CHƯƠNG 2

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

2.1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Nhiều vấn đề trong kỹ thuật, trong ngành điện tử viễn thông, trong lý thuyết mạch … , đưa về bài toán giải các phương trình, hệ phương trình chứa đạo hàm, tích phân của các hàm nào đó, nghĩa là phải giải các phương trình vi phân, tích phân hay phương trình đạo hàm riêng. Việc giải trực tiếp các phương trình này nói chung rất khó. Một trong những phương pháp có hiệu quả để giải các bài toán dạng này là sử dụng phép biến đổi Laplace.

Phép biến đổi Laplace là một tương ứng 1-1 biến các hàm gốc theo biến t thành hàm ảnh theo biến s. Với phép biến đổi này việc tìm hàm gốc thoả mãn các biểu thức chứa đạo hàm, tích phân (nghiệm của phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng…) được quy về tính toán các biểu thức đại số trên các hàm ảnh. Khi biết hàm ảnh, ta sử dụng phép biến đổi ngược để tìm hàm gốc cần tìm. Kỹ sư Oliver Heaviside (1850-1925) là người đầu tiên đã vận dụng phép biến đổi Laplace để giải quyết các bài toán liên quan đến lý thuyết điện từ.

Trong mục này ta giải quyết hai bài toán cơ bản của phép biến đổi Laplace là tìm biến đổi thuận, biến đổi ngược của biến đổi Laplace và một vài ứng dụng của nó.

Các hàm số trong chương này được ký hiệu là $x(t)$, $y(t)$,... thay cho $f(x)$, $g(x)$,... , vì $x(t)$, $y(t)$ được ký hiệu cho các tín hiệu phụ thuộc vào thời gian t.

2.1.1 Phép biến đổi Laplace thuận

2.1.1.1 Định nghĩa biến đổi Laplace

Định nghĩa 2.1: *Giả sử $x(t)$ là hàm số thực xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được định nghĩa và ký hiệu:*

$$\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \tag{2.1}$$

$x(t)$ được gọi là hàm gốc, $X(s)$ được gọi là hàm ảnh của phép biến đổi.

Phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được gọi là tồn tại nếu tích phân (2.1) hội tụ với giá trị s trong miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $x\left(t\right)$ không tồn tại.

Các hàm gốc $x(t)$ thường được xét là các tín hiệu phụ thuộc thời gian t và hàm ảnh tương ứng có biến s thuộc mặt phẳng phức, vì vậy người ta còn nói phép biến đổi Laplace biến miền thời gian thành miền không gian.

Phép biến đổi Laplace là thực hay phức nếu biến số s của hàm ảnh $X(s)$ là thực hay phức.

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các hàm gốc bằng các chữ bé $x(t)$, $y(t)$,... còn các biến đổi của nó bằng các chữ in hoa $X(s)$, $Y(s)$, ... Đôi khi cũng được ký hiệu bởi $\tilde{x}(s)$, $\tilde{y}(s)$,....

2.1.1.2 Điều kiện tồn tại

Định nghĩa 2.2: *Hàm biến thực $x(t)$ được gọi là hàm gốc nếu thoả mãn 3 điều kiện sau:*

1. $x(t)=0$ *với mọi* $t<0$.
2. $x(t)$ *liên tục từng khúc trong miền* $t\geq 0$.

Nghĩa là với mọi khoảng $\left[a\,;b\right]$ trên nửa trục thực $t\geq 0$ hàm chỉ gián đoạn nhiều nhất tại một số hữu hạn các điểm và các điểm gián đoạn là gián đoạn loại 1, nghĩa là hàm có giới hạn trái và giới hạn phải hữu hạn tại các điểm gián đoạn này.

3. $x(t)$ *không tăng nhanh hơn hàm mũ khi* $t\to\infty$.

Nghĩa là tồn tại $M>0,\ \alpha_0\geq 0$ sao cho

$$\left|x(t)\right|\leq Me^{\alpha_0 t},\ \forall\, t>0. \tag{2.2}$$

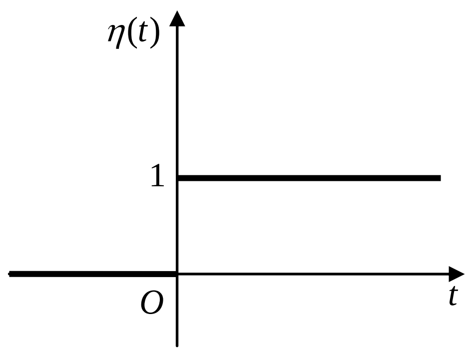
α_0 *được gọi là chỉ số tăng của* $x(t)$.

Rõ ràng α_0 là chỉ số tăng thì mọi số $\alpha_1>\alpha_0$ cũng là chỉ số tăng.

Ví dụ 2.1: Hàm bước nhảy đơn vị (Unit step function)

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ 1 & \text{nếu} \quad t\geq 0\end{cases} \tag{2.3}$$

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ liên tục với mọi $t\geq 0$, không tăng hơn ở mũ và có chỉ số tăng $\alpha_0=0$.



Hình 2.1: *Đồ thị hàm bước nhảy đơn vị*

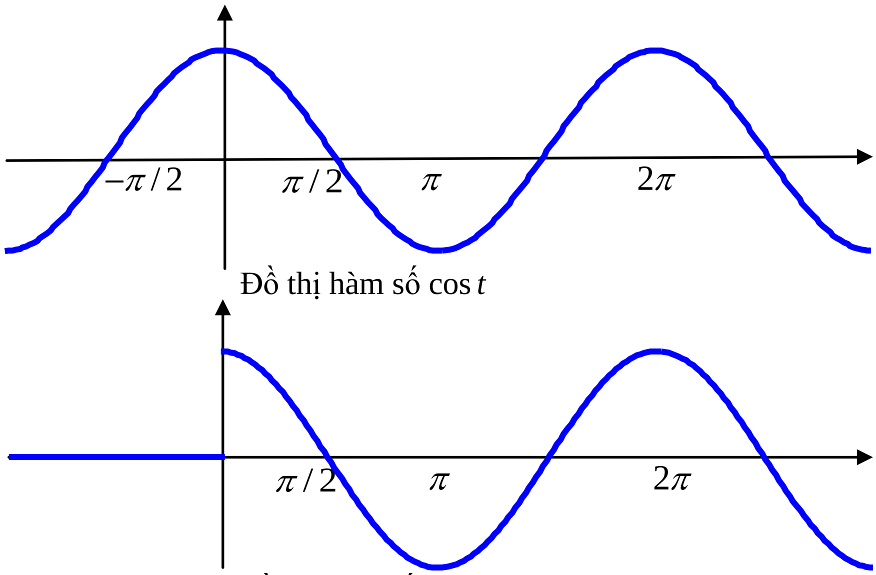
Nhận xét 2.1: Các hàm sơ cấp $x(t)$ là hàm liên tục và không tăng nhanh hơn hàm mũ. Nhưng vẫn chưa phải là hàm gốc vì không thoả mãn điều kiện 1. của định nghĩa 2.2. Tuy nhiên hàm số sau:

$$x(t)\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ x(t) & \text{nếu} \quad t\ge 0\end{cases} \tag{2.4}$$

là một hàm gốc.

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ thường được sử dụng để biểu diễn các hàm thỏa mãn điều kiện ở vế phải của công thức (2.4).

Ví dụ 2.2: Hàm $\cos t$ không phải là hàm gốc vì không thỏa mãn điều kiện 1. của định nghĩa 2.2 (xem Hình 2.2). Hàm $\cos t\eta(t)$ là hàm gốc.



Hình 2.2 Đồ thị hàm số $\eta(t)\cos(t)$

Định lý 2.1: Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì tồn tại biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}=X(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}x(t)dt$$

xác định với mọi số phức $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$ và $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}X(s)=0$.

Hơn nữa hàm ảnh $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ với đạo hàm

$$X'(s)=\int_0^{\infty}(-t)e^{-st}x(t)dt \tag{2.5}$$

Chứng minh: Với mọi $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$, ta có:

và $\int_0^{\infty}e^{(\alpha_0-\alpha)t}dt$ hội tụ.

Do đó tích phân $\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$ hội tụ tuyệt đối nên hội tụ, vì vậy tồn tại biến đổi Laplace.

Ngoài ra $\left|X(s)\right|\le\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-st}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-\alpha t}e^{-i\beta t}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-\alpha t}\right|dt$

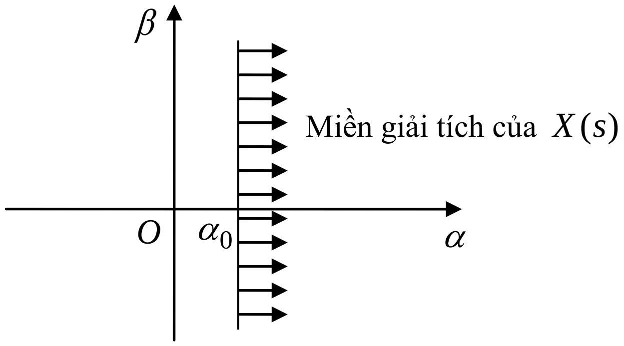
$$\le \int_0^\infty Me^{(\alpha_0-\alpha)t}dt = \left.\frac{Me^{(\alpha_0-\alpha)t}}{\alpha_0-\alpha}\right|_0^\infty = \frac{M}{\alpha-\alpha_0}.$$

Ta có $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{M}{\alpha-\alpha_0}=0$ do đó $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}X(s)=0$. Hơn nữa tích phân $\int\limits_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ hội tụ, tích phân $\int\limits_0^\infty \dfrac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt=\int\limits_0^\infty x(t)e^{-st}(-t)\,dt$ hội tụ đều trong miền $\left\{s\,\middle|\,\mathrm{Re}(s)\ge\alpha_1\right\}$ với mọi α_1 thỏa mãn $\alpha_1>\alpha_0$, do đó hàm ảnh có đạo hàm

$$X'(s)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt=-\int_0^\infty tx(t)e^{-st}\,dt$$

tại mọi s thuộc mọi miền trên (theo định lý Weierstrass).

Vậy $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$.



Hình 2.3: *Miền giải tích của* $X(s)$

Nhận xét 2.2:

1. Theo định lý 2.1 mọi hàm gốc đều có ảnh qua phép biến đổi Laplace. Tên gọi "hàm gốc" là do vai trò của nó trong phép biến đổi này.
2. Điều kiện 1. của định nghĩa hàm gốc phù hợp với các bài toán bắt đầu từ thời điểm $t=0$.
3. Điều kiện 2. của định nghĩa hàm gốc là điều kiện để hàm gốc khả tích trong mọi khoảng.
4. Điều kiện 3. suy ra tích phân suy rộng 2.1 của hàm gốc $x(t)$ hội tụ.
5. Định lý trên chỉ là điều kiện đủ chứ không cần. Chẳng hạn hàm $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ không phải là hàm gốc vì $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{t}}=\infty$, nhưng tích phân $\int\limits_0^\infty\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt=\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt+\int\limits_1^\infty\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt$ tồn tại với mọi s thỏa mãn $\mathrm{Re}(s)>0$.
6. Từ nhận xét 2.1, công thức (2.4), suy ra rằng mọi hàm sơ cấp $x(t)$ đều có biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{x(t)\eta(t)\right\}$. Tuy nhiên, để đơn giản thay vì viết đúng $\mathscr{L}\left\{x(t)\eta(t)\right\}$ thì ta viết tắt $\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$. Chẳng hạn ta viết $\mathscr{L}\left\{\sin t\right\}$ thay cho $\mathscr{L}\left\{\eta(t)\sin t\right\}$, $\mathscr{L}\left\{1\right\}$ thay cho $\mathscr{L}\left\{\eta(t)\right\}$.

7. Ta quy ước các hàm gốc liên tục phải tại 0, nghĩa là $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = x(0)$.

Ví dụ 2.3: Vì hàm $\eta(t)$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi

$$\mathscr{L}\left\{1\right\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty \text{ với mọi } s,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

$$s = \alpha + i\beta,\ \alpha > 0:\quad \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\alpha t - i\beta t}}{-s} + \frac{e^{-s.0}}{s};\ \left|\frac{e^{-\alpha t - i\beta t}}{-s}\right| = \frac{e^{-\alpha t}}{|s|} \to 0 \text{ khi } t\to+\infty.$$

Do đó

$$\mathscr{L}\left\{1\right\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}.$$

Ví dụ 2.4: Hàm $\sin t$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$, do đó biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\left\{\sin t\right\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt \text{ tồn tại với mọi } s,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần và để ý đến điều kiện $\mathrm{Re}(s) > 0$ ta được:

$$X(s) = -\cos t e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty s e^{-st}\cos t\,dt = 1 - \left(s e^{-st}\sin t\Big|_0^\infty\right) - s^2\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow\ (1+s^2)X(s) = 1 \quad\Rightarrow\ X(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

2.1.1.3 Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. Tính tuyến tính

Định lý 2.2: Giả sử $x(t),\ y(t)$ có biến đổi Laplace, khi đó với mọi hằng số *A, B*, $Ax(t) + By(t)$ cũng có biến đổi Laplace và

$$\mathscr{L}\left\{Ax(t) + By(t)\right\} = A\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} + B\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Chứng minh: Nếu hai tích phân của vế phải của đẳng thức sau tồn tại thì tích phân của vế trái cũng tồn tại và có đẳng thức

$$\mathscr{L}\left\{Ax(t) + By(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(Ax(t) + By(t)\right)dt = A\int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt + B\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt.$$

Ví dụ 2.5: $\mathscr{L}\left\{5 + 4\sin t\right\} = 5\mathscr{L}\left\{1\right\} + 4\mathscr{L}\left\{\sin t\right\} = \dfrac{5}{s} + \dfrac{4}{s^2+1}$.

2. Tính đồng dạng

Định lý 2.3: Giả sử $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó với mọi $a > 0$ ta có

$$\mathscr{L}\left\{x(at)\right\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right). \qquad \textbf{(2.7)}$$

Chứng minh: Đổi biến số $u = at$ ta được:

$$\mathscr{L}\left\{x(at)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}x(at)\,dt = \int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}}x(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right).$$

Ví dụ 2.6: $\mathscr{L}\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2+1} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

$$\mathscr{L}\left\{\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right\} = \frac{\omega}{s^2+4\omega^2}.$$

3. Tính dịch chuyển ảnh

Định lý 2.4: Giả sử $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó với mọi $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}x(t)\right\} = X\left(s-a\right). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Chứng minh: $\mathscr{L}\left\{e^{at}x(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}x(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}x(t)\,dt = X\left(s-a\right).$

Ví dụ 2.7:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\sin\omega t\right\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{at}\cdot 1\right\} = \frac{1}{s-a},$$

$$\mathscr{L}\left\{\cosh\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2-\omega^2},$$

$$\mathscr{L}\left\{\sinh\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

$$\mathscr{L}\left\{\sinh at\sin\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\sin\omega t\right\} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}.$$

4. Tính trễ

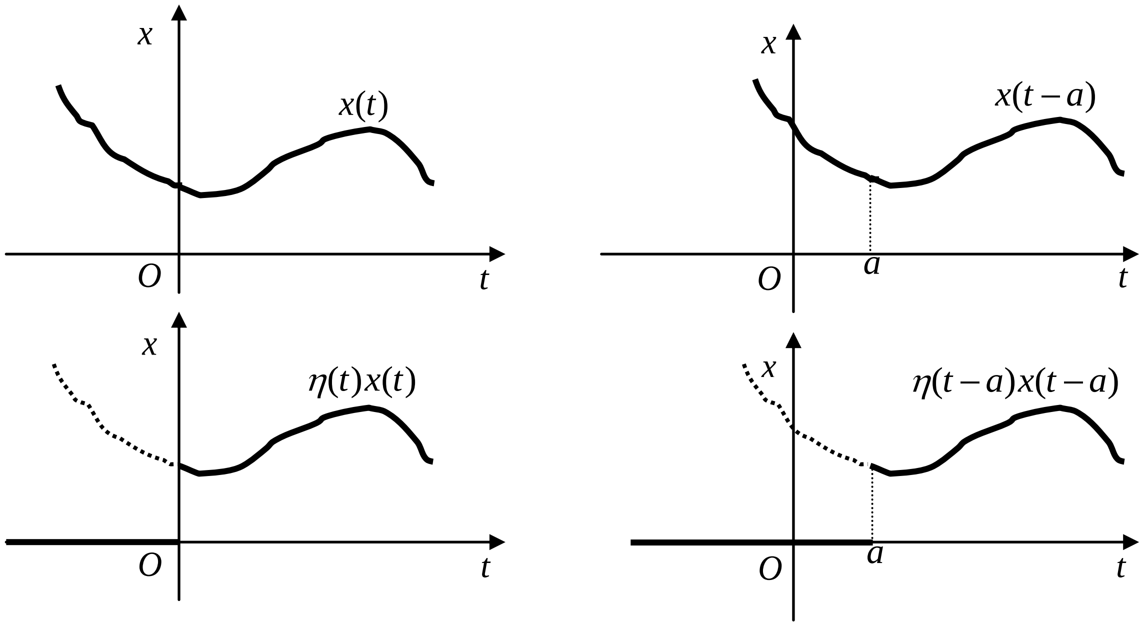
Định lý 2.5: Giả sử $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó với mọi $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$:

$$\mathscr{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = e^{-sa}X\left(s\right). \qquad \textbf{(2.9)}$$

Chứng minh: $\mathscr{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\eta(t-a)x(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}x(t-a)\,dt.$

Đổi biến số $u = t-a$, ta được

$$\mathscr{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = \int_a^\infty e^{-st}x(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}x(u)\,du = e^{-as}X(s).$$



Hình 2.4: Đồ thị hàm trễ

Đồ thị của hàm $\eta(t-a)x(t-a)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của $\eta(t)x(t)$ dọc theo trục hoành một đoạn bằng a. Nếu $x(t)$ biểu diễn tín hiệu theo thời gian t thì $x(t-a)$ biểu diễn trễ a đơn vị thời gian của quá trình trên.

Ví dụ 2.8: $\mathscr{L}\left\{\eta(t-a)\right\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$.

