

Mặt khác $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du=2\Phi(t)-1$,

ta được

$$\operatorname{erf}\left(t\right)=2\Phi\left(\sqrt{2}t\right)-1 \tag{3.35}$$

Các hàm $\operatorname{erf}(t)$ và $\Phi(t)$ đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết xác suất, đặc biệt thường được sử dụng khi phân tích các nhiễu tín hiệu.

Bảng tính các giá trị của hàm $\Phi(t)$ được cho trong phụ lục E.

Ví dụ 3.5: Tính $\operatorname{erf}\left(1\right)$.

Giải: Áp dụng công thức (3.35) ta có $\operatorname{erf}\left(1\right)=2\Phi\left(\sqrt{2}\right)-1$.

Tra bảng ta được $\Phi\left(\sqrt{2}\right)=0,8729$. Vậy $\operatorname{erf}\left(1\right)=2.0,8729-1=0,7458$.

3.2.2 Khai triển các hàm tích phân thành chuỗi luỹ thừa (*)

Để tìm khai triển Mac Laurin của hàm tích phân sin ta sử dụng khai triển Mac Laurin của hàm $\frac{\sin t}{t}$.

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Do đó $$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \qquad \textbf{3.36)}$$

Ta tiếp tục tìm khai triển Mac Laurin của hàm tích phân mũ và tích phân cosin bằng cách sử dụng biến đổi Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{Ei}(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\right) dt \text{, đổi biến số } v = \frac{u}{t} \Rightarrow dv = \frac{du}{t}$$

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{Ei}(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_1^{\infty} \frac{e^{-tv}}{v} dv\right) dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{v}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}e^{-vt}dt\right) dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v+s}\right) dv$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v+s}\right) dv = \frac{1}{s}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+s}\right) dv = \frac{1}{s}\ln\left(\frac{v}{v+s}\right)\Bigg|_{v=1}^{\infty} = \frac{1}{s}\ln\left(1+s\right)$$

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{Ei}(t)\right\} = \frac{1}{s}\ln\left(s+1\right) \qquad \textbf{(3.37)}$$

$$\frac{1}{s}\ln\left(s+1\right) = \frac{1}{s}\left[\ln s + \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right] = \frac{1}{s}\ln s + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)s^{n+2}}\,.$$

Sử dụng công thức tìm biến đổi Laplace ngược (2.23) và

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s}\right\} = -\ln t - \gamma \qquad \textbf{(3.35)}$$

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m} - \ln m) \qquad \textbf{(3.36)}$$

gọi là hằng số Euler.

Ta có khai triển Mac Laurin của hàm tích phân mũ

$$\operatorname{Ei}(t) = -\ln t - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \textbf{(3.37)}$$

Tương tự trường hợp hàm $\operatorname{Ei}(t)$, bằng cách đổi biến số $v = \dfrac{u}{t}$ ta được

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{Ci}(t)\right\} = -\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du\right) dt = -\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_1^{\infty} \frac{\cos tv}{v} dv\right) dt$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\operatorname{Ci}(t)\right\} = -\int_1^{\infty} \frac{1}{v}\left(\int_0^{\infty} e^{-st} \cos tv dt\right) dv$$

Sử dụng biến đổi Laplace của hàm cosin ta được

$$\int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tv dt\right)dv = \int_1^\infty \frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2}dv$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2} = \frac{sv}{v^2(s^2+v^2)} = \frac{v}{s}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{s^2+v^2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{v}{v^2}-\frac{v}{s^2+v^2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{s^2+v^2}\right)$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2}dv = \frac{1}{s}\int_1^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{s^2+v^2}\right)dv = \frac{1}{s}\ln\left(\frac{v}{\sqrt{s^2+v^2}}\right)\Bigg|_1^\infty = \frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right)$$

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{Ci}(t)\right\} = -\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) \qquad \textbf{(3.41)}$$

$$-\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) = -\frac{1}{2s}\left[\ln s^2+\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right] = -\frac{1}{s}\ln s - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2(n+1)s^{2n+3}},$$

$$-\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) = -\frac{1}{s}\ln s + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)s^{2n+1}}.$$

Sử dụng công thức tìm biến đổi Laplace ngược (2.23) và công thức (3.35) ta được

$$\mathrm{Ci}(t) = \ln t + \gamma + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!2n} \qquad \textbf{(3.42)}$$

Mặt khác, từ khai triển $\cos t = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$

Suy ra $\frac{\cos t-1}{t} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n-1}}{(2n)!},$

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức trên ta được

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!2n} = -\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}du.$$

Kết hợp với công thức (3.42) ta có

$$\mathrm{Ci}(t) = \ln t + \gamma - \int_0^t \frac{1-\cos u}{u}du \qquad \textbf{(3.43)}$$

Khai triển luỹ thừa của hàm lỗi

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^t e^{-u^2}du = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)},$$

Do đó

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t - \frac{t^3}{1!3} + \frac{t^5}{2!5} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots\right] \quad \textbf{(3.41)}$$

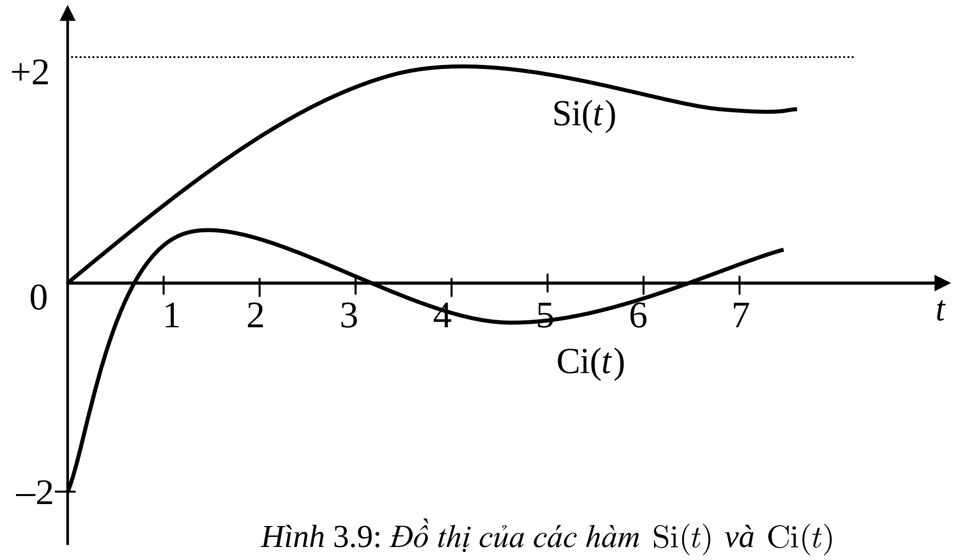
Chuỗi ở vế phải hội tụ với mọi t.

Với t khá bé (ký hiệu $|t| \ll 1$) sẽ nhận được các công thức sấp xỉ như sau :

$$\operatorname{Si}(t) \approx t,\ \operatorname{Ci}(t) \approx \gamma + \ln t,\ \operatorname{Ei}(t) \approx -\gamma - \ln t,\ \operatorname{erf}(t) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} t. \quad \textbf{(3.45)}$$

Các công thức gần đúng cho phép xác định các giá trị $\operatorname{Si}(t)$ và $\operatorname{Ci}(t)$.

Đồ thị của các hàm $\operatorname{Si}(t)$ và $\operatorname{Ci}(t)$ cho ở hình 3.9.



Hình 3.9: *Đồ thị của các hàm* $\operatorname{Si}(t)$ *và* $\operatorname{Ci}(t)$

3.3 HÀM GAMMA, HÀM BETA

3.3.1 Định nghĩa hàm Gamma (Gauss)

Hàm Gamma là hàm siêu việt mở rộng từ hàm giai thừa xác định với mọi số tự nhiên n theo công thức $n! = n(n-1)...2.1$.

Hàm giai thừa $f(n) = n!$ thỏa mãn hai điều kiện $f(n+1) = nf(n)$ và $f(1) = 1$. Ta mở rộng hàm giai thừa thành hàm Gamma với biến số phức thỏa mãn hai điều kiện trên.

Định nghĩa 3.2: *Hàm số Gamma, ký hiệu* $\Gamma(z)$*, là hàm số biến số phức xác định với mọi số phức khác nguyên âm* $z \neq 0, -1, -2, ...$ *cho bởi biểu thức:*

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)...(z+m)} \quad \textbf{(3.46)}$$

Ngoài định nghĩa hàm Gamma theo công thức (3.46) của Gauss, ta có hai định nghĩa tương đương sau.

Định lý 3.1: *Hàm gamma có các dạng sau đây:*

1. Công thức Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}.\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}} \qquad \textbf{(3.47)}$$

trong đó γ là hằng số Euler (công thức 3.33), thường lấy gần đúng

$$\gamma \approx \frac{1}{2}(\sqrt[3]{10}-1) = 0,57721566$$

2. Công thức Euler: Trường hợp $\operatorname{Re} z > 0$ ta có công thức

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \textit{nếu} \quad \operatorname{Re} z > 0 \qquad \textbf{(3.48)}$$

Khi $\operatorname{Re} z \le 0$ tích phân suy rộng theo cận dưới $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ không hội tụ.

Chứng minh:

1. $$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{m\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+m)}{m!m^z} = z\lim_{m\to\infty} m^{-z}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$= z\lim_{m\to\infty} e^{-z\ln m}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right) = z\lim_{m\to\infty} e^{-z\ln m}e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

$$= z\lim_{m\to\infty} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}.$$

2. Để chứng minh công thức (3.48) chúng ta hãy tính tích phân sau

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

Đổi biến số $x = \frac{t}{n} \Rightarrow t = nx \Rightarrow dt = ndx$, thay vào I_n ta được

$$I_n = n^z\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx.$$

Ta sẽ chứng minh $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$ khi $\operatorname{Re} z > 0$

Tích phân từng phần sẽ có:

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx = \left.\frac{(1-x)^n x^z}{z}\right|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 x^z(1-x)^{n-1}dx$$

Nếu $\operatorname{Re} z > 0$ thì $\lim_{x\to 0} x^z = 0$

Suy ra: $\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx = \frac{n}{z}\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^z dx$

$$\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^z dx = \frac{n-1}{z+1}\int_0^1 (1-x)^{n-2}x^{z+1}dx$$

... ...

$$\int_0^1 (1-x)x^{z+n-2}dx = \frac{1}{z+n-1}\int_0^1 x^{z+n-1}dx = \frac{1}{(z+n-1)(z+n)}$$

Cuối cùng ta được: $\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx = \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)}$

Do đó $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = I_n = \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}$.

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$

Từ công thức (3.46) suy ra

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Ví dụ 3.6: Chứng minh $\mathscr{L}\left\{t^\alpha\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}; \alpha > -1, s > 0$.

Giải: $\mathscr{L}\left\{t^\alpha\right\} = \int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt$. Đặt $u = st \Rightarrow du = sdt$; $t = \frac{u}{s}$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

3.3.2 Các tính chất của hàm Gamma

a.

$\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right)$, với mọi $z \neq 0, -1, -2, ...$ **(3.49)**

$\Gamma(1) = 1$. **(3.50)**

Với mọi $z = n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n+1\right) = n!\Gamma\left(1\right) = n!$ **(3.51)**

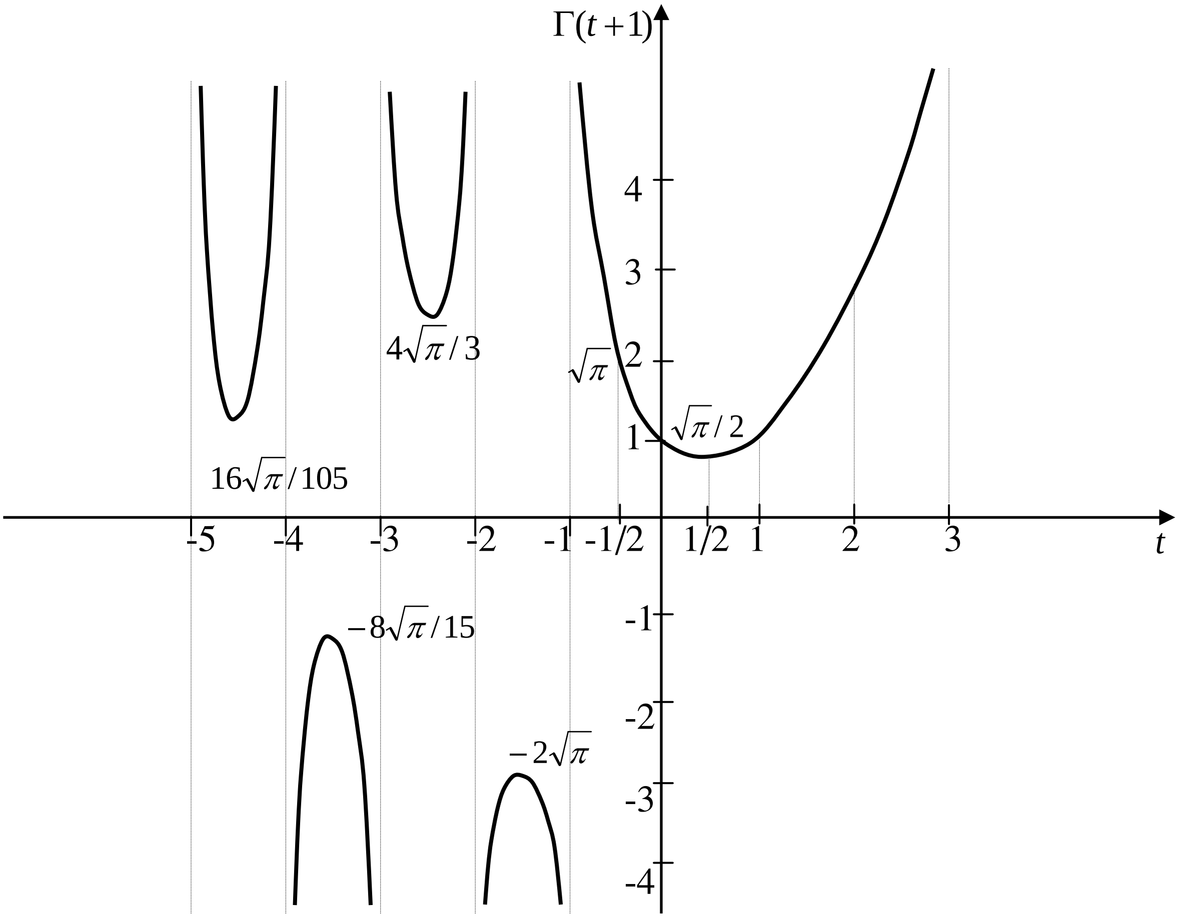
Chứng minh: Từ (3.46) ta có

$$\Gamma(z+1) = \lim_{m\to\infty}\frac{m!m^{z+1}}{(z+1)(z+2)....(z+m+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)....(z+m)}\cdot\frac{zm}{z+m+1}$$

$$=\Gamma(z)\lim_{m\to\infty}\frac{mz}{z+m+1}=\Gamma(z).z$$

$$\Gamma(1)=\lim_{m\to\infty}\frac{m.m!}{1.2...(m+1)}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}=1\,.$$

Đồ thị hàm số Gamma với z là số thực cho trên hình 3.10 (theo công thức (3.46)).



Hình 3.10*: Đồ thị hàm Gamma*

b.

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\text{ với mọi } z\neq 0,\pm 1,\pm 2,... \qquad \textbf{(3.52)}$$

Chứng minh: Từ (3.47) ta có:

$$\frac{1}{\Gamma(z).\Gamma(-z)}=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{\frac{-z}{m}}\right\}(-z)e^{-\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{m}\right)e^{\frac{z}{m}}\right\}=(-z).z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)$$

Theo (3.49): $\Gamma\left(1-z\right)=-z\Gamma\left(-z\right)$,

Do đó $$\frac{1}{\Gamma(z).\Gamma(1-z)}=z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right).$$

Vậy để chứng minh công thức (3.52) ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$

Trước hết ta khai triển Fourier hàm số $y(t) = \cos\alpha t$ trong $\left(-\pi;\pi\right)$ với $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Vì $y(t)$ là hàm chẵn, do đó ta có

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha t\cdot dt = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi\alpha}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha t\cdot\cos nt\cdot dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right)$$

$$\sin(\alpha+n)\pi = \sin\alpha\pi\cos n\pi + \sin n\pi\cos\alpha\pi = (-1)^n\sin\alpha\pi$$

$$\sin(\alpha-n)\pi = \sin\alpha\pi\cos n\pi - \sin n\pi\cos\alpha\pi = (-1)^n\sin\alpha\pi$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2\alpha(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha t = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nt}{\alpha^2-n^2}\right)$$

Thay $t = \pi,\ \alpha = x$ vào công thức trên và chia hai vế cho $\sin\pi x$ ta được:

$$\cot\pi x = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{x^2-n^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \frac{1}{x^2-3^2} + \ldots.\right)$$

$$\Rightarrow \cot\pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \frac{1}{3^2-x^2} + \ldots.\right)$$

$$\int_0^t\left(\cot\pi x - \frac{1}{\pi x}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^t x\left(\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \ldots\right)dx$$

Vì rằng: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x} = \pi$

Do đó tích phân vế trái

$$\int_0^t \left(\cot \pi x - \frac{1}{\pi x}\right) dx = \int_0^t \left(\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t \left(\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{x}\Bigg|_0^t = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\sin \pi t}{t} - \ln \pi\right) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Tích phân của vế phải

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t x\left(\frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{2^2 - x^2} + \ldots\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t \left(\frac{-2x}{1^2 - x^2} + \frac{-2x}{2^2 - x^2} + \ldots\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^2 - x^2)\Big|_0^t = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n^2 - t^2) - \ln n^2\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi} \ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$$

Vậy $\ln \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$. Từ đó nhận được (3.52).

c.

Từ (3.52) suy ra $\dfrac{\pi}{\Gamma\left(1-n\right)} = \Gamma\left(n\right)\sin(n\pi) = 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$. **(3.53)**

Như vậy $\Gamma(z) = \infty$ với mọi $z = 0, -1, -2, \ldots$

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \text{ với mọi } z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots \qquad \textbf{(3.54)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \textbf{(3.55)}$$

Chứng minh: Với mọi $z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$ thay z bởi $z + \frac{1}{2}$ vào công thức (3.52) ta nhận được:

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos \pi z}.$$

Thay $z = \frac{1}{2}$ vào công thức (3.49) ta nhận được $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, hơn nữa $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Do đó $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

d.

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\text{, với mọi } z=n\in\mathbb{N} \tag{3.56}$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}\text{, với mọi } z=n\in\mathbb{N} \tag{3.57}$$

Chứng minh: Với mọi $n\in\mathbb{N}$, với mọi $k\in\mathbb{C}$. Áp dụng liên tiếp công thức (3.49) sẽ có:

$$\Gamma(n+k+1)=(n+k)(n+k-1)....(k+1)\Gamma(k+1)$$

Thay $k=-\dfrac{1}{2}$ suy ra

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}-1\right)....\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,.$$

Trong đó $(2n-1)!!=1.3.5...(2n-1)$.

Thay $z=n$ vào (3.54) ta có:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi}{\cos\pi n}=\frac{\pi}{(-1)^n}$$

Áp dụng kết quả (3.56) ta được

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi}{(-1)^n}\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\pi}{(-1)^n}\frac{2^n}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{(-1)^n2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}.$$

e.

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt\,;\ \Gamma'(1)=-\gamma \tag{3.58}$$

Chứng minh: Sử dụng quy tắc đạo hàm dưới dấu tích phân công thức (3.48) ta được

$$\Gamma'(z)=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial z}t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt\,,$$

Để chứng minh đẳng thức thứ hai ta lấy loga và đạo hàm hai vế công thức (3.47),

$$-\ln\Gamma(z)=\ln z+\gamma z+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{z}{m}\right)-\frac{z}{m}\right)\Rightarrow-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+z}-\frac{1}{m}\right)$$

thay $z=1$ ta được $\Gamma'(1)=-\gamma$.

Ví dụ 3.7: Tính **a.** $\Gamma(5)$ **b.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$ **c.** $\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$.

Giải: **a.** $\Gamma(5)=4!=24$

b. $\dfrac{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{8}{3}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{\frac{8}{3}\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{\frac{8}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{80}{27}$

c. $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)=-4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$;

$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=-4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=-\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}\pi\,.$$

Ví dụ 3.8: *Một hạt M với khối lượng m đặt cách điểm O cố định khoảng cách* $a>0$. *M bị hút về O với một lực tỉ lệ nghịch với khoảng cách. Tìm thời gian để M về đến điểm O.*

Giải: Gọi $x(t)$ là khoảng cách từ *M* đến *O* ở thời điểm *t*, $x(0)=a$. Theo định luật Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x}, \text{ } k \text{ là hằng số tỷ lệ.}$$

Ta có $\dfrac{dx}{dt}=v$ là vận tốc của hạt và $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=v\cdot\dfrac{dv}{dx}$, thay vào phương trình trên ta được $mv\cdot\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{k}{x}$, do đó $mvdv=-\dfrac{k}{x}dx$

Lấy tích phân hai vế ta được $\dfrac{mv^2}{2}=-k\ln x+C$.