Ví dụ 2.9: Hàm xung (Impulse) là hàm chỉ khác không trong một khoảng thời gian nào đó.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < a \\ \varphi(t) & \text{nếu} \quad a < t < b \\ 0 & \text{nếu} \quad t > b \end{cases} \tag{2.10}$$

Hàm xung đơn vị trên đoạn $\left[a\,;b\right]$ được ký hiệu và xác định như sau:

$$\eta_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < a \\ 1 & \text{nếu} \quad a < t < b \\ 0 & \text{nếu} \quad t > b \end{cases} = \eta(t-a) - \eta(t-b) \tag{2.11}$$

Hàm xung bất kỳ (2.10) có thể biểu diễn qua hàm xung đơn vị

$$x(t) = \eta(t-a)\varphi(t) - \eta(t-b)\varphi(t) = \eta_{a,b}(t)\varphi(t) \tag{2.12}$$

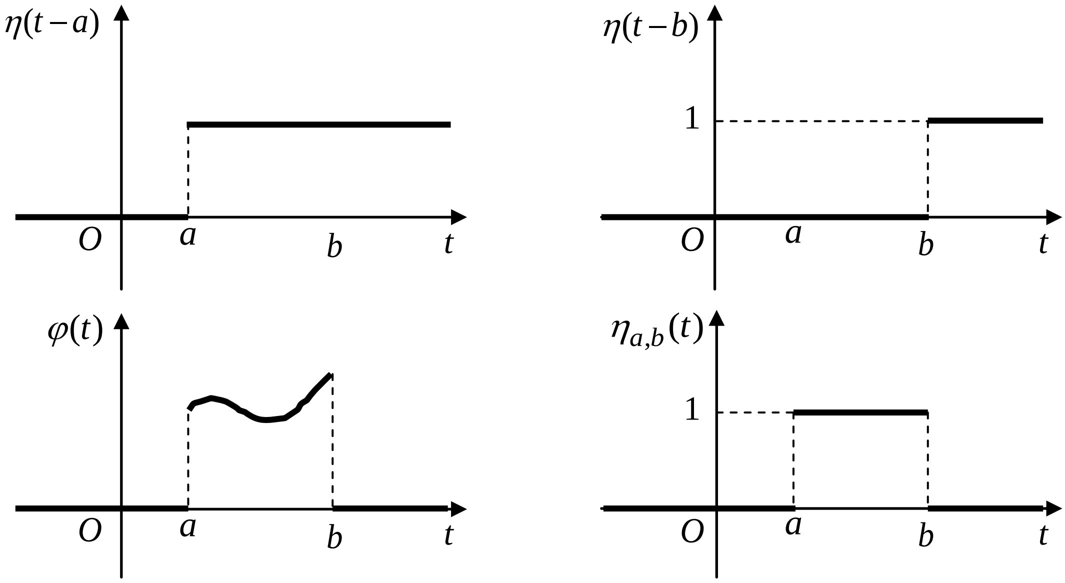
$$\mathscr{L}\left\{\eta_{a,b}(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\eta(t-a)\right\} - \mathscr{L}\left\{\eta(t-a)\right\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

Ví dụ 2.10: Tìm biến đổi Laplace của hàm xung $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ \sin t & \text{nếu} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nếu} \quad t > \pi \end{cases}$

Theo công thức (2.12) ta có thể viết

$$x(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t-\pi)\sin t = \eta(t)\sin t + \eta(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

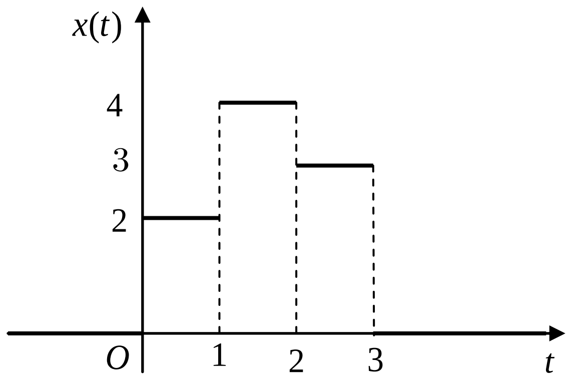
Vậy $\quad \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$.



Hình 2.5: Đồ thị hàm xung

Ví dụ 2.11: Tìm biến đổi Laplace của hàm bậc thang

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \;\text{ hoặc }\; t > 3 \\ 2 & \text{nếu} \quad 0 < t < 1 \\ 4 & \text{nếu} \quad 1 < t < 2 \\ 3 & \text{nếu} \quad 2 < t < 3 \end{cases}$$



Hình 2.6: Đồ thị hàm bậc thang

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\eta_{0,1}(t) + 4\eta_{1,2}(t) + 3\eta_{2,3}(t) \\ &= 2\left[\eta(t) - \eta(t-1)\right] + 4\left[2\eta(t-1) - \eta(t-2)\right] + 3\left[\eta(t-2) - \eta(t-3)\right] \\ &= 2\eta(t) + 2\eta(t-1) - \eta(t-2) - 3\eta(t-3). \end{aligned}$$

Do đó $\quad \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \dfrac{2 + 2e^{-s} - e^{-2s} - 3e^{-3s}}{s}$.

5. Biến đổi của đạo hàm

Định lý 2.6: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc, đặt $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$ khi đó ta có

$$\mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = sX\left(s\right) - x(0). \qquad \textbf{(2.13)}$$

Tổng quát hơn, nếu $x(t)$ có đạo hàm đến cấp n cũng là hàm gốc thì

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\} = s^n X\left(s\right) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0). \quad \textbf{(2.14)}$$

Chứng minh: Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$$\mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}x'(t)\,dt = e^{-st}x(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-st}x(t)\,dt = sX\left(s\right) - x(0).$$

Công thức (2.14) được chứng minh quy nạp từ công thức (2.13).

Ví dụ 2.12: $\mathscr{L}\left\{\cos\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)'\right\} = \dfrac{1}{\omega}\cdot s\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} - \sin 0 = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}.$

$$\mathscr{L}\left\{\cos^2\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega t)\right)\right\} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4\omega^2)};$$

$$\mathscr{L}\left\{\sin^2\omega t\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)\right\} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4\omega^2)}.$$

Hệ quả 2.1: Với giả thiết của định lý 2.6 ta có $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s) = x(0)$.

Chứng minh: Áp dụng định lý 2.1 cho đạo hàm $x'(t)$ ta có $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s) - x(0) = 0$.

6. Biến đổi Laplace của tích phân

Định lý 2.7: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó hàm số $\varphi(t) = \int_0^t x(u)du$ cũng là hàm gốc và

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \frac{X\left(s\right)}{s}. \quad \textbf{(2.15)}$$

Chứng minh: Hàm $\phi(t)$ có đạo hàm là $x(t)$ liên tục từng khúc nên cũng liên tục từng khúc.

$$\left|\varphi(t)\right| = \left|\int_0^t x(u)du\right| \le \int_0^t \left|x(u)\right|du \le \int_0^t Me^{\alpha_0 u}du = \frac{Me^{\alpha_0 u}}{\alpha_0}\Bigg|_0^t \le \frac{Me^{\alpha_0 t}}{\alpha_0}.$$

Vậy $\varphi(t)$ là hàm gốc có cùng chỉ số tăng với $x(t)$ và $\varphi(0)=0$. Từ công thức (2.13) ta có

$$X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = s\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} - \varphi(0) \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$

Ví dụ 2.13: Tìm biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \sinh(3u)\sin(\omega u)du\right\}$.

Theo ví dụ 2.7 ta có $\mathscr{L}\left\{\sinh(3t)\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega/2}{(s-3)^2+\omega^2} - \dfrac{\omega/2}{(s+3)^2+\omega^2}$.

Từ công thức (2.15) suy ra

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \sinh(3u)\sin(\omega u)du\right\} = \frac{\omega}{2s}\left(\frac{1}{(s-3)^2+\omega^2} - \frac{1}{(s+3)^2+\omega^2}\right).$$

7. Đạo hàm ảnh

Định lý 2.8: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc có $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó

$$\mathscr{L}\left\{t^n x(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s). \tag{2.16}$$

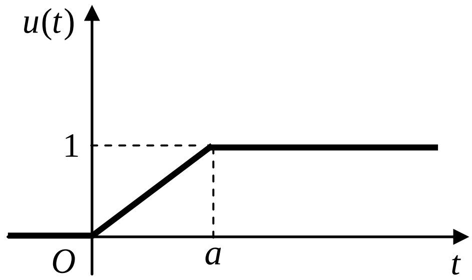
Chứng minh: Theo định lý 2.1 hàm $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ nên có đạo hàm mọi cấp trong miền này. Từ công thức (2.5) ta có $\mathscr{L}\left\{tx(t)\right\} = -X'(s)$.

Áp dụng liên tiếp công thức này ta được công thức (2.16).

Ví dụ 2.14: $\mathrm{L}\left\{t^n\right\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s}\right) = (-1)^n \dfrac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Ví dụ 2.15: Hàm dốc

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ \dfrac{t}{a} & \text{nếu} \quad 0 \le t \le a \\ 1 & \text{nếu} \quad t \ge a \end{cases}$$



Hình 2.7: Đồ thị hàm dốc

$$u(t) = \frac{t}{a}\eta_{0a}(t) + \eta(t-a)$$

$$= \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t}{a}\eta(t-a) + \eta(t-a) = \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a).$$

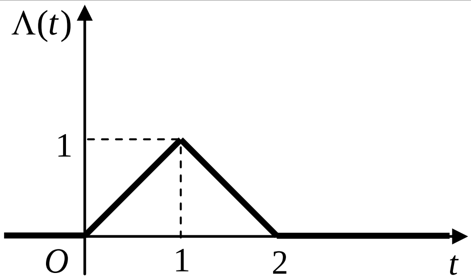
$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as^2} = \frac{1-e^{-as}}{as^2}.$$

Ví dụ 2.16: Hàm xung tam giác đơn vị $\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ t & \text{nếu} \quad 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{nếu} \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{nếu} \quad t > 2 \end{cases}$

$$\Lambda(t) = t\left[\eta(t) - \eta(t-1)\right] + (2-t)\left[\eta(t-1) - \eta(t-2)\right]$$

$$= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2).$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\Lambda(t)\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{\left(e^{-s}-1\right)^2}{s^2}.$$



Hình 2.8: Đồ thị xung tam giác đơn vị

8. Tích phân ảnh

Định lý 2.9: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc và $\dfrac{x(t)}{t}$ cũng là một hàm gốc (chẳng hạn $x(t)$ là một hàm gốc và tồn tai $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{x(t)}{t}$ hữu hạn). Đặt $X(s)=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\},\ s\in\mathbb{R}$, khi đó

$$\mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)du. \qquad \textbf{(2.17)}$$

Chứng minh: Đặt $Y(s)=\mathscr{L}\left\{\dfrac{x(t)}{t}\right\},\ s\in\mathbb{R}$. Từ công thức (2.15) ta có $\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = -Y'\left(s\right)$.

Mặt khác $\lim\limits_{s\to\infty} Y(s)=0 \Rightarrow\ Y(s) = -\displaystyle\int_s^{\infty} Y'(u)du = \int_s^{\infty} X(u)du$.

Ví dụ 2.17: Vì $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$ và $\mathscr{L}\left\{\sin t\right\} = \dfrac{1}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \arctan u\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}.$$

Hàm tích phân sin (xem công thức 3.24 chương 3):

$$\mathrm{Si}\, t = \int_0^t \frac{\sin u}{u}du,\ \ t>0$$

có biến đổi Laplace
$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}.$$

Ví dụ 2.18: Hàm $\cos t$ là một hàm gốc nhưng $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos t}{t}=+\infty$, do đó không tồn tại biến đổi Laplace của $\dfrac{\cos t}{t}$. Tuy nhiên hàm $\dfrac{1-\cos at}{t}$ cũng là hàm gốc, có biến đổi Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1-\cos at}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+a^2}\right)du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)\Bigg|_{u=s}^{\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \ln 1 - \ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{s}\right).$$

Tương tự $\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u-b}\right)du = \ln\left(\frac{u-a}{u-b}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \ln\left(\frac{s-b}{s-a}\right).$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{u}{u^2+a^2}-\frac{u}{u^2+b^2}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right).$$

9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Định lý 2.10: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$, khi đó

$$X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Chứng minh: $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \int_0^T e^{-st}x(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st}x(t)dt.$

Đổi biến số $t = T+u$ đối với tích phân thứ hai của vế phải ta có

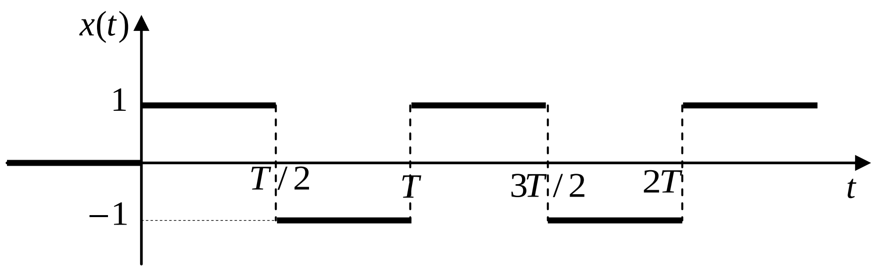
$$\int_T^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(T+u)}x(T+u)du = e^{-sT}\int_0^{\infty} e^{-su}x(u)du$$

Do đó $X(s) = \displaystyle\int_0^T e^{-st}x(t)dt + e^{-sT}X(s) \;\Rightarrow\; X(s) = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}.$

Ví dụ 2.19: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ hình 2.9

$$\int_0^T e^{-st}x(t)dt = \int_0^{T/2} e^{-st}dt - \int_{T/2}^{T} e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{T/2} - \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{T/2}^{T} = \frac{\left(e^{-sT/2}-1\right)^2}{s}.$$

$$\Rightarrow\; X(s) = \frac{\left(e^{-sT/2}-1\right)^2}{s\left(1-e^{-sT}\right)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{sT}{4}}-e^{-\frac{sT}{4}}}{e^{\frac{sT}{4}}+e^{-\frac{sT}{4}}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\sinh\frac{sT}{4}}{\cosh\frac{sT}{4}} = \frac{1}{s}\cdot\tanh\frac{sT}{4}.$$



Hình 2.9: Đồ thị của hàm gốc tuần hoàn

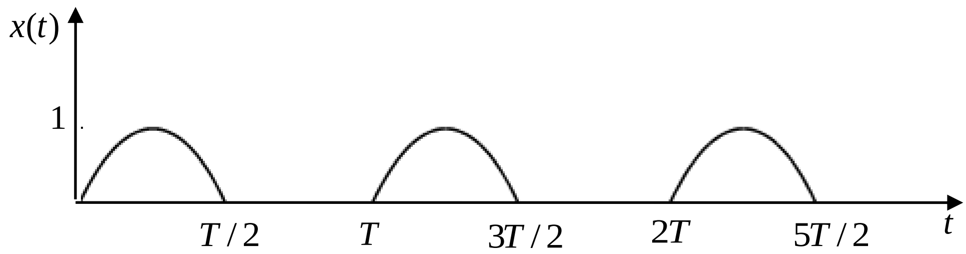
Trường hợp hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ có biên độ h có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t)=\begin{cases} h & \text{nếu } \ 0<t<T/2 \\ -h & \text{nếu } \ T/2<t<T \end{cases}$$

Bằng cách áp dụng tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace vào kết quả trên ta được hàm ảnh tương ứng là $X(s)=\dfrac{h}{s}\cdot\tanh\dfrac{sT}{4}$.

Ví dụ 2.20: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ (xem đồ thị hình 2.9) có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) & \text{nếu } \ 0<t<T/2 \\ 0 & \text{nếu } \ T/2<t<T \end{cases}$$



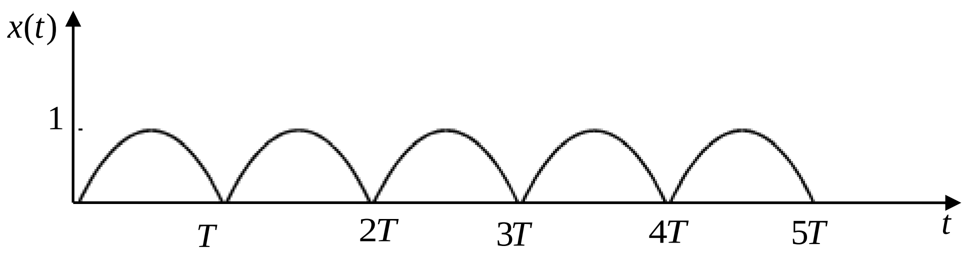
Hình 2.10*: Đồ thị tách nửa sóng* (ví dụ 2.20)

$$\int_0^T e^{-st}x(t)dt=\int_0^{T/2} e^{-st}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\left(1+e^{-sT/2}\right)$$

$$X(s)=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\cdot\frac{1+e^{-sT/2}}{1-e^{-sT}}=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-sT/2}}.$$

Ví dụ 2.21: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ (xem đồ thị hình 2.11) có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t)=\left|\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right|,\ 0<t<T$$



Hình 2.11*: Đồ thị tách sóng hoàn toàn* (ví dụ 2.21)

$$\int_0^T e^{-st}x(t)dt = \int_0^T e^{-st}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt = \frac{\pi T}{s^2T^2+\pi^2}\left(1+e^{-sT}\right)$$

$$X(s) = \frac{\pi T}{s^2T^2+\pi^2}\cdot\frac{1+e^{-sT}}{1-e^{-sT}} = \frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\cdot\coth\frac{sT}{2}.$$

10. Ảnh của tích chập

Định nghĩa 2.3: *Tích chập của hai hàm số* $x(t)$, $y(t)$ *là hàm số được ký hiệu và xác định bởi công thức*

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du \qquad \textbf{(2.19)}$$

Tích chập của của hai dãy số được định nghĩa theo công thức (1.119), chương 1.

Tính chất 2.1:

♦ Nếu $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc thì $x(t)*y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du$

♦ $x(t)*y(t) = y(t)*x(t)$ *(tích chập có tính giao hoán)*

♦ Nếu $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc thì tích chập của chúng $x(t)*y(t)$ cũng là hàm gốc.

Chứng minh:

♦ $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc do đó $x(u)y(t-u)=0$ khi $u<0$ hoặc $u>t$

Vì vậy

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x(u)y(t-u)du + \int_0^t x(u)y(t-u)du + \int_t^{\infty} x(u)y(t-u)du = \int_0^t x(u)y(t-u)du\,.$$

♦ Đổi biến số $v = t-u$

$$x(t)*y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du = -\int_t^0 x(t-v)y(v)dv = \int_0^t x(t-v)y(v)dv = y(t)*x(t)\,.$$

♦ Giả sử $\left|x(t)\right| \le M_1e^{\alpha_1 t}$, $\left|y(t)\right| \le M_2e^{\alpha_2 t}$. Đặt $\alpha_0 = \max\left\{\alpha_1,\alpha_2\right\}$, $\forall u\in\left[0;t\right]$:

$$\left|x(u)y(t-u)\right| \le M_1e^{\alpha_0 u}M_2e^{\alpha_0(t-u)} = M_1M_2e^{\alpha_0 t}$$

$$\left|\int_0^t x(u)y(t-u)du\right| \le M_1M_2\int_0^t e^{\alpha_0 t}du = M_1M_2te^{\alpha_0 t} \le M_1M_2e^{(\alpha_0+1)t}\,.$$

Vậy $x(t)*y(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0+1.

Ví dụ 2.22: Tìm tích chập của hai hàm gốc sau:

a. $\cos(t)$ và $\sin(t)$,

b. t^2 và $\sin(t)$.

Giải: **a.** $\cos(t)*\sin(t)=\int_0^t \cos(u)\sin(t-u)du=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin(t)+\sin(t-2u)\right]du$

$$=\frac{1}{2}\sin(t)u\Big|_{u=0}^{t}+\frac{1}{4}\cos(t-2u)\Big|_{u=0}^{t}=\frac{1}{2}t\sin(t).$$

b. $t^2*\sin(t)=\int_0^t (t-u)^2\sin(u)du=-(t-u)^2\cos(u)\Big|_{u=0}^{t}-2\int_0^t (t-u)\cos(u)du$

$$=t^2-2(t-u)\sin(u)\Big|_{u=0}^{t}-2\int_0^t \sin(u)du=t^2+2\cos t-2.$$

Ví dụ 2.23: Tìm tích chập của hàm gốc $\eta(t)e^t$ và hàm gián đoạn $\eta(t-1)-\eta(t-2)$.

$$e^t*\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]=\int_0^t e^{t-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du=e^t\int_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du$$

Hàm dưới dấu tích phân của tích phân $\int_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du$ phụ thuộc t và ta có các trường hợp sau:

- Nếu $t<1$ thì $\int_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du=0$,
- Nếu $1<t<2$ thì $e^t\int_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du=e^t\int_1^t e^{-u}du=e^{t-1}-1$
- Nếu $t>2$ thì $e^t\int_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1)-\eta(u-2)\right]du=e^t\int_1^2 e^{-u}du=e^{t-1}-e^{t-2}$

Vậy
$$e^t*\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<1\\ e^{t-1}-1 & \text{nếu } 1<t<2\\ e^{t-1}-e^{t-2} & \text{nếu } t>2\end{cases}$$

Sử dụng công thức 2.11 ta có

$$e^t*\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]=\left(e^{t-1}-1\right)\left(\eta(t-1)-\eta(t-2)\right)+\left(e^{t-1}-e^{t-2}\right)\eta(t-2)$$
$$=\left(e^{t-1}-1\right)\eta(t-1)-\left(e^{t-2}-1\right)\eta(t-2).$$

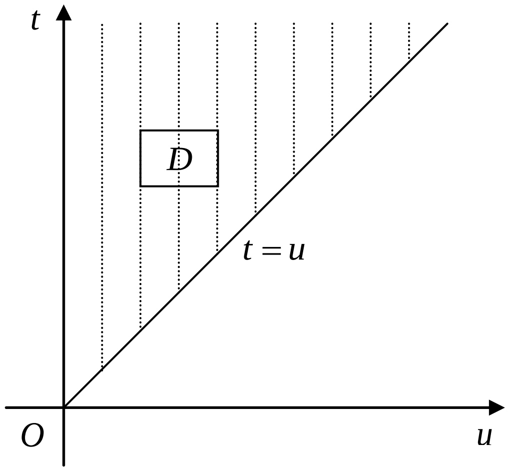
Định lý 2.11: Giả sử $X(s)=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, $Y(s)=\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$, khi đó ta có

$$\mathscr{L}\left\{x(t)*y(t)\right\}=X(s)Y(s) \qquad \textbf{(2.20)}$$

Ngoài ra nếu $x'(t),\ y'(t)$ cũng là hàm gốc thì ta có ***công thức Duhamel***:

$$\mathscr{L}\left\{x(0)y(t)+x'(t)*y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{x(t)y(0)+x(t)*y'(t)\right\}=sX(s)Y(s) \qquad \textbf{(2.21)}$$

Chứng minh: Xét miền D cho trong hình 2.12.



Hình 2.12:

Sử dụng phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân ta được

$$\mathscr{L}\left\{x(t)*y(t)\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\left(\int_0^{t}x(u)y(t-u)du\right)dt=\iint_D e^{-st}x(u)y(t-u)dtdu$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\int_u^{\infty}e^{-st}x(u)y(t-u)dt\right)du$$

Đổi biến số $v=t-u \ \Rightarrow \ dv=dt$

$$\mathscr{L}\left\{x(t)*y(t)\right\}=\int_0^{\infty}\left(\int_u^{\infty}e^{-st}x(u)y(t-u)dt\right)du=\int_0^{\infty}e^{-su}x(u)du\int_0^{\infty}e^{-sv}y(v)dv=X(s)Y(s).$$

Để chứng minh công thức (1.21) ta sử dụng công thức (2.6), (2.13) và (2.20):

$$\mathscr{L}\left\{x(0)y(t)+x'(t)*y(t)\right\}=x(0)Y(s)+\big(sX(s)-x(0)\big)Y(s)=sX(s)Y(s).$$

Ví dụ 2.24: Ta có thể nghiệm lại công thức 2.20 qua các ví dụ 2.22, 2.23 như sau:

$$\mathscr{L}\left\{\cos(t)*\sin(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{\cos(t)\right\}\mathscr{L}\left\{\sin(t)\right\}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{s}{(s^2+1)^2},$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2*\sin(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{t^2\right\}\mathscr{L}\left\{\sin(t)\right\}=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{2}{(s^2+1)s^3},$$

$$\mathscr{L}\left\{e^t*\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]\right\}=\mathscr{L}\left\{e^t\right\}\mathscr{L}\left\{\eta(t-1)-\eta(t-2)\right\}=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s-1)}$$

Ta cũng có $$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}t\sin(t)\right\}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=\frac{s}{(s^2+1)^2},$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2+2\cos t-2\right\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}=\frac{2}{(s^2+1)s^3},$$

$$\mathscr{L}\left\{\left(e^{t-1}-1\right)\eta(t-1)-\left(e^{t-2}-1\right)\eta(t-2)\right\}=\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s-1)}.$$

Nhận xét: Nếu hàm gốc có dạng tích phân thì ta cần xét hai trường hợp sau:

♦ Hàm dưới dấu tích phân không chứa biến t, nghĩa là có dạng $\varphi(t)=\int\limits_0^t x(u)du$, khi đó ta sử dụng tích chất biến đổi Laplace của tích phân $\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t x(u)du\right\}=\dfrac{X(s)}{s}$.

♦ Hàm dưới dấu tích phân chứa biến t, nghĩa là có dạng $\int\limits_0^t x(u)y(t-u)du$, khi đó ta sử dụng tích chất biến đổi Laplace của tích chập $\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t x(u)y(t-u)du\right\}=X(s)Y(s)$.

Ví dụ 2.25:

a) $\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right\}=\ln\left(\dfrac{s-b}{s-a}\right)\Rightarrow\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t\dfrac{e^{au}-e^{bu}}{u}du\right\}=\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s-b}{s-a}\right)$.

b) $\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t\sinh 2u\cos 3(t-u)du\right\}=\mathscr{L}\left\{\sinh 2t*\cos 3t\right\}=\dfrac{2}{s^2-4}\cdot\dfrac{s}{s^2+9}$.

2.1.2 Phép biến đổi Laplace ngược

Sử dụng tính chất của phép biến đổi Laplace ta có thể đưa các bài toán liên quan đến đạo hàm, tích phân của các hàm gốc về bài toán đại số của các hàm ảnh tương ứng. Khi đã nhận được nghiệm của hàm ảnh ta cần tìm nghiệm của hàm gốc tương ứng. Nói cách khác: cho hàm ảnh tìm hàm gốc tương ứng, đó là phép biến đổi Laplace ngược.

Trong mục này ta sẽ chỉ ra những điều kiện để một hàm nào đó là hàm ảnh, nghĩa là tồn tại hàm gốc của nó, khẳng định hàm gốc nếu tồn tại là duy nhất và giới thiệu một vài phương pháp tìm hàm gốc.

Định nghĩa 2.4: *Cho hàm $X(s)$, nếu tồn tại $x(t)$ sao cho $\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}=X(s)$ thì ta nói $x(t)$ là biến đổi ngược của $X(s)$, ký hiệu $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$.*

2.1.2.1 Tính duy nhất của biến đổi ngược

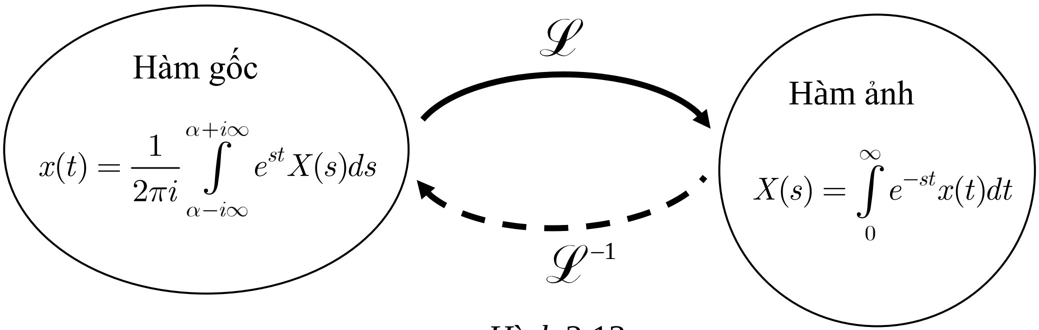
Định lý 2.13: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và $\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}=X(s)$, khi đó tại mọi điểm liên tục t của hàm $x(t)$ ta có:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} X(s) ds \tag{2.22}$$

trong đó tích phân ở vế phải được lấy trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ theo hướng từ dưới lên, với α là số thực bất kỳ lớn hơn α_0.

Công thức (2.22) *được gọi là **công thức tích phân Bromwich**.*

Công thức Bromwich cho thấy biến đổi Laplace ngược nếu tồn tại thì duy nhất.



Hình 2.13

Ví dụ 2.26: $\mathscr{L}\left\{t * \sin t\right\} = \mathscr{L}\left\{t\right\} \cdot \mathscr{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$

$$= \frac{1}{s^2\left(s^2 + 1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} = \mathscr{L}\left\{t - \sin t\right\}.$$

$$\mathscr{L}\left\{t * \cos t\right\} = \mathscr{L}\left\{t\right\} \cdot \mathscr{L}\left\{\cos t\right\} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = s \cdot \frac{1}{s^2\left(s^2 + 1\right)} = s \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} = \mathscr{L}\left\{1 - \cos t\right\}.$$

Do tính duy nhất của biến đổi ngược (định lý 2.13) ta suy ra:

$$t * \sin t = t - \sin t; \quad t * \cos t = 1 - \cos t.$$

2.1.2.2 Điều kiện đủ để một hàm có biến đổi ngược

Định lý 2.1 cho thấy không phải mọi hàm phức giải tích nào cũng có biến đổi ngược. Chẳng hạn hàm $X(s) = s^2$ không thể là ảnh của hàm gốc nào vì $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s) \to \infty} X(s) = \infty$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để hàm giải tích có biến đổi ngược

Định lý 2.14: Giả sử hàm phức $X(s)$ thoả mãn 3 điều kiện sau:

1. $X(s)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$,
2. $\left|X(s)\right| \le M_R$ với mọi s thuộc đường tròn $\left|s\right| = M_R$ và $\lim\limits_{R \to \infty} M_R = 0$,
3. Tích phân $\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} X(s) ds$ hội tụ tuyệt đối.

Khi đó $X(s)$ có biến đổi ngược là hàm gốc $x(t)$ cho bởi công thức (2.22).

Độc giả có thể tìm hiểu chứng minh Định lý 2.13, Định lý 2.14 trong Phụ lục C của [5] hoặc Định lý 2.1 trang 29 của [11].

2.1.2.3 Một vài phương pháp tìm hàm ngược

A. *Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược*

Từ tính duy nhất của biến đổi ngược, ta suy ra rằng tương ứng giữa hàm gốc và hàm ảnh là tương ứng 1-1 . Vì vậy ta có thể áp dụng các tính chất đã biết của phép biến đổi thuận để tìm hàm ngược bằng cách đọc ngược lại các tính chất trên.

Chẳng hạn nếu $\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = x(t)$ thì

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s-a)\right\} = e^{at}x(t), \qquad \text{(dịch chuyển ảnh)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}X(s)\right\} = x(t-a)\eta(t-a), \quad \text{(trễ)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\} = \int_0^t x(u)du, \qquad \text{(biến đổi của tích thân)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-X'(s)\right\} = tx(t) \qquad \text{(nhân với } t\text{)}$$

… … …

Ví dụ 2.27: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^6}\right\} = e^{-4t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^6}\right\} = e^{-4t}\dfrac{t^5}{5!}$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{5-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5e^{-4(t-3)}\frac{(t-3)^5}{5!}\eta(t-3).$$

Ví dụ 2.28: $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)'$ và $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$, do đó

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a}t\sin(at).$$

Ví dụ 2.29: Tìm $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\}$.

Giải: Đặt $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\}$, nghĩa là $\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \ln\dfrac{s+a}{s-b}$.

Từ kết quả $\mathscr{L}\left\{tx(t)\right\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right) = -\dfrac{d}{ds}\ln(s+a) + \dfrac{d}{ds}\ln(s-b) = \dfrac{1}{s-b} - \dfrac{1}{s+a}$

Suy ra $tx(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-b} - \dfrac{1}{s+a}\right\} = e^{bt} - e^{-at}$.

Vậy $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\} = \dfrac{e^{bt} - e^{-at}}{t}$.

Cũng với phương pháp này ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}\right\} = \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}\right\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-a^2} - \frac{2s}{s^2}\right\} = \frac{2}{t}(1-\cosh at).$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}\right\} = \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}\right\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+a^2} - \frac{2s}{s^2}\right\} = \frac{2}{t}(1-\cos at).$$

B. *Khai triển thành chuỗi lũy thừa*

Nếu $X(s) = \dfrac{a_0}{s} + \dfrac{a_1}{s^2} + \dfrac{a_2}{s^3} + \dfrac{a_3}{s^4} + \dfrac{a_4}{s^5} + \cdots$ thì

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \cdots \qquad \textbf{(2.23)}$$

Ví dụ 2.30:

$$\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} - \frac{1}{3!s^3} + \frac{1}{4!s^4} - \cdots\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!s^3} - \frac{1}{3!s^4} + \frac{1}{4!s^5} - \cdots$$

$$\Rightarrow\ x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}\right\} = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^4}{2^2 4^2} - \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \cdots = J_0\left(2\sqrt{t}\right)$$

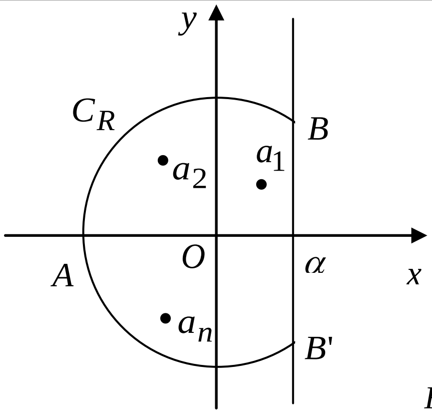
trong đó J_0 là hàm Bessel bậc 0 (xem chương 3).

C. *Sử dụng thặng dư của tích phân phức*

Với điều kiện của Định lý 2.14 thì $X(s)$ có biến đổi ngược $x(t)$ xác định bởi công thức Bromwich (2.22).

Giả sử hàm $X(s)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s) < \alpha$ với α nào đó $> \alpha_0$. Chọn *R* đủ lớn sao cho các điểm bất thường này đều nằm trong phần của mặt phẳng được giới hạn bởi đường tròn C_R tâm O bán kính *R* và đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ (xem hình 2.14). Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\frown}{BAB'}} e^{st}X(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B'}^{B} e^{st}X(s)ds = \sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{Res}\, e^{st}X(s); a_k\right]. \qquad \textbf{(2.24)}$$



Hình 2.14:

Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu trên cung $\overset{\frown}{BAB'}$ của đường tròn C_R hàm $X(s)$ thoả mãn điều kiện $\left|X(s)\right| < \dfrac{M}{R^k}$; $k > 0$, theo Bổ đề 1.2 (Chương 1) thì $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\overset{\frown}{BAB'}} e^{st}X(s)ds = 0$, $\forall\, t > 0$.