Khi $t=0, x(0)=a$, $v(0)=0$ suy ra $C=k\ln a$. Vậy

$$\frac{mv^2}{2}=k\ln\frac{a}{x}\Rightarrow v^2=\frac{2k}{m}\ln\frac{a}{x}\Rightarrow v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\frac{a}{x}}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=-\sqrt{\frac{m}{2k}}\Big/\sqrt{\ln\frac{a}{x}}.$$

Do đó thời gian *T* để *M* về đến *O* thỏa mãn

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_a^0\frac{1}{\sqrt{\ln(a/x)}}dx=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{\ln(a/x)}}dx.$$

Đổi biến $\ln(a/x)=u\Rightarrow x=ae^{-u}\Rightarrow dx=-ae^{-u}du$ ta được

$$T=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{+\infty}^0\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot(-a)e^{-u}du=a\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^{+\infty}u^{-1/2}\cdot e^{-u}du=a\sqrt{\frac{m}{2k}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}.$$

3.3.3 Hàm Beta

Định nghĩa 3.3: *Hàm số biểu diễn dưới dạng tích phân phụ thuộc hai tham số thực* $p,q>0$

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{3.59}$$

Gọi là hàm Beta hay là tích phân Euler loại 1.

Hàm Gamma (công thức 3.46) gọi là tích phân Euler loại 2.

Tính chất 3.1:

$$B\left(p,q\right)=B\left(q,p\right) \quad \textbf{(3.60)}$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta \quad \textbf{(3.61)}$$

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \textbf{(3.62)}$$

Chứng minh:

Để chứng minh công thức (3.60), ta đổi biến $x=-t$.

Để chứng minh công thức (3.61), ta đặt $x=\cos^2\theta$ khi đó $dx=-2\cos\theta\sin\theta d\theta$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

Thay vào công thức (3.59) ta được công thức (3.61).

Để chứng minh công thức (3.62), ta xét công thức biểu diễn hàm Gamma dưới dạng tích phân (công thức 3.48).

Thay z lần lượt bởi p, q thay t bởi y^2, x^2 nhận được

$$\Gamma(p)=2\int_0^{\infty}y^{2p-1}e^{-y^2}dy,\ \Gamma(q)=2\int_0^{\infty}x^{2q-1}e^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow\ \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy=4\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Trong đó D là góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Chuyển sang toạ độ cực:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases},\ \begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r<\infty\end{cases};\ dxdy=rdrd\varphi$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\left(2\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}.e^{-r^2}.dr\right)=B\left(p,q\right)\left(2\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right)$$

Đặt $t=r^2\Rightarrow dt=2rdr$ ta được

$$2\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}.e^{-r^2}.dr=\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-2}.e^{-r^2}.2rdr=\int_0^{\infty}t^{(p+q)-1}e^{-t}dt=\Gamma\left(p+q\right)$$

Vậy $\Gamma(p)\Gamma(q)=B\left(p,q\right)\Gamma\left(p+q\right)\ \Rightarrow B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Từ công thức (3.61), (3.62) ta có

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x dx = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \tag{3.63}$$

Ví dụ 3.9: Tìm khối lượng của vật thể phẳng nằm trong mặt phẳng *Oxy* giới hạn bới; $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ và có khối lượng riêng $\rho = \sqrt{xy}$.

Giải: $M = \iint_D \sqrt{xy} dxdy = \int_0^1 \sqrt{x} dx \int_0^{1-x} \sqrt{y} dy = \int_0^1 \sqrt{x} dx \left. \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^{1-x} = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx$

$$= \frac{2}{3} B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!} = \frac{\pi}{24}$$

Ví dụ 3.10: Công thức tích phân Dirichlet

$$I = \iiint_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} dxdydz = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1\right]}, \tag{3.64}$$

trong đó *V* là 1/8 hình cầu đơn vị: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$; $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Giải: Đổi biến số $u = x^2$, $v = y^2$, $w = z^2$. Miền *V* trở thành hình chóp tứ diện

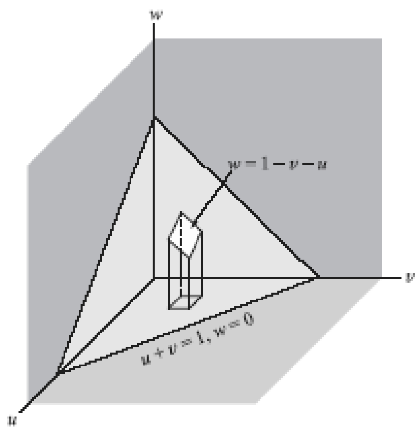
Ω: $u + v + w \le 1; u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0$ (Hình 3.11).

$$I = \iiint_\Omega u^{(\alpha-1)/2} v^{(\beta-1)/2} w^{(\gamma-1)/2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \frac{dv}{2\sqrt{v}} \frac{dw}{2\sqrt{w}}$$

$$= \frac{1}{8} \iiint_\Omega u^{(\alpha/2)-1} v^{(\beta/2)-1} w^{(\gamma/2)-1} dudvdw$$

$$= \frac{1}{8} \int_{u=0}^1 u^{(\alpha/2)-1} du \int_{v=0}^{1-u} v^{(\beta/2)-1} dv \int_{w=0}^{1-v-u} w^{(\gamma/2)-1} dw$$

$$= \frac{1}{4\gamma} \int_{u=0}^1 u^{(\alpha/2)-1} du \int_{v=0}^{1-u} (1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} dv$$



Hình 3.11

Đặt $v = (1-u)t \Rightarrow dv = (1-u)dt$; $1 - v - u = (1-u)(1-t)$

$$(1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2-1} (1-t)^{\gamma/2} t^{(\beta/2)-1}$$

$$\Rightarrow \int_{v=0}^{1-u} (1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} dv = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} \int_{t=0}^1 (1-t)^{\gamma/2} t^{(\beta/2)-1} dt$$

$$= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} B(\beta/2; \gamma/2+1) = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} \frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta / 2)\Gamma(\gamma / 2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma) / 2+1\right]}\int\limits_{u=0}^{1} u^{(\alpha/2)-1}(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}du$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta / 2)\Gamma(\gamma / 2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma) / 2+1\right]}B(\alpha / 2;(\beta+\gamma) / 2+1)$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta / 2)\Gamma(\gamma / 2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma) / 2+1\right]}\cdot\frac{\Gamma(\alpha / 2)\Gamma\left[(\beta+\gamma) / 2+1\right]}{\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma) / 2+1\right]} = \frac{\Gamma(\alpha / 2)\Gamma(\beta / 2)\Gamma(\gamma / 2)}{8\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma) / 2+1\right]}.$$

Ví dụ 3.11: *Tìm khối lượng của vật thể hình cầu tâm O bán kính 1 và có khối lượng riêng tỷ lệ với bình phương khoảng cách đến trung tâm của nó.*

Giải: Khối lượng riêng tai điểm có tọa độ (x,y,z) là $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Do tính chất đối xứng của vật thể suy ra khối lượng *M* của vật thể bằng tám lần khối lượng vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất của trục tọa độ.

$$M = 8\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\,,\ V = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2 \le 1; x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}.$$

Ta cũng có $\iiint\limits_V x^2dxdydz = \iiint\limits_V y^2dxdydz = \iiint\limits_V z^2dxdydz \Rightarrow M = 8.3\iiint\limits_V x^2dxdydz$

Áp dụng công thức Dirichlet (3.64) với $\alpha = 3$; $\beta = \gamma = 1$ ta được

$$M = 8.3\iiint\limits_V x^2dxdydz = 8.3.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{8\Gamma\left(\frac{3+1+1}{2}+1\right)} = 3.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\pi}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4\pi}{5}.$$

Ví dụ 3.12: *Tính tích phân* $I = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Giải: $I = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{2}}x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,dx$.

Áp dụng công thức (3.61) với $\begin{cases}2p-1=\frac{1}{2}\\ 2q-1=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2p=\frac{3}{2}\\ 2q=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=\frac{3}{4}\\ q=\frac{1}{4}\end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma\left(1\right)} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Ví dụ 3.13: *Chứng minh rằng*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{u-1}+x^{v-1}}{(x+1)^{u+v}}\,dx = 2B(u,v)\,,$$

với u, v là các hằng số dương tùy ý.

Giải: Đổi biến $y=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow x=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow dx=\dfrac{1}{(1-y)^2}dy$, $x+1=\dfrac{y}{1-y}+1=\dfrac{1}{1-y}$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{u-1}+x^{v-1}}{(x+1)^{u+v}}\,dx = \int_0^1 \frac{\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^{u-1}+\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^{v-1}}{\left(\dfrac{1}{1-y}\right)^{u+v}}\cdot\frac{1}{(1-y)^2}\,dy$$

$$=\int_0^1 y^{u-1}\left(1-y\right)^{v-1}dy+\int_0^1 y^{v-1}\left(1-y\right)^{u-1}dy=2B(u,v)\,.$$

3.4 PHƯƠNG TRÌNH BESSEL VÀ CÁC HÀM BESSEL

The Sturm-Liouville Problem 305

6.5 ANOTHER SINGULAR STURM-LIOUVILLE PROBLEM: BESSEL'S EQUATION

3.4.1 Phương trình Bessel

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0 \qquad \textbf{(3.65)}$$

gọi là phương trình Bessel ứng với tham số α.

Dưới đây ta xét với $\alpha\in\mathbb{R}$ và gọi là phương trình Bessel cấp α, $\alpha\ge 0$.

Nghiệm riêng của phương trình (3.65) gọi là hàm Bessel cấp α.

Rõ ràng nếu $J_\alpha\left(z\right)$ và $Y_\alpha\left(z\right)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (3.65) thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y\left(z\right)=AJ_\alpha\left(z\right)+BY_\alpha\left(z\right)=Z_\alpha\left(z\right) \qquad \textbf{(3.66)}$$

Trong đó A, B là các hằng số tuỳ ý.

3.4.2 Các hàm Bessel loại 1 và loại 2

3.4.2.1 Hàm Bessel loại 1

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.65) theo phương pháp Frobenius bằng cách xét các nghiệm dạng

$$y(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\quad a_0\neq 0.$$

$$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+\rho}\Rightarrow y'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)a_k z^{k+\rho-1}=z^{\rho-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)a_k z^k$$

$$y''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^{k+\rho-2}=z^{\rho-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^k$$

Thay vào phương trình (3.65) ta được

$$z^{\rho-2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+2}-\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\right)=0$$

Ta có $(k+\rho)(k+\rho-1)+(k+\rho)=(k+\rho)^2$, do đó đẳng thức trên được viết lại

$$z^{\rho-2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)^2 a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+2}-\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\right)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{1}\left((k+\rho)^2-\alpha^2\right)a_k z^k+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left((k+\rho)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}\right]z^k=0.$$

Đồng nhất hệ số suy ra các hằng số ρ và a_k; $k=0,1,2,\ldots$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(\rho^2-\alpha^2)a_0=0\\ \left((\rho+1)^2-\alpha^2\right)a_1=0\\ \left((\rho+2)^2-\alpha^2\right)a_2+a_0=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left((\rho+r)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}=0\ ;\ k\geq 2\end{cases}\qquad\textbf{(3.67)}$$

Từ điều kiện $a_0\neq 0$ ta được $\rho=\pm\alpha$, $\alpha\geq 0$

1. Trường hợp thứ nhất: $\rho=\alpha$

$$(\rho+k)^2-\alpha^2=(\alpha+k)^2-\alpha^2=(2\alpha+k)k$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{-a_{k-2}}{k(2\alpha+k)}\quad\forall k\geq 2\qquad\textbf{(3.68)}$$

Thay $\rho=\alpha$ vào công thức (3.67) suy ra $a_1=0$. Kết hợp với công thức (3.68) ta có hệ số lẻ đồng nhất bằng 0:

$$a_{2k+1}=0;\forall k=0,\,1,\,2,\ldots$$

Quy nạp và sử dụng công thức (3.68) với các số hạng chẵn ta có

$$a_{2k}=\frac{-a_{2k-2}}{2k(2\alpha+2k)}=\frac{-a_{2(k-1)}}{2^2k(\alpha+k)},$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^2 a_{2(k-2)}}{2^2 2^2 k(k-1)(\alpha+k)\big(\alpha+(k-1)\big)} \dots \Rightarrow a_{2k} = a_0 \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(k+\alpha)},$$

$y(z)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất do đó hệ số a_0 có thể chọn tuỳ ý.

Chọn $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha \Gamma(1+\alpha)}$ và sử dụng đẳng thức:

$$\Gamma\big(1+k+\alpha\big) = \big(k+\alpha\big)\dots\big(2+\alpha\big)\big(1+\alpha\big)\Gamma\big(1+\alpha\big) \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} 2^\alpha k!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

Suy ra:

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \equiv J_\alpha(z) \qquad \textbf{(3.69)}$$

Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad \textbf{(3.70)}$$

Đặc biệt

$$J_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad \textbf{(3.71)}$$

2. Trường hợp thứ hai:

$$(\rho+k)^2 - \alpha^2 = (-\alpha+k)^2 - \alpha^2 = (-2\alpha+k)k$$

Các hệ số chẵn liên hệ theo công thức

$$2k\big(2k-2\alpha\big)a_{2k} + a_{2k-2} = 0 \qquad \textbf{(3.72)}$$

Các hệ số lẻ thoả mãn

$$\big(2k+1\big)\big(2k+1-2\alpha\big)a_{2k+1} + a_{2k-1} = 0$$

a. Nếu $\alpha \neq \dfrac{2m+1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ thì $a_1 = 0$, suy ra

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{\big(2k+1\big)\big(2k+1-2\alpha\big)} = 0 \text{ với mọi } k,$$

khi đó tương tự như trên, chọn a_0 thích hợp sẽ có

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \equiv J_{-\alpha}(z) \qquad \textbf{(3.73)}$$

b. Nếu $\alpha = \dfrac{2m+1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ *(cấp bán nguyên)* thì hệ số lẻ $a_{2k+1} = 0$ với mọi chỉ số $r < k$ và hệ số lẻ a_{2k+1} có thể khác không khi $r \geq k$. Tuy nhiên nếu ta chọn các hệ số lẻ đều bằng không và chọn a_0 thích hợp vẫn được nghiệm có dạng (3.65), (3.69).

Gọi $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ *là **các hàm Bessel loại*** **1**.

Định lý 3.2:

1. Nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ (không phải là số tự nhiên) thì $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ độc lập tuyến tính.

2. Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì $J_n(z)$ và $J_{-n}(z)$ phụ thuộc tuyến tính, hơn nữa

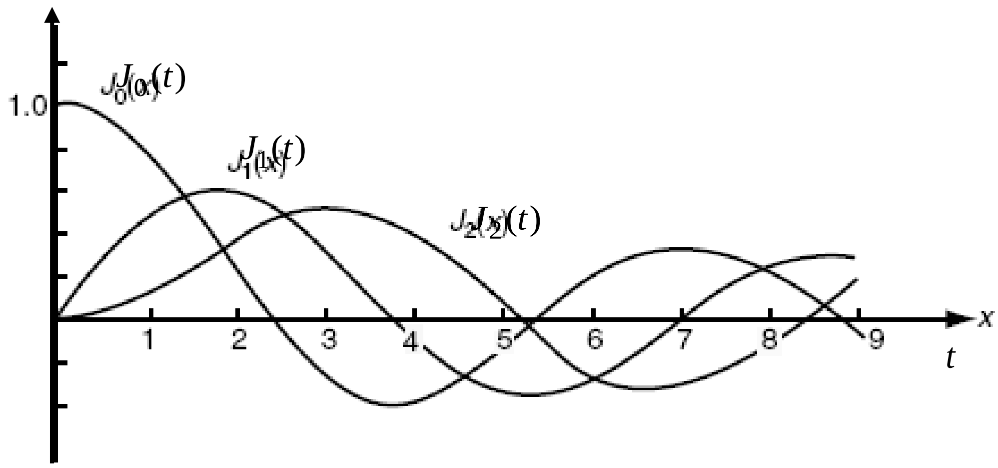
$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \qquad \textbf{(3.74)}$$

Chứng minh: Thật vậy, nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{|z| \to 0} J_\alpha(z) = 0$ và $\lim\limits_{|z| \to 0} J_{-\alpha}(z) = \infty$

Suy ra $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ độc lập tuyến tính

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (3.69) có dạng

$$Z_\alpha(z) = AJ_\alpha(z) + BJ_{-\alpha}(z)$$



Hình 3.11: *Đồ thị các hàm Bessel* $J_0(t)$, $J_1(t)$, $J_2(t)$

Trường hợp $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ta có

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

bởi vì $\dfrac{1}{\Gamma(k+1-n)} = 0$ với mọi số tự nhiên $k < n$ (công thức 3.53).

Thay k bởi $k+n$ vào công thức trên ta được

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2n} = (-1)^n J_n(z)$$

điều này chứng tỏ $J_n\left(z\right)$ và $J_{-n}\left(z\right)$ phụ thuộc tuyến tính.

3.4.2.2 Hàm Bessel loại 2

Định lý 3.2 cho thấy hai hàm Bessel loại 1 $J_\alpha\left(z\right)$ và $J_{-\alpha}\left(z\right)$ không phải lúc nào cũng độc lập vì vậy ta cần tìm hàm Bessel loại 2 độc lập với hàm Bessel loại 1.

Hàm số xác định như sau

$$Y_\alpha\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{(\cos\pi\alpha)J_\alpha(z)-J_{-\alpha}(z)}{\sin\pi\alpha} & \text{nếu} \quad \alpha\notin\mathbb{N}\\ \lim\limits_{\beta\to n;\beta\notin\mathbb{N}} Y_\beta(z) & \text{nếu} \quad \alpha=n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad \textbf{(3.75)}$$

Cũng là nghiệm của phương trình Bessel (3.61), được gọi là ***hàm Bessel loại 2***.

Từ công thức (3.71) ta thấy khi $\alpha=n$ giới hạn

$$\lim_{\beta\to n;\beta\notin\mathbb{N}}\frac{(\cos\pi\beta)J_\beta(z)-J_{-\beta}(z)}{\sin\pi\beta}$$

có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc De L'Hospital nhận được

$$Y_n\left(z\right)=\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial\beta}\Big((\cos\pi\beta)J_\beta(z)-J_{-\beta}(z)\Big)}{\dfrac{\partial}{\partial\beta}\sin\pi\beta}\right]_{\beta=n}$$

$$=\left[\frac{-\pi\sin\pi\beta J_\beta(z)+(\cos\pi\beta)\dfrac{\partial}{\partial\beta}J_\beta(z)-\dfrac{\partial}{\partial\beta}J_{-\beta}(z)}{\pi\cos\pi\beta}\right]_{\beta=n}$$

$$Y_n\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_n\left(z\right)}{\partial n}-\left(-1\right)^n\frac{\partial J_{-n}\left(z\right)}{\partial n}\right].$$

Sử dụng công thức đạo hàm của hàm số $\ln\Gamma\left(z\right)$ nhận được kết quả sau:

$$Y_n\left(z\right)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{z}{2}\right)J_n(z)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2k}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{S_{nk}}{k!(n-k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

Trong đó:

$$S_{nk}=1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{k}+...+1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{k+n}\ ,\ k\neq 0$$

$$S_{n0}=1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n}$$

Với mọi α, các hàm $J_\alpha\left(z\right)$ và $Y_\alpha\left(z\right)$ là độc lập tuyến tính.

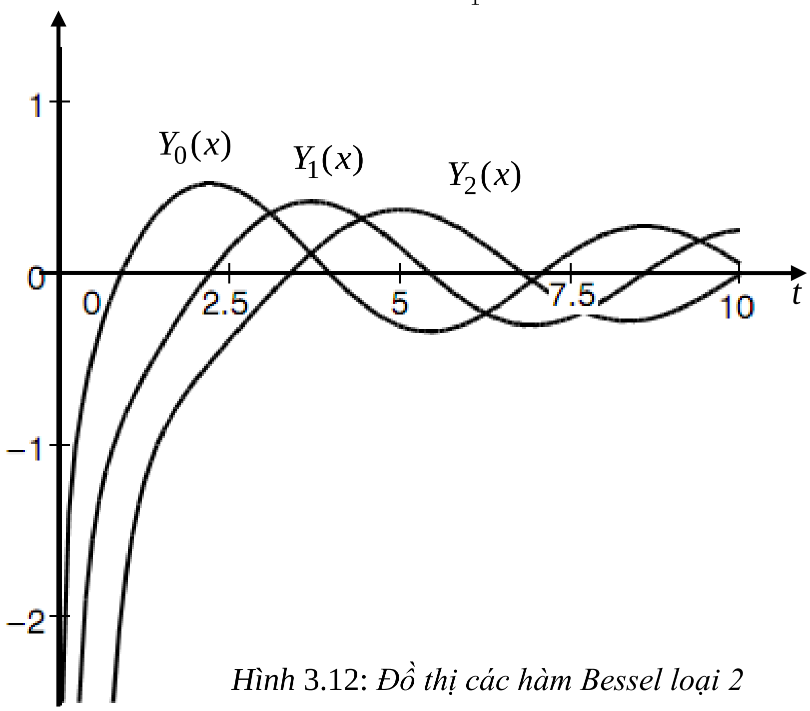
Ta cũng có thể tìm hàm Bessel độc lập với hàm Bessel loại 1 như sau.