2. Hàm phân thức $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, nếu bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$ thì $X(s)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Lấy giới hạn của đẳng thức (2.24) khi $R \to \infty$ và áp dụng định lý 2.13 ta được:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} e^{st}X(s); a_k\right] \qquad \textbf{(2.25)}$$

3. Đặc biệt nếu $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$, $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là $a_1, a_2, ..., a_n$ và chúng không phải là không điểm của $P(s)$ thì ta có ***công thức Heaviside***:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Ví dụ 2.31: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)} = \dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ có các cực điểm đơn là $1, -2, -3$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=1} = \frac{3}{4},\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2} = -1,\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-3} = \frac{5}{4} \Rightarrow x(t) = \frac{3}{4}e^t - e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-3t}.$$

Ví dụ 2.32: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ có các cực điểm đơn là $2,\ -2+2i,\ -2-2i$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=2}=1,\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2+2i}=\left.\frac{3\left(s^2+4s+8\right)-9s-22}{\left(s^2+4s+8\right)+(s-2)(2s+4)}\right|_{s=-2+2i}=1+\frac{i}{4},$$

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2-2i}=\overline{\left(\frac{P(-2+2i)}{Q'(-2+2i)}\right)}=\overline{1+\frac{i}{4}}=1-\frac{i}{4}.$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=e^{2t}+\left(1+\frac{i}{4}\right)e^{-2t+2it}+\left(1-\frac{i}{4}\right)e^{-2t-2it}$$

$$=e^{2t}+e^{-2t}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)+\frac{i}{4}e^{-2t}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)=e^{2t}+e^{-2t}\left(2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

1.2.3.4 *Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ*

Mọi phân thức hữu tỉ có dạng $X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của $Q(s)$ lớn hơn bậc của $P(s)$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II.

♦ Các phân thức hữu tỉ loại I: $\dfrac{1}{s-a}$ hay $\dfrac{1}{(s-a)^n}$, $a\in\mathbb{R}$ có hàm gốc:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at},\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ . \tag{2.27}$$

♦ Các phân thức hữu tỉ loại II: $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^n}$, $M,\ N,\ a,\ \omega\in\mathbb{R}$.

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau:

$$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}\ \text{hoặc}\ \frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n} \tag{2.28}$$

▪ Trường hợp $n=1$, từ ví dụ 2.6 và ví dụ 2.12 ta có:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}=\cos\omega t,\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}=\frac{\sin\omega t}{\omega} \tag{2.29}$$

Áp dụng công thức đạo hàm hàm ảnh (2.16) liên tiếp vào (2.29), (2.30), ... ta suy ra các trường hợp sau (xem ví dụ 2.28)

▪ Trường hợp $n=2$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{t\sin\omega t}{2\omega},\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3} \qquad \textbf{(2.30)}$$

- Trường hợp $n=3$: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}\right\}=\frac{t\sin\omega t-\omega t^2\cos\omega t}{8\omega^3}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{\left(3-\omega^2t^2\right)\sin\omega t-3\omega t\cos\omega t}{8\omega^3} \qquad \textbf{(2.31)}$$

Ví dụ 2.33: Hàm ảnh $X(s)=\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ (xem ví dụ 2.32) có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{2s+3}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\,.$$

Ví dụ 2.34: $X(s)=\frac{3s-4}{\left(s^2-2s+2\right)^2}=\frac{3(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}-\frac{1}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{\left(s^2-2s+2\right)^2}\right\}=3e^t\,\frac{t\sin t}{2}-\frac{e^t}{2}\left(\sin t-t\cos t\right)=\frac{e^t}{2}\left(3t\sin t-\sin t+t\cos t\right)$$

Ví dụ 2.35: Tìm hàm gốc của $X(s)=\frac{2s^3+10s^2+9s+45}{s^2\left(s^2+9\right)}$.

Ta có $$\frac{1}{s^2\left(s^2+9\right)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$\Rightarrow\quad X(s)=\frac{2s}{s^2+9}+\frac{10}{s^2+9}+\frac{9s+45}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{s}{s^2+9}+\frac{5}{s^2+9}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+9s+45}{s^2\left(s^2+9\right)}\right\}=1+5t+\cos 3t+\frac{5}{3}\sin 3t\,.$$

Ví dụ 2.36: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$.

Ta phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}.$$

2.1.3 Ứng dụng của biến đổi Laplace

2.1.3.1 Ứng dụng của biến đổi Laplace để tính tích phân

Một vài tích phân lấy cận từ 0 đến $+\infty$ có thể tính được bằng cách áp dụng phép biến đổi Laplace.

A. Thay trực tiếp vào công thức xác định biến đổi Laplace (2.1) ta có thể tính được tích phân với hàm dưới dấu tích phân có chứa e^{-at}.

$$\int_0^\infty e^{-at}x(t)dt=\left(\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt\right)_{s=a}=X(s)\Big|_{s=a}. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Ví dụ 2.37: Tính $\int_0^\infty e^{-3t}\sin t dt$.

Giải: $\int_0^\infty e^{-3t}\sin t dt=\mathscr{L}\left\{\sin t\right\}\Big|_{s=3}=\dfrac{1}{s^2+1}\Big|_{s=3}=\dfrac{1}{10}$.

Ví dụ 2.38: Tính $\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt$.

Giải: $\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt=\mathscr{L}\left\{t\cos t\right\}\Big|_{s=2}$, $\mathscr{L}\left\{t\cos t\right\}=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)=\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.

Vậy

$$\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt=\mathscr{L}\left\{t\cos t\right\}\Big|_{s=2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=2}=\frac{3}{25}.$$

B. Sử dụng tính chất tích phân ảnh (2.17).

Nếu $X(s)=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$ thì

$$\mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty X(u)du\Rightarrow\int_0^\infty e^{-st}\frac{x(t)}{t}dt=\int_s^\infty X(u)du\,;\ \forall s\ge\alpha_0. \qquad \textbf{(2.33a)}$$

Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng $\alpha_0 \le 0$, thay $s = 0$ ta nhận được công thức quan trọng

$$\int_0^\infty \frac{x(t)}{t} dt = \int_0^\infty X(s) ds \tag{2.33b}$$

Công thức này tỏ ra hiệu quả khi tính trực tiếp tích phân ở vế trái gặp khó khăn.

Ví dụ 2.39: Tính $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right) dt$.

Giải: Ta có $\mathscr{L}\left\{ e^{-t} - e^{-3t} \right\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$.

Áp dụng công thức (2.33b) ta được:

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) ds = \left[\ln(s+1) - \ln(s+3) \right] \Big|_0^\infty = \ln \frac{s+1}{s+3} \Big|_0^\infty = \ln 3 .$$

Ví dụ 2.40: Tính $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ và $\int_0^\infty e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt$.

Giải: Áp dụng công thức (2.33b) ta được: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \arctan s \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

Áp dụng công thức (2.33a) ta được: $\int_0^\infty e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \arctan s \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 2.41: Tính $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Giải: Ta có $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, do đó $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 - \cos 2t) \frac{1}{t^2} dt$.

Sử dụng công thức biến đổi Laplace ta lại có $\frac{1}{t^2} = \int_0^\infty e^{-tu} u du$, do đó

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 - \cos 2t) \left[\int_0^\infty e^{-ts} s ds \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ts} (1 - \cos 2t) dt \right] s ds .$$

$$\int_0^\infty e^{-st} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} = \frac{4}{s(s^2+4)},$$

Vậy

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{4}{s(s^2+4)} \right] s ds = \int_0^\infty \frac{2}{s^2+4} ds = \arctan \frac{s}{2} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} .$$

2.1.3.2 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

A. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y(t) \qquad \textbf{(2.34)}$$

thỏa mãn điều kiện đầu

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Ta tìm nghiệm là hàm gốc bằng cách đặt $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, $Y(s) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$.

Áp dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (2.13), (2.14) với điều kiện đầu (2.35),

$$\mathscr{L}\left\{a_0 x(t)\right\} = a_0 X(s)$$

$$\mathscr{L}\left\{a_1 x'(t)\right\} = a_1\left(sX(s) - x_0\right)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\mathscr{L}\left\{a_{n-1} x^{(n-1)}(t)\right\} = a_{n-1}\left(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \cdots - x_{n-2}\right) \qquad \textbf{(2.36)}$$

$$\mathscr{L}\left\{a_n x^{(n)}(t)\right\} = a_n\left(s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \cdots - sx_{n-2} - x_{n-1}\right).$$

Thay vào (2.34) ta được

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right)X(s) = Y(s) + x_0\left(a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1\right)$$

$$+x_1\left(a_n s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2\right) + \cdots + x_{n-1}a_n .$$

Vậy phương trình ảnh có dạng: $A(s)X(s) = Y(s) + B(s) \ \Rightarrow\ X(s) = \dfrac{Y(s) + B(s)}{A(s)}$.

Ảnh ngược $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2.42: Tìm nghiệm của phương trình: $x'' - 2x' + 2x = 2e^t \cos t$
thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = 0$.

Giải: $\mathscr{L}\left\{2e^t \cos t\right\} = \dfrac{2(s-1)}{(s-1)^2 + 1}$. Áp dụng công thức (2.36) với điều kiện đầu của bài toán

ta có phương trình ảnh: $\left(s^2 - 2s + 2\right)X(s) = \dfrac{2(s-1)}{(s-1)^2+1} \ \Rightarrow X(s) = \dfrac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$

Áp dụng công thức (2.32) ta có nghiệm $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = 2e^t \dfrac{t\sin t}{2} = te^t \sin t$.

Ví dụ 2.43: Tìm nghiệm của phương trình: $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$.

Giải: Phương trình ảnh: $\left(s^4+2s^2+1\right)X(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\;\Rightarrow X(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^3}$.

Áp dụng công thức (2.31) ta có nghiệm $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\dfrac{\left(3-t^2\right)\sin t-3t\cos t}{8}$.

Ví dụ 2.44: Tìm nghiệm của phương trình: $x''+x=e^t$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(1)=1,\ x'(1)=0$.

Giải: Đổi biến số $u=t-1$, điều kiện đầu $t=1$ trở thành điều kiện đầu $u=0$.

Đặt $y(u)=x(u+1)=x(t)$ và sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dy}{du}=\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{du}=\frac{dx}{dt}, \text{ tương tự } \frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Do đó phương trình đã cho có thể viết lại tương ứng: $y''(u)+y(u)=e^{u+1}$

với điều kiện đầu $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Đặt $Y(s)=\mathscr{L}\left\{y(u)\right\}\;\Rightarrow\;\mathscr{L}\left\{y''(u)\right\}=s^2Y(s)-s$.

Phương trình ảnh: $s^2Y(s)-s+Y(s)=\dfrac{e}{s-1}\;\Rightarrow Y(s)=\dfrac{e}{(s-1)\left(s^2+1\right)}+\dfrac{s}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{e}{2}}{(s-1)}+\left(1-\frac{e}{2}\right)\frac{s}{s^2+1}-\frac{\frac{e}{2}}{s^2+1}\;\Rightarrow\; y(u)=\frac{e}{2}e^u+\left(1-\frac{e}{2}\right)\cos u+\frac{e}{2}\sin u$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\left(1-\dfrac{e}{2}\right)\cos(t-1)+\dfrac{e}{2}\sin(t-1)$.

B. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 2.45: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases}x'=2x-3y\\ y'=y-2x\end{cases}\text{ với điều kiện đầu }\begin{cases}x(0)=8\\ y(0)=3\end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s)=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\},\ Y(s)=\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}\;\Rightarrow\;\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}=sX-8,\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}=sY-3$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases}sX-8=2X-3Y\\ sY-3=Y-2X\end{cases}\quad\text{hay}\quad\begin{cases}(s-2)X+3Y=8\\ 2X+(s-1)Y=3\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X = \dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \dfrac{5}{s+1} + \dfrac{3}{s-4} \\ Y = \dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{2}{s-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}.$$

Ví dụ 2.46: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases} \text{ với điều kiện đầu } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, $Y(s) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$ $\Rightarrow \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = sX - 1, \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = sY$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} sX - 1 = 2X - Y \\ sY = X + 2Y \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (s-2)X + Y = 1 \\ X - (s-2)Y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+1} \\ Y = \dfrac{1}{(s-2)^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \end{cases}$$

C. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên

Ví dụ 2.47: *Giải phương trình* $tx'' + x' + 4tx = 0$

Đặt $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$ thì $\mathscr{L}\left\{4tx(t)\right\} = -4\dfrac{dX}{ds}$, $\mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = sX - x(0)$.

$$\mathscr{L}\left\{tx''(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left(s^2X - sx(0) - x'(0)\right) = -2sX - s^2\frac{dX}{ds} + x(0).$$

Phương trình ảnh: $-2sX - s^2\dfrac{dX}{ds} + x(0) + sX - x(0) - 4\dfrac{dX}{ds} = 0$.

Hay $(s^2+4)\dfrac{dX}{ds} = -sX \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = -\dfrac{s}{s^2+4}ds$.

Giải phương trình này ta được: $X(s) = \dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}$.

Theo 63. phụ lục C ta được nghiệm $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = C\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = CJ_0(2t)$.

Để xác định *C* ta thay $t = 0$ vào hai vế của đẳng thức trên: $x(0) = CJ_0(0) = C$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = x(0)J_0(2t)$.

2.1.3.3 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình tích phân

Xét phương trình tích phân dạng tích chập

$$A\,x(t) + B\int_0^t x(u)\,k(t-u)\,du = C\,f(t) \tag{2.37}$$

A, B, C là các hằng số, $f(t)$, $k(t)$ là các hàm gốc.

Giải phương trình (2.37) là tìm tất cả các hàm thực $x(t)$ thỏa mãn phương trình với mọi t thuộc một miền nào đó.

Giả sử $x(t)$ là hàm gốc. Đặt $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$, $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$, $K(s) = \mathscr{L}\left\{k(t)\right\}$.

Phương trình ảnh $A\,X(s) + B\,X(s)\,K(s) = C\,F(s) \;\Rightarrow\; X(s) = \dfrac{C\,F(s)}{A + B\,K(s)}$.

Nghiệm của phương trình (2.37) là $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{C\,F(s)}{A + B\,K(s)}\right\}$.

Ví dụ 2.48: *Giải phương trình tích phân:*

$$x(t) - \int_0^t x(u)\sin(t-u)\,du = t^2 .$$

Giải: Phương trình ảnh $X(s) - X(s)\dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)X(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow X(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \;\Rightarrow x(t) = t^2 + \frac{1}{12}t^4 .$$

Ví dụ 2.49: *Giải phương trình tích phân Abel:*

$$\int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = f(t)\ ;\ 0 < \alpha < 1.$$

Giải: $\mathscr{L}\left\{t^{\beta-1}\right\} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{s^\beta}$, $\beta > 0 \Rightarrow K(s) = \mathscr{L}\left\{t^{-\alpha}\right\} = \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$ (xem phụ lục E).

Do đó $X(s) = \dfrac{F(s)}{K(s)} = \dfrac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}F(s)$.

Nghiệm của phương trình là $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$.

Chẳng hạn $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $f(t) = 1 + t + t^2$ thì $\Gamma(1-\alpha) = \sqrt{\pi}$, $F(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow X(s)=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

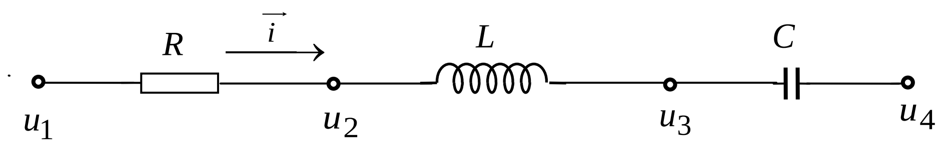
(xem hàm Gamma chương3)

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{2t}{\sqrt{\pi}}+\frac{8t^2}{3\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{3\pi\sqrt{t}}\left(3+6t+8t^2\right).$$

2.1.3.4 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

Một số bài toán về các mạch điện được đưa về bài toán giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hoặc phương trình đạo hàm riêng… Vì vậy, nếu chuyển qua ảnh của biến đổi Laplace thì việc giải các bài toán sẽ đơn giản hơn.

Giả sử trên một đoạn mạch có điện trở R, một cuộn dây có hệ số tự cảm L và một tụ điện có điện dung C .



Hình 2.15:

Gọi $u(t)$ là hiệu điện thế của hai đầu đoạn mạch, $i(t)$ là cường độ dòng điện của mạch tại thời điểm t . $u(t)$ và $i(t)$ thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$u_2(t)-u_1(t)=R\,i(t);\quad u_3(t)-u_2(t)=L\frac{di(t)}{dt};\quad u_4(t)-u_3(t)=\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right). \quad \textbf{(2.38)}$$

Đặt $I(s)=\mathscr{L}\left\{i(t)\right\}$, $U(s)=\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}$ thì

$$\mathscr{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}=sI-i(0),\ \mathscr{L}\left\{\int_0^t i(t)dt+q_0\right\}=\frac{I}{s}+\frac{q_0}{s},$$

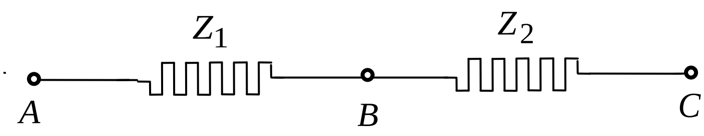
trong đó q_0 là điện lượng ban đầu ($t=0$) trên các thành tụ điện. Đối với bài toán đóng mạch tại thời điểm $t=0$, các điều kiện ban đầu đều bằng 0: $q_0=0$, $i(0)=0$, lúc đó tỉ số giữa điện thế ảnh và cường độ ảnh gọi là trở kháng ảnh $Z=\frac{U}{I}$. Như vậy các trở kháng ảnh của điện trở R, cuộn dây có hệ số tự cảm L và tụ điện có điện dung C lần lượt tương ứng là:

$$Z = R \; ; \quad Z = Ls \; ; \quad Z = \frac{1}{Cs} \tag{2.39}$$

Khi tính toán một mạng gồm nhiều mạch điện kín ta áp dụng định luật thứ nhất của Kirchoff (kiếc-sốp) cho từng nút và định luật thứ hai cho từng mạch kín, sau đó chuyển các phương trình tìm được sang phương trình ảnh.

Trong quá trình tính toán ta có thể thay trở kháng ảnh tương đương cho các trở kháng ghép nối tiếp hoặc song song. Áp dụng hai định luật Kirchoff ta có thể tìm trở kháng ảnh tương đương của mạch mắc nối tiếp và mạch song song cơ bản sau:

- Trở kháng ảnh tương đương Z của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc nối tiếp bằng tổng hai trở kháng này.