Theo lý thuyết của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p\left(z\right)\frac{dy}{dz} + q\left(z\right)y = 0$$

Nếu biết $y_1\left(z\right)$ là một nghiệm thì ta có thể tìm nghiệm độc lập tuyến tính với $y_1\left(z\right)$ theo công thức:

$$y_2\left(z\right) = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(z)dz} dz\,.$$



Hình 3.12: *Đồ thị các hàm Bessel loại 2*

Vì vậy với trường hợp phương trình Bessel cấp *n* nguyên, ta có thể tìm nghiệm độc lập với $J_n\left(z\right)$ theo công thức:

$$I_n(z) = J_n(z)\left(A + B\int \frac{dz}{zJ_n^2(z)}\right)$$

Chọn A, B thích hợp sẽ được hàm số $I_n\left(z\right)$ cho bởi (3.75). Hàm số $I_n\left(z\right)$ gọi là ***hàm Weber***.

Đôi khi còn sử dụng hàm số độc lập tuyến tính với $J_\alpha\left(z\right)$ theo công thức sau và gọi là ***hàm số Neumann***.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}\pi Y_\alpha(z) + (\ln 2 - \gamma)J_\alpha(z) \qquad \textbf{(3.76)}$$

Gọi $Y_\alpha\left(z\right)$, $N_\alpha\left(z\right)$ *là các hàm Bessel loại 2.*

Từ các hàm Bessel loại 1 và loại 2 ta có các hàm Hankel loại 1 và hàm Hankel loại 2 xác định lần lượt như sau

$$H_{\alpha}^{(1)}(z)=J_{\alpha}(z)+iY_{\alpha}(z)$$

$$H_{\alpha}^{(2)}(z)=J_{\alpha}(z)-iY_{\alpha}(z),$$

Các hàm Hankel đôi khi còn được gọi là hàm Bessel loại 3.

3.4.3 Các công thức truy toán đối với hàm Bessel

Các công thức sau đúng với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ (kể cả trường hợp $\alpha<0$):

1. $J_{\alpha+1}(z)=\dfrac{2\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha-1}(z).$ **(3.77)**

Thay công thức (3.69), (3.73) vào vế phải và biến đổi thành vế trái:

$$\frac{2\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha-1}(z)=\frac{2\alpha}{z}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}-\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+k+1)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha+k)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-2}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{-k}{\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+2)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=J_{\alpha+1}(z).$$

2. $zJ'_{\alpha}(z)=\alpha J_{\alpha}(z)-zJ_{\alpha+1}(z).$ **(3.78)**

Trường hợp đặc biệt $\alpha=0\Rightarrow J'_0(z)=-J_1(z)$. Chứng tỏ các không điểm của $J_1(z)$ làm cho $J_0(z)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu.

Tính $J'_{\alpha}(z)$ từ công thức (3.65), (3.69) thay vào vế trái suy ra vế phải:

$$J_{\alpha}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

$$\Rightarrow zJ'_{\alpha}(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\alpha)}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha-1}$$

$$=\alpha\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{z}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}+z\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}$$

$$=\alpha J_{\alpha}(z)-z\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}=\alpha J_{\alpha}(z)-zJ_{\alpha+1}(z)$$

3. $J'_{\alpha}(z)=\dfrac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right].$ **(3.79)**

Từ công thức (3.78) và (3.79) ta có:

$$J_{\alpha+1}(z)=\frac{2\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha-1}(z)\Rightarrow\frac{\alpha}{z}J_{\alpha}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha-1}(z)\right)$$

$$J'_{\alpha}(z)=\frac{\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha+1}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha-1}(z)\right)-J_{\alpha+1}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right)$$

4. $zJ'_{\alpha}(z)=zJ_{\alpha-1}(z)-\alpha J_{\alpha}(z)$. **(3.80)**

(Thay $J_{\alpha+1}(z)$ ở 1. vào 2. suy ra 4.)

5. $\dfrac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\right)=z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z)$. **(3.81)**

Đạo hàm vế trái và sử dụng 1. và 2.:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\right)=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{\alpha}(2k+2\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\alpha)2^{\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha-1}=z^{\alpha}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z).$$

6. $\dfrac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_{\alpha}(z)\right)=-z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)$. **(3.82)**

7. $\displaystyle\int_{z_0}^{z}z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z)dz=\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\right)dz=z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\Big|_{z_0}^{z}$. **(3.83)**

$\displaystyle\int_{z_0}^{z}z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)dz=-\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_{\alpha}(z)\right)dz=-z^{-\alpha}J_{\alpha}(z)\Big|_{z_0}^{z}$. **(3.84)**

8. $\displaystyle\int_{0}^{z}J_{\alpha}(z)dz=2\left[J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha+3}(z)+\ldots\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{\alpha+2k+1}(z)$. **(3.85)**

Đặc biệt $\displaystyle\int_{0}^{z}J_{0}(z)dz=2\left[J_{1}(z)+J_{3}(z)+\ldots\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)$.

Để chứng minh công thức (3.85) ta lấy tích phân hai vế của (3.79):

với $\alpha+1$ ta được $\displaystyle 2J_{\alpha+1}(z)=\int_{0}^{z}J_{\alpha}(z)dz-\int_{0}^{z}J_{\alpha+2}(z)dz$.

với $\alpha+3$ ta được $\displaystyle 2J_{\alpha+3}(z)=\int_{0}^{z}J_{\alpha+2}(z)dz-\int_{0}^{z}J_{\alpha+4}(z)dz$.

....

Cộng theo vế ta suy ra (3.85).

9. Với mọi số tự nhiên $m\in\mathbb{N}^*$, $m\neq 0$, đặt: thì

$$I_m = -z^m J_{m-1}(z) + (2m-1)I_{m-1}. \qquad \textbf{(3.86)}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} U = z^{2m-1} \\ dV = z^{-m+1}J_m(z)dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = (2m-1)z^{2m-2}dz \\ V = z^{-m+1}J_{m-1}(z) \end{cases}$$

và áp dụng công thức (3.84) với $\alpha = m-1$ ta được:

$$I_m = \int_0^z z^m J_m(z)dz = \int_0^z z^{2m-1} \cdot z^{-m+1} J_m(z)dz$$

$$= -z^{2m-1} \cdot z^{-m+1}J_{m-1}(z) + (2m-1)\int_0^z z^{m-1}J_{m-1}(z)dz$$

10. Với mọi cặp số tự nhiên $m,\, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ đặt: $I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)dz$ thì

$$I_{m,n} = z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1)I_{m-1,n+1}. \qquad \textbf{(3.87)}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} U = z^{m-n-1} \\ dV = z^{n+1}J_n(z)dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = (m-n-1)z^{m-n-2}dz \\ V = z^{n+1}J_{n+1}(z) \end{cases}$$

và áp dụng công thức (3.84) với ta được

$$I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)dz = \int_0^z z^{m-n-1} \cdot z^{n+1} J_n(z)dz$$

$$= z^{m-n-1} \cdot z^{n+1}J_{n+1}(z) - (m-n-1)\int_0^z z^{n+1}J_{n+1}(z) \cdot z^{m-n-2}dz$$

$$= z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1)I_{m-1,n+1}.$$

Nhận xét 3.1:

1. Để tính tích phân $I_m = \int_0^z z^m J_m(z)dz$ ta sử dụng liên tiếp công thức truy hồi (3.86) cuối cùng được tích phân dạng (3.85) với $\alpha = 0$.

2. Để tính tích phân $I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)dz$ với $m,\, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ ta sử dụng công thức truy hồi (3.87). Sau mỗi bược truy hồi chỉ số m giảm 1 và chỉ số n tăng 1, do đó khoảng cách $m-n$ giảm 2.

Áp dụng liên tiếp công thức (3.87) ta đưa về công thức (3.86) nếu $m-n$ chẵn và đưa về công thức (3.83) nếu $m-n$ lẻ.

Ví dụ 3.14: *Tính tích phân* $I=\int\limits_0^{\lambda} z^3 J_0\left(z\right)dz$ *theo* $J_1(\lambda)$ *và* λ, *trong đó* λ *là một nghiệm dương của phương trình* $J_0\left(z\right)=0$.

Giải: $I=I_{3,0}\Big|_{z=\lambda}$. Áp dụng công thức (3.87) ta được $I_{3,0}=z^3J_1(z)-2I_{2,1}$

Áp dụng công thức (3.84) ta được $I_{2,1}=\int\limits_0^{z} z^2J_1(z)dz=z^2J_2(z)$

Áp dụng tiếp công thức (3.77) ta có

$$I_{3,0}=z^3J_1(z)-2z^2\left(\frac{2}{z}J_1\left(z\right)-J_0\left(z\right)\right)=(z^3-4z)J_1(z)+2z^2J_0\left(z\right),$$

Do đó

$$I=I_{3,0}\Big|_{z=\lambda}=(z^3-4z)J_1(z)+2z^2J_0\left(z\right)\Big|_{z=\lambda}=(\lambda^3-4\lambda)J_1(\lambda)\,.$$

3.4.4 Các hàm Bessel loại 1 và loại 2 với cấp bán nguyên

Xét phương trình Bessel với cấp bán nguyên $\alpha=\frac{1}{2}$ có dạng:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{1}{4z^2}\right)y=0$$

Bằng cách đặt $y=uz^{-1/2}$ ta có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình vi tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$y=uz^{-1/2}\Rightarrow\frac{dy}{dz}=z^{-1/2}\frac{du}{dz}-\frac{1}{2}z^{-3/2}u\Rightarrow\frac{d^2y}{dz^2}=z^{-1/2}\frac{d^2u}{dz^2}-z^{-3/2}\frac{du}{dz}+\frac{3}{4}z^{-5/2}u\,.$$

Thay vào phương trình ta được

$$\left(z^{-1/2}\frac{d^2u}{dz^2}-z^{-3/2}\frac{du}{dz}+\frac{3}{4}z^{-5/2}u\right)+\frac{1}{z}\left(z^{-1/2}\frac{du}{dz}-\frac{1}{2}z^{-3/2}u\right)+uz^{-1/2}-\frac{1}{4z^2}uz^{-1/2}=0$$

dẫn phương trình về dạng: $\frac{d^2u}{dz^2}+u=0$

Phương trình này cho nghiệm tổng quát

$$u=A\cos z+B\sin z\,;\ \ A,\ B \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình Bessel cấp $\alpha=\frac{1}{2}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{z}}(A\cos z+B\sin z)\,;\ \ A,\ B \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Vì vậy $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ đều có dạng trên với A, B nào đó.

Cụ thể, vì $J_{1/2}(0)=0$ suy ra $A=0$, do đó $J_{1/2}(z)=\frac{B}{\sqrt{z}}\sin z$.

Mặt khác theo công thức (3.56)

$$\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}\Rightarrow\frac{1}{k!\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}}$$

$$J_{1/2}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=\sqrt{\frac{z}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}}.\frac{z^{2k}}{2^{2k}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\Rightarrow B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Do đó

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{3.88}$$

Tương tự, ta có

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \tag{3.89}$$

Từ (3.75) nhận được hàm Bessel loại 2

$$Y_{1/2}(z)=-J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$
$$Y_{-1/2}(z)=J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

Từ công thức truy toán (3.77), thay $\alpha=\frac{1}{2}$ sẽ nhận được:

$$J_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)$$

thay $\alpha=-\frac{1}{2}$ sẽ nhận được:

$$J_{-3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right)$$

Tương tự ta có các công thức sau:

$$J_{5/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z\right\}$$

$$J_{-5/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z+\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right\}$$

$$J_{7/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z}\right)\sin z-\left(\frac{15}{z^2}-1\right)\cos z\right\}$$

$$J_{-7/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(1-\frac{15}{z^2}\right)\sin z-\left(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z}\right)\cos z\right\}$$

$$J_{9/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{105}{z^4}-\frac{45}{z^2}+1\right)\sin z-\left(\frac{105}{z^3}-\frac{10}{z}\right)\cos z\right\}$$

$$J_{-9/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{105}{z^3}-\frac{10}{z}\right)\sin z+\left(\frac{105}{z^4}+\frac{45}{z^2}+1\right)\cos z\right\}.$$

3.4.5 Các tích phân Lommel (*)

Định lý 3.3:

$$\int_0^z J_\alpha\left(kz\right)J_\alpha\left(lz\right)zdz=\frac{z}{k^2-l^2}\left\{kJ_\alpha\left(lz\right)J_{\alpha+1}\left(kz\right)-lJ_\alpha\left(kz\right)J_{\alpha+1}\left(lz\right)\right\},\ k^2\neq l^2. \quad \textbf{(3.90)}$$

$$\int_0^z J_\alpha\left(kz\right)J_\alpha\left(lz\right)zdz=\frac{z}{k^2-l^2}\left\{lJ_{\alpha-1}\left(lz\right)J_\alpha\left(kz\right)-kJ_{\alpha-1}\left(kz\right)J_\alpha\left(lz\right)\right\},\ k^2\neq l^2. \quad \textbf{(3.91)}$$

$$\int_0^z zJ_\alpha^2\left(kz\right)dz=\frac{1}{2}z^2\left\{J'^2_\alpha\left(kz\right)+\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2z^2}\right)J_\alpha^2\left(kz\right)\right\}. \quad \textbf{(3.92)}$$

Các công thức (3.90), (3.91), (3.92) gọi là ***các tích phân Lommel.***

***Chứng minh*:**

Chúng ta xét hai phương trình vi phân dạng Bessel

$$z^2\frac{d^2x}{dz^2}+z\frac{dx}{dz}+(l^2z^2-\alpha^2)x=0 \quad \textbf{(3.93)}$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(k^2z^2-\alpha^2)y=0 \quad \textbf{(3.94)}$$

Nhân phương trình thứ nhất với $\frac{y}{z}$, phương trình thứ hai với $\frac{x}{z}$ rồi trừ từng vế cho nhau sẽ nhận được

$$yz\frac{d^2x}{dz^2}-xz\frac{d^2y}{dz^2}+y\frac{dx}{dz}-x\frac{dy}{dz}=\left(k^2-l^2\right)xyz$$

hay

$$\frac{d}{dz}\left\{z\left(y\frac{dx}{dz}-x\frac{dy}{dz}\right)\right\}=\left(k^2-l^2\right)xyz \quad \textbf{(3.95)}$$

Nghiệm của phương trình (3.93), (3.94) tương ứng là (xem công thức 3.96).

$$x = J_\alpha\left(lz\right),\ y = J_\alpha\left(kz\right)$$

Thay vào (3.95) xét với $\alpha > -1$ sẽ có

$$(k^2 - l^2)\int_0^z J_\alpha(kz).J_\alpha(lz)zdz = z\left\{J_\alpha(kz)\frac{dJ_\alpha(lz)}{dz} - J_\alpha(lz)\frac{dJ_\alpha(kz)}{dz}\right\}$$

Mặt khác

$$\frac{dJ_\alpha(lz)}{dz} = l\frac{dJ_\alpha(lz)}{d(lz)} = lJ'_\alpha(lz)$$

Do đó với $\alpha > -1$. thì

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{lJ_\alpha(kz)J'_\alpha(lz) - kJ_\alpha(lz)J'_\alpha(kz)\right\}$$

Áp dụng các công thức truy toán (3.74)

$$J'_\alpha(kz) = \frac{\alpha}{kz}J_\alpha(kz) - J_{\alpha+1}(kz),\ J'_\alpha(lz) = \frac{\alpha}{lz}J_\alpha(lz) - J_{\alpha+1}(lz)$$

Ta được:

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{kJ_\alpha(lz)J_{\alpha+1}(kz) - lJ_\alpha(kz)J_{\alpha+1}(lz)\right\}$$

Từ các công thức (3.79):

$$J'_\alpha(kz) = -\frac{\alpha}{kz}J_\alpha(kz) + J_{\alpha-1}(kz),\ \ J'_\alpha(lz) = -\frac{\alpha}{lz}J_\alpha(lz) + J_{\alpha-1}(lz).$$

Suy ra:

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{lJ_{\alpha-1}(lz)J_\alpha(kz) - kJ_{\alpha-1}(kz)J_\alpha(lz)\right\}.$$

Với $k = l$ thì

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{k^2}\int_0^{kz} zJ_\alpha^2(z)dz,\ \ (\alpha > -1).$$

Tích phân từng phần nhận được

$$\int_0^{kz} zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{k^2z^2}{2}J_\alpha^2(kz) - \int_0^{kz} z^2J_\alpha(z)J'_\alpha(z)dz$$

Vì $J_\alpha\left(z\right)$ là hàm Bessel nên thoả mãn

$$-z^2J_\alpha(z) = z^2J''_\alpha(z) + zJ'_\alpha(z) - \alpha^2J_\alpha(z)$$

Thay vào trên sẽ có:

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{z^2}{2}J_\alpha^2(kz) + \frac{1}{2k^2}\int_0^{kz} d\left\{z^2 J_\alpha'^2(z)\right\} - \frac{\alpha^2}{2k^2}\int_0^{kz} dJ_\alpha^2(z)$$

Hay

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{2}z^2\left\{J_\alpha'^2(kz) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2z^2}\right)J_\alpha^2(kz)\right\}.$$

3.4.6 Khai triển theo chuỗi các hàm Bessel

3.4.6.1. Nghiệm của hàm Bessel

Chúng ta xét nghiệm của phương trình $J_\alpha\left(x\right) = 0$ với $\alpha > -1$.

Định lý 3.4: *Tất cả các nghiệm của $J_\alpha\left(x\right) = 0$ đều thực.*

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh các số thuần ảo $z_0 = ix$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ không thể là nghiệm của phương trình $J_\alpha\left(x\right) = 0$. Thật vậy, vì rằng tất cả các số hạng của chuỗi sau đây đều dương do đó

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} > 0,\ \forall x \neq 0$$

Suy ra $J_\alpha\left(ix\right) \neq 0, \forall x \neq 0$, hơn nữa .

Giả sử tồn tại nghiệm phức z_0. Vì $J_\alpha\left(x\right)$ là hàm thực nên $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của nó.

Vì $z_0 \notin \mathbb{R}$ và $z_0 \neq ix$, $x \in \mathbb{R}$, do đó $\overline{z}_0^{2} \neq z_0^2$. Áp dụng công thức tích phân Lommel (3.86) ta được:

$$\int_0^x zJ_\alpha(z_0z)J_\alpha(\overline{z}_oz)dz = \frac{x}{\overline{z}_0^2 - z_0^2}\left\{\overline{z}_0J_\alpha(z_0x)J_{\alpha+1}(\overline{z}_0x) - z_0J_\alpha(\overline{z}_0x)J_{\alpha+1}(z_0x)\right\}$$

Lấy $x = 1$ thì

$$\int_0^1 zJ_\alpha(z_0z)J_\alpha(\overline{z}_0z)dz = 0 \text{ (vì } J_\alpha(z_0) = J_\alpha(\overline{z}_0) = 0\text{)}.$$

Điều này vô lý, vì hàm dưới dấu tích phân

$$zJ_\alpha(z_0z)J_\alpha(\overline{z}_0z) = zJ_\alpha(z_0z)J_\alpha(\overline{z_0z}) = zJ_\alpha(z_0z)\overline{J_\alpha(z_0z)} \geq 0,\ \forall z \in [0;1].$$

Vậy mọi nghiệm của phương trình $J_\alpha\left(x\right) = 0$ đều thực.

Định lý 3.5: *Các nghiệm $x > 0$ của $J_\alpha\left(x\right) = 0$ và $J_{\alpha+1}\left(x\right) = 0$ xen kẽ nhau.*

Chứng minh: Từ các công thức (3.81), (3.82) chúng ta nhận được công thức tính đạo hàm sau đây:

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\} = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(x)\right\} = x^{\alpha+1}J_{\alpha}(x)$$

Theo định lý Rolle; công thức thứ nhất chứng tỏ rằng giữa hai nghiệm liên tiếp của $x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)$ có ít nhất một nghiệm của $x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$, công thức thứ hai chứng tỏ giữa hai nghiệm liên tiếp của $x^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(x)$ có ít nhất một nghiệm của $x^{\alpha+1}J_{\alpha}(x)$. Ngoài ra từ các công thức tích phân Lommel (3.91) ta nhận thấy các phương trình $J_{\alpha}\left(x\right)=0$ và $J_{\alpha+1}\left(x\right)=0$ không có nghiệm chung và các nghiệm của phương trình $J_{\alpha}\left(x\right)=0$ đều là nghiệm đơn.

Tương tự suy ra các nghiệm của $J_{\alpha}\left(x\right)=0$ và $J_{\alpha+m}\left(x\right)=0$ cũng xen kẽ nhau, với mọi $m \in \mathbb{N}$ (xem hình 3.12).

Nhận xét 3.2:

a. Hai hàm Bessel loại 1 cấp $\frac{1}{2}$: $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ thỏa mãn $\sqrt{z}J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$ $\sqrt{z}J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos z$; $\forall z > 0$ là những hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, do đó hai hàm Bessel loại 1 cấp $1/2$ $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ có vô số nghiệm dương.

b. Với phương trình Bessel cấp α tùy ý $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + (1 - \frac{\alpha^2}{z^2})y = 0$, bằng cách đặt $y = uz^{-1/2}$ ta có thể đưa về dạng đơn giản hơn

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left[1 - \frac{\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)}{z^2}\right]u = 0.$$

Vì vậy khi z đủ lớn hàm Bessel cấp α xấp xỉ hàm hàm Bessel cấp $\frac{1}{2}$, do đó cũng có vô số nghiệm dương.