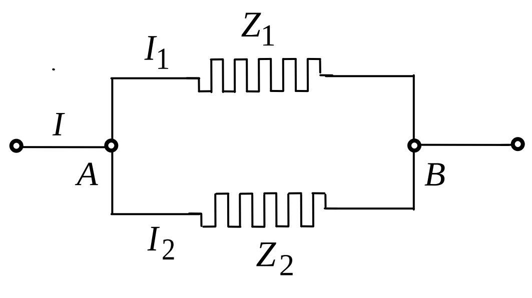


Gọi u_1, u_2, u lần lượt là hiệu điện thế giữa *A*, *B*; *B*, *C* và *A*, *C*. Theo định luật 1 Kirchoff ta có $u = u_1 + u_2$, chuyển qua ảnh $U = U_1 + U_2 \Rightarrow ZI = Z_1I + Z_2I$. Vậy

$$Z = Z_1 + Z_2 \tag{2.40}$$

- Nghịch đảo của trở kháng ảnh tương đương của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc song song bằng tổng nghịch đảo hai trở kháng này.

Gọi I_1, I_2, I lần lượt là cường độ ảnh trong mạch 1, mạch 2 và mạch chính. U là điện thế ảnh giữa *A* và *B*.

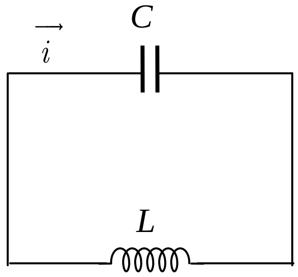


Áp dụng định luật 2 Kirchoff tại nốt *A* và nốt *B* ta có $I = I_1 + I_2 \Rightarrow \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2}$. Vậy:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{2.41}$$

Ví dụ 2.50: *Một tụ điện có điện dung C được nạp điện có điện lượng q_0. Khi $t = 0$, ta mắc nó vào 2 mút của một cuộn dây có hệ số điện cảm L. Tìm điện lượng $q(t)$ của tụ điện và cường độ $i(t)$ của dòng điện trong mạch tại thời điểm t* (xem hình 2.16).

Giải:



Hình 2.16:

Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng ta có:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt+q_0\right)=0.$$

Vì $i(t)=\dfrac{dq}{dt}$ nên phương trình trên trở thành

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}\left(\int_0^t \frac{dq}{dt}dt+q_0\right)=0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0, \text{ (vì } \int_0^t \frac{dq}{dt}dt=q(t)-q_0\text{)}.$$

Đặt $Q(s)=\mathscr{L}\left\{q(t)\right\}$, vì $q(0)=q_0$, $q'(0)=i(0)=0$. Ta có phương trình ảnh:

$$L(s^2Q-sq_0)+\frac{Q}{C}=0 \quad\Rightarrow\quad Q=q_0\frac{s}{s^2+\dfrac{1}{CL}}$$

Vậy $$q(t)=q_0\cos\frac{t}{\sqrt{CL}};\ \ i(t)=\frac{dq}{dt}=-\frac{q_0}{\sqrt{CL}}\sin\frac{t}{\sqrt{CL}}.$$

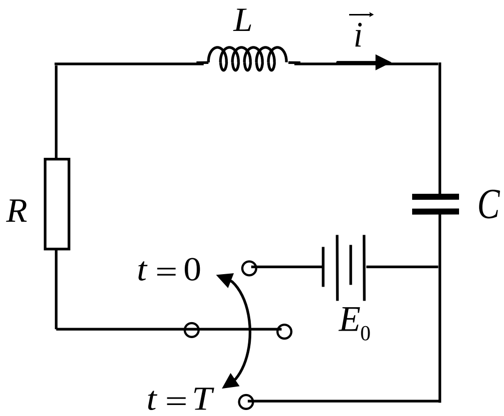
Ví dụ 2.51: *Xét mạch* RLC *nối tiếp* (*cho trong hình 2.17*) *với* $R=110\Omega$, $L=1H$, $C=0{,}001F$ *và một ắc quy cung cấp sức điện động* $90V$. *Đóng mạch tại thời điểm* $t=0$ *và đến thời điểm* $t=T$ *(T = 1 s) ắc quy sẽ được tách ra khỏi mạch, lúc đó mạch* RLC *cũng đóng nhưng không con sức điện động. Tìm cường độ* $i(t)$ *của dòng điện trong mạch tại thời điểm* $t>0$.

Giải: Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng với điều kiện đầu $i(0)=0$, $q(0)=0$ ta có:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt\right)=E(t).$$

Sức điện động $E(t)=90\big(\eta(t)-\eta(t-1)\big)$, do giả thiết $T=1$.

Áp dụng biến đổi Laplace ta được phương trình ảnh $LsI+RI+\dfrac{1}{Cs}I=90\dfrac{1-e^{-s}}{s}$.



Hình 2.17: Mạch RLC

Thay số ta tính được $sI + 110I + \dfrac{1000}{s} I = 90\dfrac{1-e^{-s}}{s}$

$$\Rightarrow I = 90\frac{1-e^{-s}}{s^2 + 110s + 1000} = (1-e^{-s})\left(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100}\right),$$

Vậy $\quad i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - \left(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right)\eta(t-1).$

Ví dụ 2.52: *Xét một mạch điện như hình 2.18. Suất điện động* $E(t) = E_0 =$ *hằng số. Đóng mạch tại thời điểm* $t = 0$. *Hãy tìm cường độ* $i_1(t)$, $t > 0$.

Gọi I_1 là cường độ ảnh của mạch $R_1 - C$.

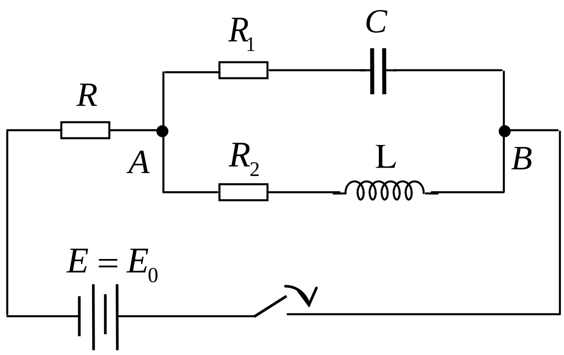
I_2 là cường độ ảnh của mạch $R_2 - L$.

Z_1 là trở kháng ảnh của mạch $R_1 - C$. $\qquad Z_1 = R_1 + \dfrac{1}{Cs}$

Z_2 là trở kháng ảnh của mạch $R_2 - L$. $\qquad Z_2 = R_2 + Ls$

Z là trở kháng ảnh tương đương của hai đoạn mạch $R_1 - C$ và $R_2 - L$ mắc song song.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \text{ hay } Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ (*)}$$



Hình 2.18:

Hiệu điện thế ảnh giữa hai đầu *A*, *B* của đoạn mạch:

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2 = I\,Z \;\Rightarrow I_1 = \frac{Z}{Z_1} I \qquad \textbf{(**)}$$

Áp dụng định luật Kirchoff cho mạch vòng ta có

$$(R+Z)I = \frac{E_0}{s} \qquad \textbf{(***)}$$

Từ **(*)**, **(**)** và **(***)** suy ra

$$I_1 = \frac{Z}{Z_1}\cdot\frac{E_0}{s}\cdot\frac{1}{R+Z} = \frac{\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}}{Z_1}\cdot\frac{E_0}{s}\cdot\frac{1}{R+\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}} = \frac{Z_2E_0}{s\left[R\left(Z_1+Z_2\right)+Z_1Z_2\right]}.$$

Thay Z_1, Z_2 vào kết quả trên ta được

$$I_1 = \frac{E_0(R_2+Ls)}{s^2\left(RL+R_1L\right)+s\left(RR_1+RR_2+R_1R_2+\dfrac{L}{C}\right)+\dfrac{R}{C}+\dfrac{R_2}{C}}.$$

Đặt $\alpha = RL + R_1L$; $2\beta = RR_1 + RR_2 + R_1R_2 + \dfrac{L}{C}$; $\gamma = \dfrac{R}{C} + \dfrac{R_2}{C}$.

- Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$, gọi s_1, s_2 là hai nghiệm phân biệt (thực hoặc phức) của tam thức $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ và $s_1, s_2 \neq -\dfrac{R_2}{L}$. Khi đó từ công thức Heaviside ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{E_0}{2}\left(\dfrac{R_2+Ls_1}{\alpha s_1+\beta}e^{s_1t} + \dfrac{R_2+Ls_2}{\alpha s_2+\beta}e^{s_2t}\right)$.

- Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma = 0$, tam thức $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ có nghiệm kép $s = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

  Ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{E_0}{2}\left[L + t\left(R_2 - \dfrac{\beta}{\alpha}L\right)\right]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}$.

- Nếu $s = -\dfrac{R_2}{L}$ là một nghiện của $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ thì $I_1 = \dfrac{LE_0}{\alpha\left(s+\dfrac{L\gamma}{R_2\alpha}\right)}$,

  Ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{LE_0}{\alpha}e^{-\frac{L\gamma}{R_2\alpha}t}$.

Ví dụ 2.53: *Cho một dây dẫn nằm dọc theo trục* $\overrightarrow{Ox}$ *từ* O *đến* l. *Gọi* C, R, L, G *lần lượt là điện dung, điện trở, điền cảm, hệ số hao phí điện ứng với một đơn vị dài sợi dây. Khi có dòng điện chạy trong dây, xung quanh nó tạo nên một từ trường làm thay đổi cường độ dòng điện* *và điện thế. Tìm cường độ $i(x,t)$ và điện thế $u(x,t)$ dòng điện ở vị trí x thời điểm t với điều kiện đầu và điều kiện biên:*

$$\begin{cases} i(x,0)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} u(0,t)=\phi_1(t) \\ u(l,t)=\phi_2(t) \end{cases}. \tag{2.42}$$

Theo các định luật vật lý ta suy ra rằng giữa chúng liên hệ với nhau bởi hệ phương trình.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\dfrac{\partial i}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial i}{\partial x}+Gu+C\dfrac{\partial u}{\partial t}=0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Đặt

$$F_1(s)=\mathscr{L}\left\{\phi_1(t)\right\}\ ;\ F_2(s)=\mathscr{L}\left\{\phi_2(t)\right\}. \tag{2.44}$$

$$U(x,s)=\mathscr{L}\left\{u(x,t)\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}u(x,t)\,dt\,;\ I(x,s)=\mathscr{L}\left\{i(x,t)\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}i(x,t)\,dt \tag{2.45}$$

Dựa vào tính hội tụ đều của tích phân suy rộng (2.45) ta chứng minh được:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{\partial U}{\partial x}\ ;\quad \mathscr{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial x}\right\}=\frac{\partial I}{\partial x} \tag{2.46}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=sU(x,s)-u(x,0);\quad \mathscr{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial t}\right\}=sI(x,s)-si(x,0) \tag{2.47}$$

Áp dụng các công thức (2.44)-(2.46) vào (2.43) ta có hệ phương trình ảnh, các điều kiện biên ảnh.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}+RI+LsI=0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial x}+GU+CsU=0 \end{cases}; \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} U(0,s)=F_1(s) \\ U(l,s)=F_2(s) \end{cases}. \tag{2.49}$$

Để giải hệ phương trình này ta khử đi một ẩn hàm, chẳng hạn khử *I*. Lấy đạo hàm riêng theo x phương trình thứ nhất (2.48) ta có:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+R\frac{\partial I}{\partial x}+Ls\frac{\partial I}{\partial x}=0. \tag{2.50}$$

Thay $\dfrac{\partial I}{\partial x}=-\left(GU+CsU\right)$ vào phương trình trên ta được:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\left(R+Ls\right)\left(G+Cs\right)U=0. \tag{2.51}$$

Giải phương trình (2.49) theo biến x ta có nghiệm tổng quát:

$$U(x,s)=Ae^{kx}+Be^{-kx}\ ,\ \text{với } k=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}\,. \qquad \textbf{(2.52)}$$

$$I(x,s)=-\frac{1}{R+Ls}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-k}{R+Ls}\left(Ae^{kx}-Be^{-kx}\right)=-\sqrt{\frac{Cs+G}{Ls+R}}\left(Ae^{kx}-Be^{-kx}\right). \qquad \textbf{(2.53)}$$

Thay điều kiện biên (2.48) ta tìm được *A, B* xong lấy ảnh ngược ta sẽ có $u(x,t)$, $i(x,t)$ cần tìm.

Tuy nhiên nói chung không có một công thức tổng quát để tìm hàm gốc từ hàm ảnh có dạng trên. Ta tìm hàm gốc trong một vài trường hợp cụ thể sau.

Ví dụ 2.54: *Giả sử dây dẫn khá dài và ảnh hưởng của quá trình dao động điện không đáng kể. Khi đó, về mặt lý thuyết ta có thể xem x biến thiên từ 0 đến $+\infty$. Trong trường hợp này, điều kiện biên thứ hai phải được thay đổi bằng điều kiện buộc $u(x,t)$, $i(x,t)$ bị chặn khi $x\to+\infty$.*

Chọn $k=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}$ thỏa mãn $\operatorname{Re}k>0$. Điều kiện $u(x,t)$, $i(x,t)$ bị chặn khi $x\to+\infty$ suy ra $U(x,s)$, $I(x,s)$ cũng bị chặn khi $x\to+\infty$, do đó $A=0$. Vậy

$$U(x,s)=Be^{-kx}\ .$$

Thay điều kiện biên $U(0,s)=F_1(s)$ ta được $B=F_1(s)$. Vậy

$$U(x,s)=F_1(s)e^{-kx}\ ;\ I(x,s)=\sqrt{\frac{Cs+G}{Ls+R}}U(x,s). \qquad \textbf{(2.54)}$$

Các trường hợp đặc biệt:

- Truyền điện trên dây không bị hao điện $(R=0,\ G=0)$. Khi đó:

$$U(x,s)=F_1(s)e^{-sx\sqrt{LC}}\ ;\ I(x,s)=\sqrt{\frac{C}{L}}U(x,s).$$

Suy ra nghiệm
$$u(x,t)=\begin{cases}\phi_1\left(t-x\sqrt{LC}\right) & \text{nếu}\quad t>x\sqrt{LC}\\ 0 & \text{nếu}\quad t<x\sqrt{LC}\end{cases}$$

$$i(x,t)=\sqrt{\frac{C}{L}}u(x,t).$$

- Truyền sóng không méo mó: $RC=LG$.

Khi đó: $(Ls+R)(Cs+G)=\left(s\sqrt{LC}+\sqrt{RG}\right)^2$, $\sqrt{\dfrac{Cs+G}{Ls+R}}=\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

$$U(x,s)=e^{-x\sqrt{RG}}F_1(s)e^{-sx\sqrt{LC}}\ ;\ I(x,s)=\sqrt{\frac{C}{L}}U(x,s).$$

Suy ra nghiệm

$$u(x,t)=\begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}}\,\phi_1\left(t-x\sqrt{LC}\right) & \text{nếu} \quad t>x\sqrt{LC} \\ 0 & \text{nếu} \quad t<x\sqrt{LC} \end{cases}, \quad i(x,t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,u(x,t).$$

2.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Sử dụng phương pháp tọa độ mỗi véc tơ có thể đồng nhất với tọa độ của véc tơ này. Mỗi véc tơ trong mặt phẳng có tọa độ là một cặp số (x,y), x là hoành độ và y tung độ, véc tơ trong không gian có tọa độ là bộ ba thành phần (x,y,z). Một hàm số được xem là véc tơ của không gian vô hạn chiều có các thành phần của tọa độ là các hệ số Fourier.

Cuối thế kỷ 18 nhà toán học, nhà vật lý đồng thời là kỹ sư người Pháp tên Jean Baptiste Joseph Fourier đã có khám phá kỳ lạ. Trong một kết quả nghiên cứu của mình về phương trình đạo hàm riêng mô tả sự truyền nhiệt của vật thể, Fourier đã khẳng định rằng “mọi” hàm số đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi vô hạn các hàm lượng giác. Sau này ta gọi là khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

Có ba dạng của chuỗi Fourier: dạng cầu phương (công thức 2.57, 2.59), dạng cực (công thức 2.67) và dạng phức (công thức 2.68, 2.72).

Phép biến đổi Fourier hữu hạn được phát triển trên ý tưởng của khai triển hàm số tuần hoàn thành chuỗi Fourier, trong đó mỗi hàm số hoàn toàn được xác định bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại. Trường hợp hàm không tuần hoàn phép biến đổi Fourier rời rạc được thay bằng *phép biến đổi Fourier*, phép biến đổi ngược duy nhất được xây dựng dựa vào công thức tích phân Fourier.

Khi các hàm số biểu diễn cho các tín hiệu phụ thuộc thời gian t thì biến đổi Fourier của chúng được gọi là *biểu diễn phổ tần số*, vì mỗi hệ số Fourier tương ứng với một tần số của hàm sin hoặc hàm cosin, các hệ số Fourier đóng vai trò như các thành phần tọa độ của véc tơ. Tín hiệu tuần hoàn sẽ có phổ rời rạc, còn tín hiệu không tuần hoàn sẽ có phổ liên tục. Đối số của hàm tín hiệu là thời gian còn đối số của biến đổi Fourier của nó là tần số, vì vậy phép biến đổi Fourier còn được gọi là phép biến đổi biến miền thời gian về miền tần số. Biểu diễn phổ tần số của tín hiệu phụ thuộc thời gian cũng giống như biểu diễn véc tơ theo tọa độ của chúng.

Phép biến đổi Fourier rời rạc được sử dụng để tính toán khi các tín hiệu được rời rạc hoá bằng cách chọn các giá trị mẫu tại một số hữu hạn thời điểm và phổ cũng nhận được tại một số hữu hạn các tần số. Tuy nhiên để thực hiện nhanh phép biến đổi Fourier rời rạc, người ta sử dụng các *thuật toán biến đổi Fourier nhanh*.

Hướng ứng dụng vào viễn thông: Phân tích phổ, phân tích truyền dẫn tín hiệu, ghép kênh vô tuyến, ghép kênh quang, đánh giá chất lượng WDM...