3.4.6.2 Khai triển Fourier - Bessel

Định lý 3.6: Dãy hàm

$$\left\{\sqrt{x}J_{\alpha}\left(\lambda_i x\right)\right\}, i = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.92}$$

trực giao trên $\left[0; 1\right]$, trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots$ là nghiệm dương của phương trình $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$.

Chứng minh: Theo công thức tích phân Lommel (3.90)

$$(k^2 - l^2)\int_0^x zJ_\alpha(kz).J_\alpha(lz)dz = x\left\{kJ_\alpha(lx)J_{\alpha+1}(kx) - lJ_\alpha(kx)J_{\alpha+1}(lx)\right\}$$

Lấy $x = 1,\, l = \lambda_i,\, k = \lambda_j;\ i, j = 1,\, 2,\, \ldots$ thì

$$\int_0^1 \sqrt{z}J_\alpha(\lambda_i z).\sqrt{z}J_\alpha(\lambda_j z)dz = 0, \text{ nếu } i \neq j.$$

Từ công thức (3.87)

$$\int_0^x zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{2}x^2\left\{J'^2_\alpha(kx) + (1 - \frac{\alpha^2}{k^2x^2})J_\alpha^2(kx)\right\}.$$

Lấy $x = 1,\, k = \lambda_i;\ i = 1,\, 2,\, \ldots$ sẽ có:

$$\int_0^1 \left\{\sqrt{z}J_\alpha(\lambda_i z)\right\}^2 dz = \frac{1}{2}J'^2_\alpha(\lambda_i) \neq 0.$$

Định nghĩa 3.4: *Nếu hàm số $f(x)$ biểu diễn dưới dạng*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha(\lambda_i x) \qquad \textbf{(3.97)}$$

trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots$ là nghiệm dương của phương trình $J_\alpha(x) = 0$, thì nói rằng hàm số đó được khai triển thành chuỗi Fourier - Bessel.

Từ tính chất trực giao của hệ (3.96) suy ra rằng, nếu $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier - Bessel (3.97) thì các hệ số của chuỗi được tính theo công thức:

$$a_i = \frac{2}{J'^2_\alpha(\lambda_i)}\int_0^1 xf(x)J_\alpha(\lambda_i x)dx;\ i = 1,\, 2,\, \ldots \qquad \textbf{(3.98)}$$

Gọi đó là các hệ số Fourier - Bessel.

Ví dụ 3.15: *Hãy khai triển hai hàm số $f(x)$ sau thành chuỗi Fourier-Bessel trong khoảng $(0;\, 1)$ theo hệ các hàm $\sqrt{x}J_0(\lambda_i x),\ i = 1, 2\ldots$.*

$$f(x) = a_1J_0(\lambda_1 x) + a_2J_0(\lambda_2 x) + \cdots + a_iJ_0(\lambda_i x) + \cdots$$

a. *Hàm số $f(x) = 1;\ 0 \leq x \leq 1$*

b. *Hàm số $f(x) = x^2;\ 0 \leq x \leq 1$.*

Giải:

a. Theo (3.98) và (3.83) sẽ có :

$$a_i = \frac{2}{J'^2_0(\lambda_i)}\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)dx = \frac{2}{\lambda_i^2 J_1^2(\lambda_i)}\int_0^1 \lambda_i x J_0(\lambda_i x)d(\lambda_i x)$$

$$= \frac{2}{\lambda_i^2 J_1^2(\lambda_i)} \int_0^{\lambda_i} x J_0(x) dx = \frac{2}{\lambda_i^2 J_1^2(\lambda_i)} \cdot x J_1(x) \Big|_{x=0}^{\lambda_i} = \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \ ; \ i = 1, 2, ...$$

Vậy $$f(x) = 1 = \frac{2J_0(\lambda_1 x)}{\lambda_1 J_1(\lambda_1)} + \frac{2J_0(\lambda_2 x)}{\lambda_2 J_1(\lambda_2)} + \frac{2J_0(\lambda_3 x)}{\lambda_3 J_1(\lambda_3)} + \cdots + \frac{2J_0(\lambda_i x)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} + \cdots$$

b. Theo (3.98) và đổi biến $u = \lambda_i x$ sẽ có :

$$a_i = \frac{2}{J'^2_0(\lambda_i)} \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_i x) dx = \frac{2}{\lambda_i^4 J_1^2(\lambda_i)} \int_0^{\lambda_i} u^3 J_0(u) du$$

Theo ví dụ 3.14 ta có

$$\int_0^{\lambda_i} u^3 J_0(u) du = I_{3,0}\Big|_{z=\lambda_i} = (z^3 - 4z) J_1(z) + 2z^2 J_0(z)\Big|_{z=0}^{z=\lambda_i} = (\lambda_i^3 - 4\lambda_i) J_1(\lambda_i) + 2\lambda_i^2 J_0(\lambda_i)$$

Áp dụng công thức (3.77) ta được

$$J_0(\lambda_i) = \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) - J_2(\lambda_i) \ ; \ 2\lambda_i^2 J_0(\lambda_i) = 4\lambda_i J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow (\lambda_i^3 - 4\lambda_i) J_1(\lambda_i) + 2\lambda_i^2 J_0(\lambda_i) = \lambda_i^3 J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{2}{\lambda_i^4 J_1^2(\lambda_i)} \left\{ \lambda_i^3 J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2(\lambda_i) \right\} = \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \left\{ 1 - \frac{2J_2(\lambda_i)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \right\}.$$

3.4.7 Các phương trình vi phân có thể đưa về phương trình Bessel (*)

A. Phương trình dạng

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) y = 0$$

Đổi biến $z = kx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = k\frac{dy}{dz}$, tương tự $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 \frac{d^2y}{dz^2}$.

Thay vào phương trình trên dẫn đến phương trình Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) y = 0$$

khi đó nghiệm tổng quát sẽ là:

$$Z_\alpha(kx) = \begin{cases} AJ_\alpha(kx) + BJ_{-\alpha}(kx) & \text{nếu } \alpha \neq n \\ AJ_\alpha(kx) + BY_\alpha(kx) & \text{nếu } \alpha = n \end{cases} \qquad \textbf{(3.95)}$$

Ví dụ 3.16: *Giải phương trình* $y'' + \frac{a}{x} y' + by = 0$, *trong đó* a, b *là hằng số.*

Giải: Đặt

$$y = x^{\alpha}u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\alpha}\frac{du}{dx} + \alpha z^{\alpha-1}u \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = x^{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + 2\alpha x^{\alpha-1}\frac{du}{dx} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}u$$

Thay vào phương trình trên nhận được

$$x^{\alpha}u'' + (a+2\alpha)x^{\alpha-1}u' + \left\{\left[a\alpha + (\alpha-1)\alpha\right]x^{\alpha-2} + bx^{\alpha}\right\}u = 0$$

Chọn $\alpha = \frac{1-a}{2}$ để $a + 2\alpha = 1$; $a + \alpha - 1 = -\alpha$

$$\Rightarrow a\alpha + (\alpha-1)\alpha = (a+\alpha-1)\alpha = -\alpha^2.$$

Chia hai vế cho x^{α} ta được

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Áp dụng công thức (3.99) ta được nghiệm tổng quát

$$y = x^{\frac{|1-a|}{2}} Z_{\frac{|1-a|}{2}}(x\sqrt{b})$$

Ví dụ 3.17: *Giải phương trình* $y'' + \frac{a}{x}y' + (bx^m - \frac{c}{x^2})y = 0$, $(c \geq 0)$.

Giải: Tương tự trên đặt $y = x^{\alpha}u$:

$$x^{\alpha}u'' + (a+2\alpha)x^{\alpha-1}u' + \left\{\left[a\alpha + (\alpha-1)\alpha - c\right]x^{\alpha-2} + bx^{\alpha+m}\right\}u = 0$$

Chọn $\alpha = \frac{1-a}{2}$ và chia cho x^{α} ta được: $u'' + \frac{1}{x}u' + \left(bx^m - \frac{\alpha^2 + c}{x^2}\right)u = 0$

Thay biến $t = x^{\frac{m}{2}+1} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx}\left(\frac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{du}{dt}\right) = \frac{m+2}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}-1}\cdot\frac{du}{dt} + \left(\frac{m+2}{2}\right)^2\cdot\frac{d^2u}{dt^2}$$

Thay vào phương trình và chia cho $\left(\frac{m+2}{2}\right)^2$ ta được

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{du}{dt} + \left(\frac{4b}{(m+2)^2} - \frac{(1-a)^2 + 4c}{(m+2)^2}\frac{1}{t^2}\right)u = 0.$$

Áp dụng công thức (3.99) ta được nghiệm tổng quát

$$u = Z_{\alpha'}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}t\right);\ y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\alpha'}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \text{ với } \alpha' = \frac{\sqrt{(1-a)^2+4c}}{m+2},\ (m \neq -2)$$

Chẳng hạn phương trình: $y'' + \frac{5}{x}y' - 16x^4y = 0$

Có nghiệm $$y = x^{-2}Z_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}ix^3\right)$$

Các trường hợp riêng của ví dụ 3.17:

a. $y'' + \left(bx^m + \frac{C}{x^2}\right)y = 0$ có nghiệm tổng quát dưới dạng:

$$y = \sqrt{x}Z_\alpha\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right),\ \alpha = \frac{\sqrt{1-4C}}{m+2}$$

b. $y'' + \left(b - \frac{p(p+1)}{x^2}\right)y = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x}Z_{p+\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{b}\right).$$

c. $y'' + bx^my = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{m+2}}\left(2\frac{\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right).$$

d. $y'' + bxy = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{b}x^{\frac{3}{2}}\right).$$

e. $y'' + \frac{a}{x}y' + bx^my = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}Z_{\frac{1-a}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right).$$

Ví dụ 3.18: *Giải phương trình* $\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\frac{dy}{dx}\right) + bx^\beta y = 0$.

Giải: $$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\frac{dy}{dx}\right) = x^\alpha\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x^{\alpha-1}\frac{dy}{dx}$$

Thay vào phương trình trên ta được

$$x^{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha x^{\alpha-1}\frac{dy}{dx}+bx^{\beta}y=0$$

Có dạng phương trình e. với $m=\beta-\alpha$ và $a=\alpha$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát

$$y=x^{\frac{1-\alpha}{2}}Z_{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{\beta-\alpha+2}x^{\frac{\beta-\alpha+2}{2}}\right).$$

Nhận xét 3.2: Khi $m=-2,\ c=0$ phương trình trong ví dụ 3.17 dẫn đến phương trình Euler:

$$x^2y''+axy'+by=0$$

Bằng cách đặt $x=e^u$. Ta có $u=\ln x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\end{cases}$$

Thay vào ta nhận được phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$\frac{d^2y}{du^2}+(a-1)\frac{dy}{du}+by=0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình được tìm thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng.

B. Phương trình dạng

$$y''+\left(2a+\frac{1}{x}\right)y'+\left(b+\frac{a}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0 \qquad \textbf{(3.100)}$$

Đặt: $y=e^{-ax}u\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{-ax}\left(-au+\frac{du}{dx}\right)\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-ax}\left(a^2u-2a\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)$

Thay vào phương trình sẽ nhận được

$$e^{-ax}\left(a^2u-2a\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(2a+\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\left(-au+\frac{du}{dx}\right)+\left(b+\frac{a}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)e^{-ax}u=0$$

Chia hai vế cho e^{-ax} và rút gọn ta được

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(b-a^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)u=0. \qquad \textbf{(3.101)}$$

a. Khi $b\neq a^2$ nghiệm tổng quát có dạng:

$$y=e^{-ax}Z_{\alpha}\left\{\sqrt{b-a^2}x\right\}$$

b. Khi $b=a^2$ và $\alpha\neq 0$, (3.101) là phương trình Euler có hai nghiệm độc lập $u_1=x^{\alpha}$ và $u_2=x^{-\alpha}$. Vậy nghiệm tổng quát của (3.100):

$$y=e^{-ax}\left(Ax^{\alpha}+Bx^{-\alpha}\right)\ ;\ A,\ B \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

c. Khi $b=a^2$ và , (3.101) có nghiệm tổng quát $u=A+B\ln x$. Vậy (3.100) có nghiệm tổng quát

$$y=e^{-ax}(A+B\ln x)\ ;\ A,\ B \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

C. Phương trình dạng

$$y''+\left[\frac{1}{x}-2g(x)\right]y'-\left[1-\frac{\alpha^2}{x^2}+g^2(x)-g'(x)-\frac{g(x)}{x}\right]y=0 \qquad \textbf{(3.106)}$$

Nghiệm tổng quát có dạng: $y=e^{\int g(x)dx}Z_{\alpha}(x)$.

Ví dụ 3.19: *Giải phương trình* $y''+\left(\frac{1}{x}-2\tan x\right)y'+\left(\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\tan x}{x}\right)y=0$.

Giải: Phương trình có dạng (3.102) với $g(x)=\tan(x)$.

Áp dụng công thức nghiệm với $e^{\int g(x)dx}=e^{\int \tan(x)dx}=\dfrac{1}{\cos x}$

Ta được nghiệm tổng quát $y=\dfrac{1}{\cos x}Z_{\alpha}(x)$.

Ví dụ 3.20: *Giải phương trình* $y''+\left(\frac{1}{x}+2\cot x\right)y'-\left(\frac{\alpha^2}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)y=0$

Giải: Phương trình có dạng (3.98) với $g(x)=-\cot(x)$.

Áp dụng công thức nghiệm với

Ta được nghiệm tổng quát $y=\dfrac{1}{\sin x}Z_{\alpha}(x)$.

(Xem bài tập trang 320 Advanced Engineering Mathematics)

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1 Hàm Gamma giải tích tại mọi điểm.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.2 Các hàm tích phân mũ, tích phân cosin, tích phân sin có đạo hàm mọi cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.3 Hàm Bessel cấp bán nguyên là hàm sơ cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.4 Các hàm tích phân là các hàm sơ cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.5 Hàm Gama chỉ xác định với mọi số phức $\operatorname{Re} z > 0$.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.6 Hàm Bêta là hàm hai biến.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.7 Hàm Bessel là nghiệm của phương trình Bessel.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.8 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và loại II $Y_\alpha(z)$ luôn luôn độc lập tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.9 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ luôn phụ thuộc tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.10 Nếu hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier-Bessel thì $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.11 Sử dụng định nghĩa của hàm Delta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_3^4 (3x^2+2x-4)\delta(x-3{,}2)dx$ **b.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(6\pi x)\delta(x-1)dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{24\delta(x-2)dx}{x^4+3x^2+2}$ **d.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-i2\pi ft}dt$ **e.** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \eta(x-4)\delta(x-3)dx$.

3.12 Nghiệm lại công thức sau

a. $\mathscr{F}\left\{\eta(t)\sin(2\pi f_0 t)\right\} = \dfrac{f_0}{2\pi(f_0^2-f^2)} + \dfrac{1}{2i}\Big(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\Big)$

b. $\mathscr{F}\left\{\eta(t)\cos(2\pi f_0 t)\right\} = \dfrac{if}{2\pi(f_0^2-f^2)} + \dfrac{1}{2}\Big(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\Big)$

3.13 Tính

a. $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$ **b.** $\dfrac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$ **c.** $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

d. $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ **e.** $\Gamma\left(-\dfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

3.14 Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^6e^{-2x}dx$

3.15 Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy$ **b.** $\int_0^\infty 3^{-4t^2}dt$

3.16 Chứng minh: $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R},\ m > -1$.

3.17 Tính khối lượng của vật thể hình cầu tâm *O* bán kính *R*: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ có khối lượng riêng $\rho(x,y,z) = x^2y^2z^2$.

3.18 Chứng minh công thức tích phân Dirichlet

$$\iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)},$$

Trong đó *V* là hình giới hạn bởi mặt $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$, các mặt phẳng tọa độ và nằm trong góc phần tám thứ nhất. Các hằng số $a,b,c;p,q,r$ dương.

3.19 Tìm khối lượng của vật thể giới hạn bởi với ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ và có khối lượng riêng tỷ lệ với bình phương khoảng cách đến trung tâm của nó.

3.20 Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt có phương trình $x^m + y^m + z^m = a^m,\ m > 0$.

3.21 Xác định tọa độ trọng tâm của vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất và giới hạn bởi mặt có phương trình $x^m + y^m + z^m = a^m,\ m > 0$.

3.22 Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 x^4(1-x^3)dx$ **b.** $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$ **c.** $\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx$

3.23 Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^5 xdx$ **b.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 xdx$ **c.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$

3.24 Chứng minh: $\int_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int_0^{\pi/2} \sin^n xdx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

trong đó (2k+1)!! = 1.3.5...(2k+1). (2k)!! = 2.4.6...(2k).

3.25 $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} 2x dx, \quad p > 0$

a. Chứng minh: I = J

b. Chứng minh: $I = \dfrac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$; $J = \dfrac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$

c. Suy ra công thức nhân đôi của hàm Gamma:

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p).$$

3.26 Áp dụng công thức (3.43), (3.44) chứng minh rằng:

$$\Gamma'\left(1\right) = \int_0^\infty e^{-t}\ln t dt = -\gamma .$$

3.27 Chứng minh rằng:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \Gamma\left(p\right)\Gamma\left(1-p\right)$, $0 < p < 1$.

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+1} = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)$, $p > 1$.

3.28 Tính các tích phân sau

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{x^6+1}$ **c.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}$.

3.29 Chứng minh các công thức truy toán đối với hàm Bessel

1) $\mathrm{z}^{\alpha\text{-n}}J_{\alpha-n}(z) = \dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_\alpha(z))$;

$\mathrm{z}^{-\alpha\text{-n}}J_{\alpha+n}(z) = (-1)^n\dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_\alpha(z))$;

2) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^\alpha J_{\alpha-1}(z)dz = z^\alpha J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$

3) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)dz = -z^{-\alpha} J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$

4) $\displaystyle\int_0^z J_\alpha(z)dz = 2\left\{J_{\alpha+1}(z) + J_{\alpha+3}(z) + \cdots\right\}$

3.30 Sử dụng phép biến đổi Laplace hãy tính: $\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)du$, $(t>0)$.

3.31 Tính các tích phân không xác định:

a. $\int x^n J_{n-1}(x)dx$ **b.** $\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx$ **c.** $\int x^4 J_1(x)dx$

3.32 Tính theo $J_1(x)$ và $J_0(x)$

a. $J_3(x)$ **b.** $\int J_1(\sqrt[3]{x})dx$ **c.** $\int J_0(x)\sin x dx$

3.33 Chứng minh:

a. $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$

b. $J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \cdots = \frac{1}{2}\sin x$.

3.34 Tính tích phân:

a. $\int_0^\infty J_{1/2}(x)dx$ **b.** $\int_0^\infty J_{-1/2}(x)dx$.

3.35 Người ta định nghĩa các hàm Hankel loại 1, loại 2 theo các hàm Bessel như sau:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)\ ;\quad H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x).$$

Chứng minh rằng khi α không phải là số tự nhiên thì

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-i\alpha\pi}J_\alpha(x)}{i\sin\alpha\pi}\quad ;\quad H_\alpha^{(2)}(x) = \frac{e^{i\alpha\pi}J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{i\sin\alpha\pi}.$$

3.36 Người ta định nghĩa các hàm Bessel có hiệu chỉnh loại 1, loại 2 như sau:

$$I_\alpha(x) = e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}J_\alpha(ix)\ ;\ K_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin\alpha\pi}\right) & \text{nếu} \quad \alpha \neq n \\ \lim\limits_{\beta\to n} K_\beta(x) & \text{nếu} \quad \alpha = n \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng $I_\alpha(x),\ K_\alpha(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân:

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\alpha^2)y = 0.$$

b. $I_{\alpha+1}(x) = I_{\alpha-1}(x) - \frac{2\alpha}{x}I_\alpha(x)$.

c. $K_{\alpha+1}(x) = K_{\alpha-1}(x) + \frac{2\alpha}{x}K_\alpha(x)$.

3.37 Chứng tỏ rằng

a. $\frac{1-x^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$, $0 < x < 1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda)=0$.

b. $x^3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(8-\lambda_n^2)J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J'_1(\lambda_n)}$, $0<x<1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda)=0$.

3.38 Chứng minh rằng nếu $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x)$, $0<x<1$; trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda)=0$ thì $\int\limits_0^1 x\big(f(x)\big)^2 dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 J_1^2(\lambda_n)$.

3.39 **a.** Chứng tỏ rằng $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n J_2(\lambda_n)}$, $0<x<1$. Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda)=0$.

b. Sử dụng bài 22. và a. chứng tỏ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^2} = \dfrac{1}{4}$.

3.40 Chứng tỏ rằng phương trình: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+(k^2-\dfrac{\alpha^2}{x^2})y=0$

có nghiệm tổng quát: $y = AJ_\alpha(kx)+BY_\alpha(kx)$

3.41 Giải phương trình : $y''+\dfrac{a}{x}y'+by=0$

3.42 Giải các phương trình sau:

a. $zy''+y'+ay=0$

b. $4zy''+4y'+y=0$

c. $zy''+2y'+2y=0$

d. $y''+z^2y=0$

e. $y''+zy=0$.