2.2.1 Chuỗi Fourier (*)

2.2.1.1 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

Hệ các hàm số

$$\left\{1,\ \cos nt,\ \sin nt;\ n=1,2,...\right\} \tag{2.55}$$

là một hệ trực giao theo tích vô hướng

$$\left\langle x(t), y(t)\right\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$$

nghĩa là

$$\int_0^{2\pi}\cos ntdt = \int_0^{2\pi}\sin ntdt = \int_0^{2\pi}\cos nt\sin mtdt = 0 \ ; \ \forall n, \forall m$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\cos mtdt = \int_0^{2\pi}\sin nt\sin mtdt = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n \neq m \\ \pi \text{ nếu } n = m \end{cases} \qquad \textbf{(2.56)}$$

Thật vậy

$$\int_0^{2\pi}\cos ntdt = \left.\frac{\sin nt}{n}\right|_0^{2\pi} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* ; \int_0^{2\pi}\sin ntdt = -\left.\frac{\cos nt}{n}\right|_0^{2\pi} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\sin mtdt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin(n+m)t - \sin(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n \neq m,\ \int_0^{2\pi}\cos nt\cos mtdt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n \neq m,\ \int_0^{2\pi}\sin nt\sin mtdt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n+m)t - \cos(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n = m,\ \int_0^{2\pi}\cos nt\cos mtdt = \int_0^{2\pi}\cos^2 ntdt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 + \cos 2nt\right]dt = \pi$$

$$n = m,\ \int_0^{2\pi}\sin nt\sin mtdt = \int_0^{2\pi}\sin^2 ntdt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - \cos 2nt\right]dt = \pi$$

Từ tính chất trực giao của hệ (2.55) ta có thể chứng minh được rằng, nếu hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và khai triển thành tổng của chuỗi lượng giác

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt$$

thì các hệ số a_0, a_n, b_n; $n = 1, 2, \ldots$ nghiệm đúng công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt \ ; \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt \ ; \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin ntdt \ ; \ n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.57)}$$

Thật vậy, từ công thức (2.56) ta có

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ntdt+b_n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin ntdt=a_0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mt+b_m\sin mt\right)\cos ntdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\int_0^{2\pi}\cos mt\cos ntdt+b_m\int_0^{2\pi}\sin mt\cos ntdt\right)=a_n$$

Các hệ số (2.57) được gọi là hệ số Fourier của hàm $x(t)$ và chuỗi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right) \tag{2.58}$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm $x(t)$.

Với mọi hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích ta có thể tính các hệ số Fourier vì vậy có chuỗi Fourier tương ứng. Ta ký hiệu

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right) \tag{2.59}$$

Hệ số $\frac{1}{2}$ của số hạng thứ nhất xuất phát từ sự thuận lợi trong việc tính toán sau này.

Ký hiệu $\sim$ trong công thức (2.59) ngụ ý rằng chuỗi Fourier của hàm $x(t)$ chưa chắc hội tụ về hàm $x(t)$.

Các câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên:

(i) Khi nào chuỗi lượng giác vô hạn (2.58) hội tụ?

(ii) Loại hàm $x(t)$ nào có thể biểu diễn thành tổng của chuỗi Fourier? Nghĩa là có thể thay dấu $\sim$ thành dấu =.

Định lý sau cho một điều kiện đủ để khai triển một hàm thành tổng của chuỗi Fourier.

Định lý 2.15 (Định lý Dirichlet): Giả sử hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, *đơn điệu từng khúc và bị chặn* (gọi là điều kiện Dirichlet), tại các điểm gián đoạn ta ký hiệu

$$x(t)=\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2} \tag{2.60}$$

trong đó $x(t+0)$, $x(t-0)$ lần lượt là giới hạn phải và giới hạn trái của $x(t)$ tại t. Khi đó chuỗi Fourier hội tụ và công thức (2.59) trở thành đẳng thức.

Ví dụ 2.55: Xét hàm số $x(t)=t$, $-\pi<t<\pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π. Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tdt=0,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cos ntdt=0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin nt dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n} = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \cdots\right)$$

Áp dụng định lý 2.15 ta có

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n} = \begin{cases} t & \text{nếu } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } t = \pm\pi \end{cases}$$

Thay $t = \frac{\pi}{2}$ và chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Ví dụ 2.56: Xét hàm số $x(t) = |t|$, $-\pi < t < \pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π. Vì $x(t)$ là hàm chẵn nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sin nt dt = 0\,;\,.t=0\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t dt = \pi\,.,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t\sin nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}.\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k \neq 0 \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{nếu } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$|t| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \frac{\cos 7t}{49} + \cdots\right).$$

Thay ta được $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$..

Ví dụ 2.57: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn chu kỳ 2π xác định như sau

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } -\pi < t < 0 \end{cases}.$$

Các hệ số Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dt = 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{nếu } n = 2k+1 \\ 0 & \text{nếu } n = 2k \end{cases}.$$

Chuỗi Fourier tương ứng

$$\eta(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \cdots\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{(2n+1)}$$

2.2.1.2 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ (*)

Xét $x(t)$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, đặt $y(t) = x\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ thì $y(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π. Nếu $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet thì $y(t)$ cũng thỏa mãn điều kiện Dirichlet, do đó có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$$

$y(t) = x\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ tương đương với $x(t) = y\left(\frac{\pi}{l}t\right)$. Vậy

$$x(t) = y\left(\frac{\pi}{l}t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi}{l}t\right) \quad \textbf{(2.61)}$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} x(t)dt;\ a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt;\ n = 1, 2, ... \quad \textbf{(2.62)}$$

Nhận xét 2.2:

1. Hàm tuần hoàn chu kỳ 2π là một trường hợp đặc biệt của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, vì vậy các nhận xét sau đây được giả thiết là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$. Ngoài ra do tính chất tích phân của hàm tuần hoàn nên các hệ số Fourier (2.62) cũng có thể tính như sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_c^{2l+c} x(t)dt\ ;\ a_n = \frac{1}{l}\int_c^{2l+c} x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{2l+c} x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n = 1, 2, ...\forall c \quad \textbf{(2.63)}$$

2. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn, do đó các hệ số Fourier (2.62) thỏa mãn

$$a_0 = a_n = 0;\quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n = 1, 2, ... \quad \textbf{(2.64)}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ, do đó các hệ số Fourier (2.62) thỏa mãn

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)dt \ ; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt \ ; \ n = 1, 2, ... \qquad \textbf{(2.65)}$$

4. Trường hợp $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng $\left(a, b\right)$, ta có thể mở rộng thành hàm tuần hoàn chu kỳ $2l = b - a$. Khi đó $x(t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier với các hệ số Fourier được tính như sau

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)dt \ ; \ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\cos\frac{2n\pi}{b-a}tdt \ ;$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\sin\frac{2n\pi}{b-a}tdt \ ; \ n = 1, 2, ... \qquad \textbf{(2.66)}$$

5. Trường hợp $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng $\left(0, l\right)$, ta có thể mở rộng thành hàm chẵn hoặc hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$. Nếu mở rộng thành hàm chẵn thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.65) và nếu mở rộng thành hàm lẻ thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.64).

Ví dụ 2.58: Xét hàm số $x(t) = t$, $-1 < t < 1$; tuần hoàn chu kỳ 2. Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^1 tdt = 0, \ a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^1 t\cos n\pi tdt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^1 t\sin ntdt = 2\int_0^1 t\sin n\pi tdt = 2\left[-\frac{t\cos n\pi t}{n\pi} + \frac{\sin n\pi t}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi t}{n} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi t - \frac{\sin 2\pi t}{2} + \frac{\sin 3\pi t}{3} - \frac{\sin 4\pi t}{4} + \cdots\right).$$

Áp dụng Định lý Dirichlet với $t = \frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

2.2.1.3 Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

Từ công thức (2.61) nếu ta đặt

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; \ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \textbf{(2.67)}$$

và góc φ_n, $0 \le \varphi_n < 2\pi$ xác định bởi

$$\cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n} \tag{2.68}$$

khi đó công thức (2.61) có thể viết lại

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi}{l}t = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t - \varphi_n\right) \tag{2.69}$$

Công thức (2.61) được gọi là ***chuỗi Fourier dạng cầu phương*** (Quadrature Fourier Series). Công thức (2.69) được gọi là ***chuỗi Fourier dạng cực*** của $x(t)$.

2.2.1.4 Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series) (*)

Thay hàm sin và cosin theo các hàm mũ từ công thức Euler (1.17) vào công thức (2.59) ta được

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{\mathrm{int}} + e^{-\mathrm{int}}}{2} + b_n \frac{e^{\mathrm{int}} - e^{-\mathrm{int}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{\mathrm{int}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-\mathrm{int}}$$

Vậy ta có thể viết chuỗi Fourier dưới dạng phức

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{int}} \tag{2.70}$$

trong đó các hệ số Fourier phức c_n xác định như sau

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 \\ c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_0 = 2c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \tag{2.71}$$

Mặt khác, tương tự hệ trực giao (2.55) ta có thể kiểm tra được rằng hệ các hàm phức

$$\left\{e^{imt}\right\}_{m=-\infty}^{\infty} \quad \text{thỏa mãn} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{int}} e^{-imt}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } n = m \\ 0 & \text{nếu } n \neq m \end{cases} \tag{2.72}$$

do đó đây là một hệ trực giao.

Vì vậy các hệ số Fourier phức (2.71) có thể tính trực tiếp

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} x(t)e^{-\mathrm{int}}dt, \quad \forall c \tag{2.73}$$

Trường hợp hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ có khai triển Fourier dạng phức

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}t}, \; c_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} x(t)e^{-i\frac{n\pi}{l}t}dt, \quad \forall c \tag{2.74}$$

Nếu ký hiệu $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ là tần số cơ bản của hàm tuần hoàn chu kỳ T_0 thì công thức (2.74) được biểu diễn

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi f_0 t}, \; c_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} x(t)e^{-i2n\pi f_0 t}dt \;, \; \forall c \qquad \textbf{(2.75)}$$

Ví dụ 2.59: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn ví dụ 2.57

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(t)e^{-i\,\mathrm{nt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\,\mathrm{nt}}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{nếu } \; n = 0 \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn } n \neq 0 \\ \dfrac{1}{in\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Vậy, hàm bước nhảy đơn vị có khai triển Fourier

$$\eta(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2m+1)it}}{2m+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{(2n+1)}.$$

Ví dụ 2.60: Tìm khai triển Fourier của hàm mũ $x(t) = e^{at}$, $-\pi < t < \pi$ tuần hoàn chu kỳ 2π.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{at}e^{-i\,\mathrm{nt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)t}dt = \left.\frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)}\right|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$\left.\frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)}\right|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n\frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n\frac{(a+in)\sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)}.$$

Vậy hàm có chuỗi Fourier tương ứng

$$e^{at} \sim \frac{\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(a+in)}{a^2+n^2}e^{i\,\mathrm{nt}}.$$

Định lý 2.16: Giả sử hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} \left|x(t)\right|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2 \qquad \textbf{(2.76)}$$

Chứng minh:

$$\frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0}\left|x(t)\right|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} x(t)\overline{x(t)}dt = \frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{m\pi}{l}t}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{c_n}e^{-i\frac{n\pi}{l}t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m\overline{c_n}\,e^{i\frac{m\pi}{l}t - i\frac{n\pi}{l}t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2$$

Nhận xét 2.3: Công thức (2.69), (2.71), (2.74) cho thấy dạng cực, dạng phức và dạng cầu phương của chuỗi Fourier là hoàn toàn tương đương, nghĩa là từ dạng này ta có thể biểu diễn duy nhất qua dạng kia và ngược lại. Vậy thì dạng nào được ứng dụng tốt nhất. Câu trả lời là phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể. Nếu bài toán thiên về giải tích thì sử dụng dạng phức sẽ thuận lợi hơn vì việc tính các hệ số c_n dễ hơn. Tuy nhiên đối với các hàm dạng sóng được thực hiện trong phòng thí nghiệm thì dạng cực sẽ thuận tiện hơn, vì các thiết bị đo lường như vôn kế, máy phân tích phổ sẽ đọc được biên độ và pha. Dùng các kết quả thí nghiệm đo được các nhà kỹ thuật có thể vẽ các vạch phổ một phía là các đoạn thẳng ứng với mỗi giá trị biên độ A_n tại tần số $f_n = nf_0 = \dfrac{n}{T_0}$.

2.2.2 Phép biến đổi Fourier hữu hạn

Mỗi hàm tuần hoàn được xác định duy nhất bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại (công thức 2.55, 2.60, 2.71, 2.72), điều này được suy ra từ tính chất trực giao của hệ 2.53, 2.70.

Tương tự ta có thể chứng minh được hệ các hàm phức tuần hoàn $\left\{e^{i2\pi nf}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn trên đoạn $\left[0,\,1\right]$

$$\int_0^1 e^{i2\pi nf}e^{-i2\pi mf}df = \begin{cases}1 & \text{nếu } n=m\\ 0 & \text{nếu } n\neq m\end{cases}. \qquad \textbf{(2.77)}$$

Dựa vào hệ trực chuẩn này ta định nghĩa phép biến đổi Fourier hữu hạn của các tín hiệu rời rạc như sau.

Định nghĩa 2.5: *Biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc* $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *là*

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} \qquad \textbf{(2.78)}$$

nếu chuỗi ở vế phải hội tụ.

Công thức biến đổi ngược

$$x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df \qquad \textbf{(2.79)}$$

Hàm $\widehat{X}(f)$ tuần hoàn có chu kỳ 1.

Ví dụ 2.61: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$, N là 1 số tự nhiên.

$$\mathrm{rect}_N(n) = \begin{cases}1 & \text{nếu } 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

Giải: $\widehat{X}(f) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi nf} = \frac{1-e^{-i2\pi Nf}}{1-e^{-i2\pi f}}$

$$= \frac{e^{-i\pi Nf}}{e^{-i\pi f}} \cdot \frac{e^{i\pi Nf} - e^{-i\pi Nf}}{e^{i\pi f} - e^{-i\pi f}} = e^{-i\pi(N-1)f} \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}.$$

Nhận xét 2.4:

1. Trong công thức biến đổi Fourier 2.76, 2.77 đối số f được ký hiệu cho tần số. Có tài liệu không biểu diễn biến đổi Fourier qua miền tần số mà qua miền tần số góc ω như sau

$$\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}, \; x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{ \widehat{X}(\omega) \right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega n}d\omega \qquad \textbf{(2.80)}$$

Hai cách biểu diễn này tương ứng với nhau qua phép đổi biến số $\omega = 2\pi f$.

2. Một điều kiện đủ để tín hiệu rời rạc $\left\{ x(n) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tồn tại biến đổi Fourier hữu hạn là

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right| < \infty.$$

3. Công thức biến đổi ngược 2.77 là khai triển Fourier dạng phức của hàm $\widehat{X}(f)$ đối với hệ trực chuẩn 2.75. Nếu biến đổi Fourier xét trong miền ω thì biến đổi ngược của $\widehat{X}(\omega)$ là khai triển Fourier dạng phức đối với hệ trực giao 2.10. Vì vậy biến đổi ngược tồn tại khi $\widehat{X}(f)$ (hoặc $\widehat{X}(\omega)$) thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

Tính chất 2.2: Tương tự phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier hữu hạn có các tính chất sau:

1. Tuyến tính:

$$\mathscr{F}\left\{ Ax(n) + By(n) \right\} = A\mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} + B\mathscr{F}\left\{ y(n) \right\} \qquad \textbf{(2.81)}$$

Chứng minh: $\mathscr{F}\left\{ Ax(n) + By(n) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(Ax(n) + By(n) \right) e^{-i2\pi nf}$

$$= A\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} + B\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-i2\pi nf} = A\mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} + B\mathscr{F}\left\{ y(n) \right\}.$$

2. Trễ:

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} \;\Rightarrow\; \mathscr{F}\left\{ x(n-n_0) \right\} = e^{-i2\pi n_0 f}\widehat{X}(f). \qquad \textbf{(2.82)}$$

Chứng minh:

$$\mathscr{F}\left\{ x(n-n_0) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-i2\pi nf} = e^{-i2\pi n_0 f}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-i2\pi(n-n_0)f}$$

$$= e^{-i2\pi n_0 f}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = e^{-i2\pi n_0 f}\mathscr{F}\left\{ x(n) \right\}.$$

3. Dịch chuyển ảnh:

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{x(n)\right\} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{i2\pi nf_0}x(n)\right\}=\widehat{X}(f-f_0). \quad \textbf{(2.83)}$$

4. Điều chế:

$$\mathscr{F}\left\{x(n)\cos(2\pi nf_0)\right\}=\mathscr{F}\left\{x(n)\frac{e^{i2\pi nf_0}+e^{-i2\pi nf_0}}{2}\right\}=\frac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}. \quad \textbf{(2.84)}$$

5. Liên hợp phức: Nếu $\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{x(n)\right\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}$ thì

$$\mathscr{F}\left\{\overline{x(n)}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{x(n)}e^{-i2\pi nf}=\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{i2\pi nf}}=\overline{\widehat{X}(-f)} \quad \textbf{(2.85)}$$

Khi $x(n)$ thực thì $\widehat{X}(f)=\overline{\widehat{X}(-f)}$.

6. Biến số đảo: Nếu $\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{x(n)\right\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}$ thì

$$\mathscr{F}\left\{x(-n)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)e^{-i2\pi nf}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)e^{-i2\pi(-n)(-f)}=\widehat{X}(-f) \quad \textbf{(2.86)}$$

7. Tích chập (xem công thức 1.102):

$$\mathscr{F}\left\{x(n)*y(n)\right\}=\mathscr{F}\left\{x(n)\right\}\cdot\mathscr{F}\left\{y(n)\right\} \quad \textbf{(2.87)}$$

Chứng minh: Ta có $z(n)=x(n)*y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$

$$\widehat{Z}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)\right)e^{-i2\pi nf}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-i2\pi kf}\right)y(n-k)e^{-i2\pi(n-k)f}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)e^{-i2\pi(n-k)f}\right)x(k)e^{-i2\pi kf}=\widehat{X}(f)\widehat{Y}(f)$$

8. Tích chập ảnh:

$$\mathscr{F}\left\{x(n)\cdot y(n)\right\}=\mathscr{F}\left\{x(n)\right\}*\mathscr{F}\left\{y(n)\right\} \quad \textbf{(2.88)}$$

Chứng minh: $\mathscr{F}\left\{x(n)\cdot y(n)\right\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)e^{-i2\pi nf}$. Theo 2.71 ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)e^{-i2\pi nf}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\int_0^1 e^{-i2\pi(m-n)u}du\right)y(n)e^{-i2\pi nf}$$

$$=\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-i2\pi(m-n)u}\right)y(n)e^{-i2\pi nf}du$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-i2\pi m u} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-i2\pi n(f-u)} \right) du = \int_0^1 \widehat{X}(u) \widehat{Y}(f-u) du = \widehat{X}(f) * \widehat{Y}(f).$$

9. Biến đổi của hàm tương quan

$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{y(m-n)}$ gọi là hàm tương quan của hai dãy tín hiệu $\{x(n)\}$, $\{y(n)\}$,

$r_{x,x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{x(m-n)}$ gọi là hàm tự tương quan của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$.

$$\mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n) \right\} = \widehat{X}(f) \overline{\widehat{Y}(f)} \qquad \textbf{(2.89)}$$

Chứng minh: $r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{y(m-n)} = x(n) * \overline{y(-n)} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n) \right\} = \widehat{X}(f) \overline{\widehat{Y}(f)}$.

Hoặc ta có thể chứng minh trực tiếp như sau:

$$\mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{y(m-n)} \right) e^{-i2\pi n f}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(m-n)} e^{-i2\pi(n-m)f} \right) e^{-i2\pi m f}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(m-n) e^{-i2\pi(m-n)f} \right)} e^{-i2\pi m f} = \widehat{X}(f) \overline{\widehat{Y}(f)}.$$

Áp dụng công thức (2.89) vào hàm tự tương quan của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ ta có định lý Weiner-Khinchin:

$$\mathscr{F}\left\{ r_{x,x}(n) \right\} = \left| \widehat{X}(f) \right|^2. \qquad \textbf{(2.90)}$$

Trường hợp $x(n)$, $y(n)$ thực,

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(m-n) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n) \right\} = \widehat{X}(f) \widehat{Y}(-f).$$

10. Đạo hàm ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} \;\; \Rightarrow \;\; \mathscr{F}\left\{ n x(n) \right\} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df} \qquad \textbf{(2.91)}$$

Chứng minh: $\mathscr{F}\left\{ n x(n) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) e^{-i2\pi n f} = \frac{1}{-i2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{de^{-i2\pi n f}}{df} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df}$

11. Đẳng thức Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}df\,;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 = \int_0^1 \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df\,. \tag{2.92}$$

Chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(n)}\left(\int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df\right) = \int_0^1 \widehat{X}(f)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(n)}e^{i2\pi nf}\right)df$$

$$= \int_0^1 \widehat{X}(f)\left(\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{i2\pi n(-f)}}\right)df = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}df\,.$$

12. Quan hệ giữa phép biến đổi Fourier rời rạc và phép biến đổi Z (mục 1.6 chương 1)

Biến đổi Z của dãy $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, miền hội tụ $r < \left|z\right| < R$

thỏa mãn $r < 1 < R$, có biến đổi Fourier rời rạc $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$.

Vậy

$$\widehat{X}(f) = X(z)\Big|_{z=e^{i2\pi f}} \tag{2.93}$$

Ví dụ 2.62: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc

$$x(n) = (n+1)a^n\cos(2\pi nf_0)\eta(n+2),\ \left|a\right| < 1\,.$$

Giải: Xét $x(n) = (n+1)a^n\eta(n+2)$, ta có

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)a^n\eta(n+2)z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+1)a^n z^{-n}\,,$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+1)a^n z^{-n} = -\frac{z^2}{a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n z^{-n}\,.$$

Mặt khác, nếu $\left|z\right| < 1$ thì $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ và $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$.

Do đó $\sum_{n=-2}^{\infty} (n+1)a^n z^{-n} = -\frac{z^2}{a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{a}{z}\right)^n = -\frac{z^2}{a^2} + \frac{z^2}{(z-a)^2}; \left|z\right| > a$, với $a < 1$.

$$\mathscr{F}\left\{(n+1)a^n\eta(n+2)\right\} = -\frac{z^2}{a^2} + \frac{z^2}{(z-a)^2}\Bigg|_{z=e^{i2\pi f}} = -\frac{e^{i4\pi f}}{a^2} + \frac{e^{i4\pi f}}{(e^{i2\pi f}-a)^2}\,.$$

Sử dụng tính chất điều chế (2.84) ta có

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{x(n)\right\} = \mathscr{F}\left\{(n+1)a^n\cos(2\pi nf_0)\eta(n+2)\right\}$$

$$= -\frac{e^{i4\pi(f-f_0)} + e^{i4\pi(f+f_0)}}{2a^2} + \frac{e^{i4\pi(f-f_0)}}{2(e^{i2\pi(f-f_0)} - a)^2} + \frac{e^{i4\pi(f+f_0)}}{2(e^{i2\pi(f+f_0)} - a)^2}.$$

2.2.3 Phép biến đổi Fourier

Khởi đầu chuỗi Fourier được xây dựng với mục đích giải quyết các bài toán tương ứng với các hàm số xác định trong miền bị chặn hoặc hàm tuần hoàn. Để giải quyết các bài toán có các hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực $-\infty < t < \infty$ người ta mở rộng một cách tự nhiên phương pháp chuỗi Fourier, điều này đưa đến phép biến đổi Fourier. Phép biến đổi Fourier là một công cụ mạnh mẽ và đóng vai trò cốt yếu trong nhiều miền ứng dụng như: Giải phương trình vi phân, giải phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu, ứng dụng vào lý thuyết điều khiển và trong nhiều lĩnh vực khác của toán lý thuyết cũng như toán ứng dụng. Đối với các nhà toán học phép biến đổi Fourier là cơ bản hơn phép biến đổi Laplace.

Cơ sở của phép biến đổi Fourier là công thức tích phân Fourier, công thức này có được bằng cách xét chuỗi Fourier trong khoảng khá lớn tùy ý, sau đó cho khoảng này tiến đến vô cùng.

2.2.3.1 Công thức tích phân Fourier (*)

Định lý 2.17: Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, x(t)\,|\, dt < \infty$) và thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức sau và gọi là ***công thức tích phân Fourier***

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du \qquad \textbf{(2.94)}$$

Chứng minh: Vì hàm $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên toàn bộ trục thực nên với mọi $l > 0$ ta có thể khai triển thành chuỗi Fourier trong khoảng $(-l;l)$ (xem nhận xét 2.2, công thức 2.64 và định lý 2.15).

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right),\ \forall t \in (-l;l).$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)du\ ;\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}udu\ ;\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)\sin\frac{n\pi}{l}udu\ ;\ n = 1, 2, ...$$

$$\Rightarrow\ x(t) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} x(u)\left[\cos\frac{n\pi}{l}u\cos\frac{n\pi}{l}t + \sin\frac{n\pi}{l}u\sin\frac{n\pi}{l}t\right]du$$

$$x(t) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du \qquad \textbf{(2.95)}$$

Vì $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, x(t)\,|\, dt < \infty$ nên khi cho $l \to \infty$ ta có:

$$\begin{cases} \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} x(u)du = 0 \\ \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} x(u)\cos\dfrac{n\pi}{l}(t-u)du = \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\dfrac{n\pi}{l}(t-u)du \end{cases} \quad \textbf{(2.96)}$$

Đặt $$\Delta\lambda = \frac{\pi}{l},\ \ F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du \quad \textbf{(2.97)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda F\big(n\Delta\lambda\big) \quad \textbf{(2.98)}$$

Vế phải của (2.98) là tổng tích phân của hàm $F(\lambda)$ trong khoảng $[0,\,\infty)$.

Theo (2.97), $l \to \infty$ khi và chỉ khi $\Delta\lambda \to 0$.

Vậy lấy giới hạn hai vế của (2.95) khi cho $l \to \infty$ và sử dụng (2.96)-(2.98) ta được

$$x(t) = \int\limits_{0}^{\infty} F(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du\,.$$

Vì hàm cosin là hàm chẵn và sin là hàm lẻ nên từ công thức (2.94) ta cũng có:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)\big(\cos\lambda(t-u) + i\sin\lambda(t-u)\big)du$$

Vậy

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{i\lambda(t-u)}du \quad \textbf{(2.99)}$$

Công thức (2.99) được gọi là ***công thức tích phân Fourier phức***.

Nhận xét 2.5:

1. Các công thức trên đã sử dụng quy ước (2.60) tại những điểm không liên tục.
2. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn thì

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\lambda t d\lambda \int\limits_{0}^{\infty} x(u)\cos\lambda u du\,. \quad \textbf{(2.100)}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ thì

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \sin\lambda t d\lambda \int\limits_{0}^{\infty} x(u)\sin\lambda u du\,. \quad \textbf{(2.101)}$$

4. Các công thức tích phân Fourier (2.94), (2.99) và định lý 2.17 được phát biểu và chứng minh cho trường hợp $x(t)$ là hàm thực. Tuy nhiên do tính chất tuyến tính của tích phân

nên các kết quả trên vẫn còn đúng cho trường hợp hàm phức biến thực $x(t)$ khả tích tuyệt đối có phần thực, phần ảo thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

5. Đổi biến $\lambda = 2\pi f \Rightarrow d\lambda = 2\pi df$, thay vào công thức (2.99) ta được

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{i2\pi f(t-u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi f u} du \right) e^{i2\pi f t} df \qquad \textbf{(2.102)}$$

Sử dụng công thức (2.102) ta có thể định nghĩa biến đổi Fourier của hàm không tuần hoàn như sau.

2.2.3.2 Định nghĩa và tính chất của phép biến đổi Fourier

Định nghĩa 2.6: *Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên trục thực và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Biến đổi Fourier (viết tắt là FT) của $x(t)$ là*

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{ x(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt,\ f \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.103)}$$

Trong kỹ thuật, nếu $x(t)$ là hàm dạng sóng (waveform) theo thời gian t thì $\widehat{X}(f)$ được gọi là phổ hai phía của $x(t)$ (two - sided spectrum), còn tham số f chỉ tần số, có đơn vị là Hz.

Từ công thức tích phân Fourier (2.102) ta có *công thức biến đổi ngược*

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{ \widehat{X}(f) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) e^{i2\pi f t} df \qquad \textbf{(2.104)}$$

Hàm ảnh qua phép biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$ có thể viết dưới dạng cực

$$\widehat{X}(f) = \left| \widehat{X}(f) \right| e^{i\varphi(f)} \qquad \textbf{(2.105)}$$

trong đó

$$\left| \widehat{X}(f) \right| = \sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}},\ \ \varphi(f) = \angle \widehat{X}(f) \qquad \textbf{(2.106)}$$

được gọi ***dạng biên độ - pha*** của phép biến đổi.

Cặp $x(t), \widehat{X}(f)$ được gọi là cặp biến đổi Fourier.

Tính chất 2.3:

A. Tương tự các tính chất (2.81)-(2.92) của phép biến đổi Fourier hữu hạn, phép biến đổi Fourier có các tính chất được tổng kết trong bảng sau:

(2.107)

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$

2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}\widehat{X}\left(f/a\right)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t-T_d)$	$e^{-i2\pi T_d f}\widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t}x(t)$	$\widehat{X}(f-f_0)$
7. Điều chế	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\widehat{X}(f-f_0)+\frac{1}{2}\widehat{X}(f+f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\left(i2\pi f\right)^n \widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int\limits_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f)+\frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$\left(-i2\pi\right)^{-n}\frac{d^n\widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1(t)*x_2(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$\widehat{X}_1(f)\widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t)x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f)*\widehat{X}_2(f)$

Hàm δ trong tính chất 9. là hàm Dirac (xem mục 3.1 chương 3).

B. Từ công thức định nghĩa biến đổi Fourier (công thức 2.100) ta nhận thấy rằng nếu $x(t)$ là hàm thực chẵn thì biến đổi Fourier của nó cũng là hàm thực chẵn. Kết hợp với tính chất đối ngẫu 4. ta có thể chuyển đổi vai trò của $x(t)$ và $\widehat{X}(f)$ cho nhau, nghĩa là

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{x(t)\right\} \;\Rightarrow\; \mathscr{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\}=x(f) \qquad \textbf{(2.108)}$$

Ví dụ 2.62:

a. $\mathscr{F}\left\{e^{-at}\eta(t)\right\}=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i2\pi ft}df=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(i2\pi f+a)t}dt=\left.\frac{e^{-(i2\pi f+a)t}}{-(i2\pi f+a)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a+i2\pi f}$; $a>0$.

b. $\mathscr{F}\left\{e^{at}\eta(-t)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i2\pi ft}df=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(a-i2\pi f)t}dt=\left.\frac{e^{(a-i2\pi f)t}}{a-i2\pi f}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{a-i2\pi f}$; $a>0$.

Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh ta được

c. $\mathscr{F}\left\{te^{-at}\eta(t)\right\} = \dfrac{1}{-i2\pi}\cdot\dfrac{d}{df}\left(\dfrac{1}{a+i2\pi f}\right) = \dfrac{1}{(a+i2\pi f)^2}$; $a > 0$

$$\mathscr{F}\left\{te^{at}\eta(-t)\right\} = \frac{1}{-i2\pi}\cdot\frac{d}{df}\left(\frac{1}{a-i2\pi f}\right) = \frac{-1}{(a-i2\pi f)^2};\ a > 0$$

2.2.3.3 Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

Nếu $x_1(t)$, $x_2(t)$ là hai hàm bình phương khả tích (gọi là hàm kiểu năng lượng) thì ta có ***đẳng thức Parseval***

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df \qquad \textbf{(2.109)}$$

Khi $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ ta có ***định lý năng lượng Rayleigh***

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df \qquad \textbf{(2.110)}$$

Như vậy năng lượng được tính trong miền thời gian bằng năng lượng được tính trong miền tần số.

Có thể chứng minh công thức (2.109) bằng cách sử dụng công thức tích phân Fourier như sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_2(f)e^{i2\pi ft}df\right)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{X}_2(f)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-i2\pi ft}dt\right)df = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df\,.$$

2.2.3.4 Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ 2.63: Biến đổi Fourier của xung chữ nhật hay hình hộp có độ dài $2a$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a,\ a > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.111)}$$

$$\widehat{\Pi}_a(f) = \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi ft}dt = \begin{cases} 2a & \text{nếu } f = 0 \\ \left.\dfrac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f}\right|_{-a}^{a} & \text{nếu } f \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2a & \text{nếu } f = 0 \\ \dfrac{\sin(2a\pi f)}{\pi f} & \text{nếu } f \neq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{nếu } t \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.112)}$$

Ta có

$$\mathscr{F}\left\{\Pi_a(t)\right\} = 2a\,\mathrm{sinc}(2af). \qquad \textbf{(2.113)}$$

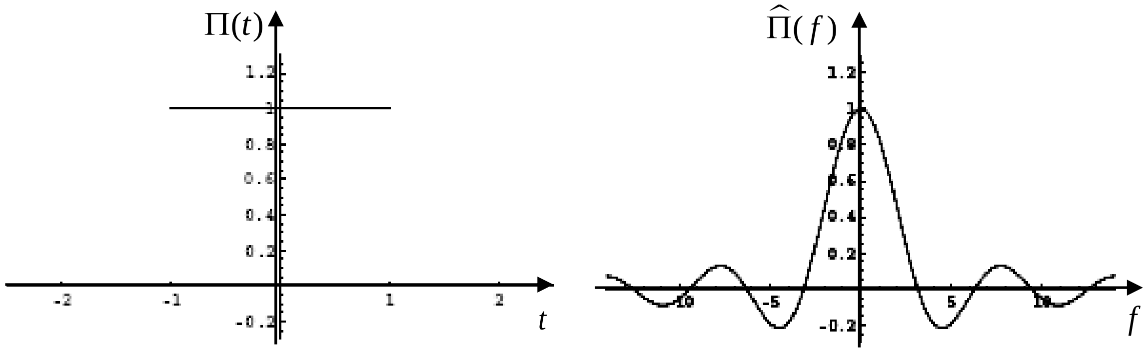
Phép biến đổi Fourier ngược cho phép khôi phục lại giá trị của xung chữ nhật $\Pi_a(t)$ theo tích phân (xem công thức (2.104))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft}\frac{\sin(2a\pi f)}{\pi f}df = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < a \\ 1/2 & \text{nếu } |t| = a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a \end{cases} \qquad \textbf{(2.114)}$$

Tách phần thực, phần ảo (2.114) và nhân π vào hai vế ta được:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)\sin(2a\pi f)}{f}df = \begin{cases} \pi/2 & \text{nếu } |t| < a \\ \pi/4 & \text{nếu } |t| = a \\ 0 & \text{nếu } |t| > a \end{cases};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)\sin(2a\pi f)}{f}df = 0.$$



Hình 2.18: *Đồ thị của* $\Pi(t)$ *và* $\widehat{\Pi}(f)$

Khi $a = 1$ ta có xung:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |t| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |t| > 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \mathscr{F}\left\{\Pi(t)\right\} = 2\,\mathrm{sinc}(2f).$$

Áp dụng công thức (2.108) ta cũng có

$$\mathscr{F}\left\{2\,\mathrm{sinc}(2t)\right\} = \Pi(f).$$

Áp dụng đẳng thức Parseval (2.110) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2a\pi f)}{(\pi f)^2}\cdot df = \int_{-a}^{a} 1^2 \cdot dt = 2a$$

Đặt $u = 2\pi af \Rightarrow du = 2\pi adf$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2a\pi f)}{(\pi f)^2}df = 2a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\cdot\frac{du}{\pi}$.

$$\Rightarrow 2a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cdot\frac{du}{\pi}=2a\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\pi\,.$$

Ví dụ 2.64: Xung tam giác đơn vị

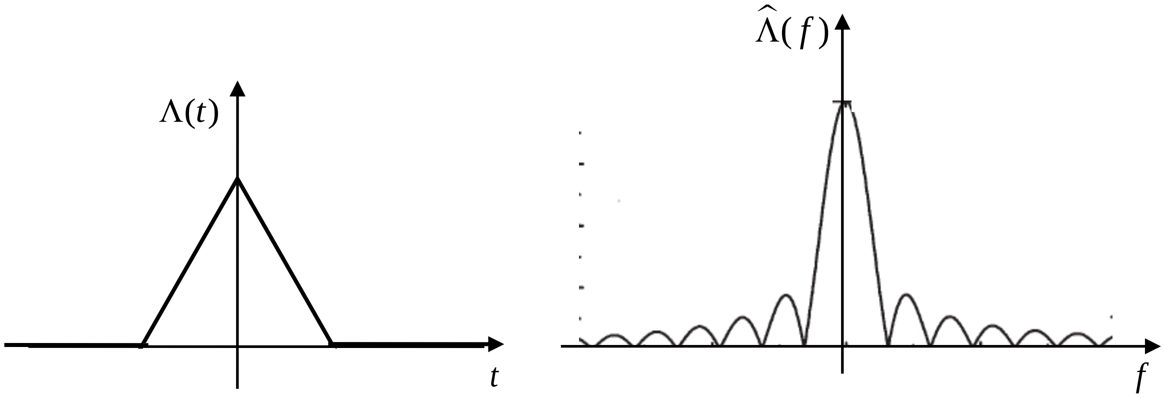
$$\Lambda(t)=\begin{cases}1-|\,t\,| & \text{nếu } \ |\,t\,|<1\\ 0 & \text{nếu } \ |\,t\,|>1\end{cases} \tag{2.115}$$

Sử dụng tính chất tích phân hàm chẵn và quy tắc tích phần từng phần ta được

$$\widehat{\Lambda}(f)=\int_{-1}^{1}\left(1-\left|t\right|\right)e^{-i2\pi ft}dt=2\int_{0}^{1}\left(1-t\right)\cos(2\pi ft)dt=\left(\operatorname{sinc}(f)\right)^2$$

Áp dụng công thức (2.108) của tính chất 2.3.B. ta cũng có

$$\mathscr{F}\left\{\operatorname{sinc}^2(t)\right\}=\Lambda(f)\,.$$



Hình 2.19: *Đồ thị của* $\Lambda(t)$ *và biến đổi Fourier* $\widehat{\Lambda}(f)$

Áp dụng đẳng thức Parseval (2.110) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin c^2(f)\right)^2 df=\int_{-1}^{1}\left(1-\left|t\right|\right)^2\cdot dt=2\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^2\cdot dt=\frac{2}{3}$$

Đặt $u=\pi f\Rightarrow du=\pi df$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi f)}{(\pi f)^4}df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 u}{u^4}\cdot\frac{du}{\pi}\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 u}{u^4}du=\frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 2.65: Hàm phân bố mũ hai phía

$$x(t)=e^{-\lambda|t|},\ \lambda>0\,.$$

$$\widehat{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda|t|}e^{-i2\pi ft}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\,dt$$

Áp dụng quy tắc tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases}U=e^{-\lambda t}\\ dV=\cos 2\pi ftdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dU=-\lambda e^{-\lambda t}dt\\ V=\sin 2\pi ft\,/\,2\pi f\end{cases}$$

$$\widehat{X}(f)=2\left[\frac{e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty}+\frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\,dt\right]=\frac{\lambda}{\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\,dt$$

Tiếp tục đặt

$$\begin{cases}U=e^{-\lambda t}\\ dV=\sin 2\pi ftdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dU=-\lambda e^{-\lambda t}dt\\ V=-\cos 2\pi ft\,/\,2\pi f\end{cases}$$

$$\widehat{X}(f)=\frac{\lambda}{\pi f}\left[-\frac{e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty}-\frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\,dt\right]=\frac{\lambda}{\pi f}\left(\frac{1}{2\pi f}-\frac{\lambda}{4\pi f}\widehat{X}(f)\right)$$

$$\widehat{X}(f)=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2f^2}.$$

Hoặc áp dụng công thức (2.32) ta cũng có

$$\widehat{X}(f)=2\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\,dt=2\left(\frac{s}{s^2+4\pi^2f^2}\right)\Bigg|_{s=\lambda}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2f^2}.$$

Sử dụng tính chất 2.3-B và công thức (2.108) ta có: $\mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2}\right\}=e^{-\lambda|f|},\ \lambda>0$.

Vậy

$$\lambda>0;\ \mathscr{F}\left\{e^{-\lambda|t|}\right\}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2f^2}\ ,\ \mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2}\right\}=e^{-\lambda|f|}\qquad\textbf{(2.116)}$$

Công thức (2.116) có thể viết $\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-\lambda|f|}\right\}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2};\ \lambda>0$. Ta có thể tìm lại kết quả này từ định nghĩa công thức (2.104) như sau.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi ft}e^{-\lambda|f|}df=\int_{-\infty}^{0}e^{(i2\pi t+\lambda)f}df+\int_0^{\infty}e^{(i2\pi t-\lambda)f}df=\frac{e^{(i2\pi t+\lambda)f}}{i2\pi t+\lambda}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{(i2\pi t-\lambda)f}}{i2\pi t-\lambda}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{i2\pi t+\lambda}-\frac{1}{i2\pi t-\lambda}=\frac{2\lambda}{4\pi^2t^2+\lambda^2}$$

Ví dụ 1.21: Xét hàm hữu tỉ: $x(t)=\frac{1}{t^2+c^2},\ c>0$

Áp dụng công thức (1.96) và (1.106)-(1.107) ta có

$$\mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2}\right\}=e^{-\lambda|f|},\ \lambda>0.$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{t^2+c^2}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{\pi}{c}.\frac{4\pi c}{4\pi^2t^2+4\pi^2c^2}\right\}=\frac{\pi}{c}\mathscr{F}\left\{\frac{4\pi c}{4\pi^2t^2+4\pi^2c^2}\right\}=\frac{\pi}{c}e^{-2\pi c|f|},\ c>0$$

Vậy

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{t^2+c^2}\right\}=\frac{\pi}{c}e^{-2\pi c|f|},\ c>0 \quad \textbf{(1.111)}$$

Ví dụ 2.66: Tìm biến đổi Fourier ngược của $\widehat{X}(f)=\dfrac{1}{(1+i2\pi f)(1-i4\pi f)^2}$

Giải: Đặt $s=i2\pi f \Rightarrow \dfrac{1}{(1+i2\pi f)(1-i4\pi f)^2}=\dfrac{1}{(1+s)(1-2s)^2}$

$$\frac{1}{(1+s)(1-2s)^2}=\frac{1}{4(s+1)(s-1/2)^2}=\frac{1/9}{s+1}-\frac{1/9}{s-1/2}+\frac{1/6}{(s-1/2)^2}$$

$$=\frac{1/9}{1+i2\pi f}+\frac{1/9}{1/2-i2\pi f}+\frac{1/6}{(1/2-i2\pi f)^2}$$

Từ kết quả ví dụ 2.62 ta có

$$x(t)=\frac{1}{9}e^{-t}\eta(t)+\frac{1}{9}e^{t/2}\eta(-t)-\frac{1}{6}te^{t/2}\eta(-t).$$

2.2.4 Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT: Discrete Fourier Tranform)

Trong thực tế các dữ liệu nhận được không thể là hàm liên tục mà thường là các dữ liệu số rời rạc. Chẳng hạn, ngay cả khi đo các tín hiệu liên tục người ta cũng chỉ thực hiện một số hữu hạn các lần đo, đó là một mẫu của tín hiệu đầy đủ. Các phương tiện số (CD, DVD, ..) hoặc các dữ liệu thí nghiệm được lưu trữ trong máy tính cũng chỉ là các tín hiệu được lấy mẫu tại những khoảng thời gian rời rạc. Vì vậy mặc dù chuỗi Fourier về mặt lý thuyết là rất quan trọng không thể chối cãi được nhưng theo quan điểm tính toán trong thực tế cần phải chuyển các không gian hàm vô hạn chiều (của các hàm liên tục) về các không gian véc tơ hữu hạn chiều của các dữ liệu mẫu.

Thông thường một tín hiệu liên tục $x(t)$ xác định trong đoạn $[a,b]$, máy tính chỉ có thể lưu trữ các giá trị đo được của nó tại một số hữu hạn *điểm mẫu* $a\le t_0<t_1<...<t_n\le b$. Đơn giản nhất người ta xét các điểm mẫu cách đều nhau.

$$t_j=a+jh,\ j=0,...,n,\ \text{trong đó } h=\frac{b-a}{n} \text{ là tốc độ mẫu.}$$

Khi xử lý tín hiệu $x(t)$, biến số t chỉ tời gian và t_j chỉ thời điểm lấy mẫu lần thứ j. Tốc độ mẫu h rất cao, thường lấy khoảng $10.10^{-3}-20.10^{-3}$ giây.

Chuỗi Fourier thích hợp với các hàm tuần hoàn, tổng của chuỗi Fourier rời rạc thích hợp với các tín hiệu được lấy mẫu tuần hoàn, (trong thực tế các tín hiệu lấy mẫu hiếm khi tuần hoàn, tuy nhiên vì mục đích tính toán giải tích người ta thường mở rộng tuần hoàn từ tín hiệu mẫu gốc). Để đơn giản ta chọn chu kỳ 2π (trường hợp chu kỳ khác có thể nhận được bằng phép đổi biến). Ở đây ta chọn khoảng $[0;2\pi]$ thay cho $[-\pi;\pi]$. Các điểm mẫu tương ứng

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad t_2 = \frac{4\pi}{n}, \ \dots \ t_j = \frac{2j\pi}{n}, \ \dots \ t_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n} \qquad \textbf{(2.117)}$$

Tính tuần hoàn đòi hỏi $x(0) = x(2\pi)$, do đó giá trị tại điểm mẫu $t_n = 2\pi$ được bỏ qua. Việc lấy mẫu (có thể nhận giá trị phức) của tín hiệu hoặc hàm số $x(t)$ tại các điểm mẫu cung cấp một *véc tơ mẫu*

$$\mathbf{x} = \left(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\right) = \left(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})\right), \text{trong đó } x_j = x(t_j) = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \qquad \textbf{(2.118)}$$

Sự lấy mẫu không thể phân biệt được giữa những hàm có cùng giá trị mẫu tại tất cả các điểm mẫu, như vậy chúng phải được đồng nhất như nhau theo quan điểm lấy mẫu. Chẳng hạn hàm tuần hoàn

$$x(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

Có các giá trị mẫu

$$x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = \exp\left(in\frac{2j\pi}{n}\right) = e^{2j\pi i} = 1 \text{ với mọi } j = 0, \dots, n-1.$$

Vì vậy không thể phân biệt với hàm hằng $c(t) \equiv 1$, cả hai hàm này đều có véc tơ mẫu là $(1,1,\dots,1)$. Điều này dẫn đến một hệ quả quan trọng cần tránh, đó là việc lấy mẫu tại n điểm cách đều nhau không thể phân biệt các tín hiệu tuần hoàn tần số n. Một cách tổng quát hơn, hai tín hiệu mũ giá trị phức

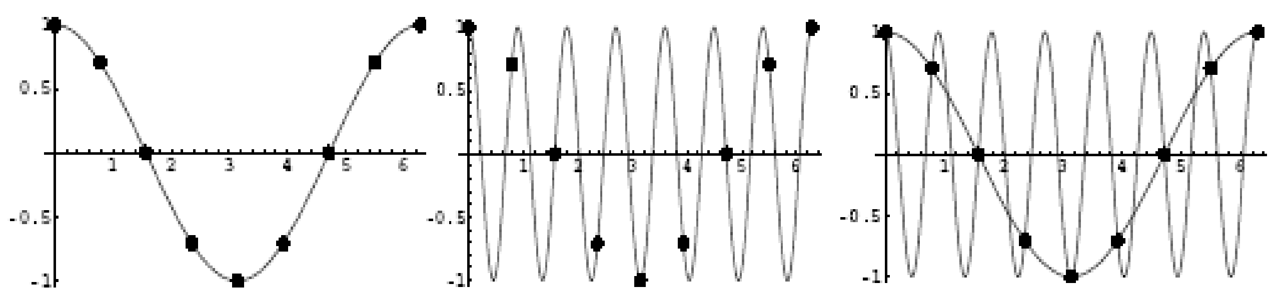
$$e^{i(k+n)t} \sim e^{ikt} \qquad \textbf{(1.119)}$$

là không thể phân biệt khi lấy mẫu. Vì vậy chỉ cần chọn n hàm mũ phức đầu tiên sau đây làm cơ sở để biểu diễn cho các tín hiệu được lấy mẫu bất kỳ tuần hoàn chu kỳ 2π với n điểm mẫu.

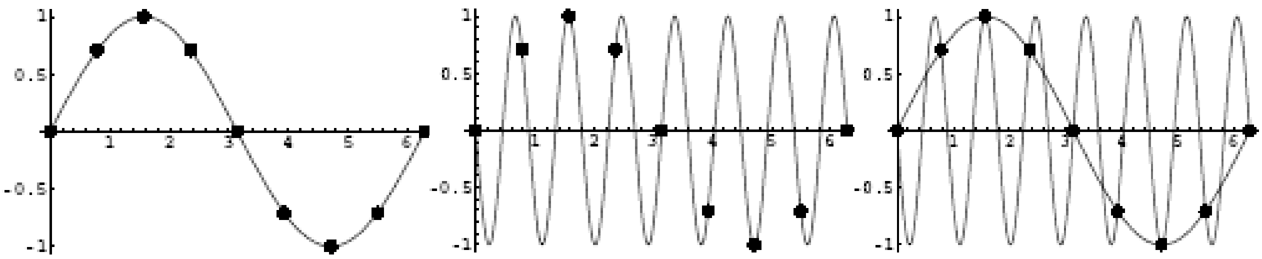
$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = e^{it}, \qquad x_2(t) = e^{i2t}, \ \dots \ x_{n-1}(t) = e^{i(n-1)t} \qquad \textbf{(1.120)}$$

Đặc biệt hàm mũ tần số "âm" e^{-ikt} có thể chuyển về dạng $e^{i(n-k)t}$ có cùng giá trị mẫu. Chẳng hạn e^{-it} và $e^{i(n-1)t}$ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu. Tuy nhiên ngoài giá trị mẫu hai hàm này hoàn toàn khác nhau, hàm e^{-it} có tần số thấp còn $e^{i(n-1)t}$ có tần số cao hơn.

Hình sau cho sự so sánh đồ thị của e^{-it} và e^{i7t} với $n = 8$ điểm mẫu.



Hình 2.20: *Đồ thị của* $\cos t$ *và* $\cos 7t$ *với 8 điểm mẫu*



Hình 2.21: *Đồ thị của* $\sin t$ *và* $-\sin 7t$ *với 8 điểm mẫu*

Vì không thể phân biệt giá trị mẫu của các hàm mũ có tần số lớn hơn n (xem công thức 2.122) do đó chỉ có thể khai triển $x(t)$ thành tổng của các hàm mũ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu dưới dạng

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \ldots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} \qquad \textbf{(1.121)}$$

trong đó

$$x(t_j) = p(t_j) \text{ với mọi } j = 0, \ldots, n-1 \qquad \textbf{(1.122)}$$

Như vậy $p(t)$ là đa thức lượng giác nội suy bậc $\le n-1$ đối với các dữ liệu mẫu $x_j = x(t_j)$. Nếu $x(t)$ nhận giá trị thực thì đa thức lượng giác nội suy tương ứng được chọn là phần thực của $p(t)$.

Tìm hàm $p(t)$ thỏa mãn điều kiện (1.122) tương đương tìm các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} = x(0) \\ c_0 + e^{i2\pi/n} c_1 + e^{i4\pi/n} c_2 + \cdots + e^{i2(n-1)\pi/n} c_{n-1} = x\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + e^{i2(n-1)\pi/n} c_1 + e^{i4(n-1)\pi/n} c_2 + \cdots + e^{i2(n-1)(n-1)\pi/n} c_{n-1} = x\left(\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(2.123)}$$

Định thức của ma trận hệ số là định thức Vandermonde khác 0 nên hệ phương trình (2.123) luôn tồn tại duy nhất nghiệm.

Xét các véc tơ

$$\omega_k = \left(1, e^{i2k\pi/n}, e^{i4k\pi/n}, \ldots, e^{i2(n-1)k\pi/n}\right), k = 0, \ldots, n-1 \qquad \textbf{(2.124)}$$

Cụ thể:

$$\begin{cases} \omega_0 = \left(1,1,1,\dots,1\right) \\ \omega_1 = \left(1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)\pi/n}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_{n-1} = \left(1, e^{i2(n-1)\pi/n}, e^{i4(n-1)\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)(n-1)\pi/n}\right) \end{cases}$$

Đặt $\mathscr{E} = e^{i2\pi/n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$

$$\begin{cases} \omega_0 = \left(1,1,1,\dots,1\right) \\ \omega_1 = \left(1, \mathscr{E}, \mathscr{E}^2, \dots, \mathscr{E}^{(n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_{n-1} = \left(1, \mathscr{E}^{n-1}, \mathscr{E}^{2(n-1)}, \dots, \mathscr{E}^{(n-1)(n-1)}\right) \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình trên được viết lại dưới dạng véc tơ

$$\mathbf{x} = c_0\omega_0 + c_1\omega_1 + \cdots + c_{n-1}\omega_{n-1} \qquad \textbf{(2.125)}$$

Nói cách khác ta có thể tính các hệ số Fourier rời rạc $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ của $x(t)$ bằng cách biểu diễn véc tơ mẫu $\mathbf{x}$ (công thức 2.118) thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ mẫu hàm mũ cơ sở $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

Ta sẽ chỉ ra rằng hệ véc tơ $\left\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn. Khi đó bài toán tìm hàm $p(t)$ thỏa mãn điều kiện (1.122) tương đương biểu diễn véc tơ mẫu theo cơ sở trực chuẩn này.

Định lý 2.12: Hệ các véc tơ $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$ với tích vô hướng trung bình xác định như sau

$$\left\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{y_j}\ ;\ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),\ \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \qquad \textbf{(2.126)}$$

Chứng minh: Để chứng minh định lý ta xét $\mathscr{E} = e^{i2\pi/n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$

Có n số phức khác nhau là n căn bậc n của 1, trong đó có 1 và các lũy thừa của $\mathscr{E}$, cụ thể

$$\mathscr{E}^k = e^{i2k\pi/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ ;\ k = 0, \dots, n-1 \qquad \textbf{(2.127)}$$

Từ công thức

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

Suy ra

$$1 + \mathscr{E}^k + \mathscr{E}^{2k} + \cdots + \mathscr{E}^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{nếu } k = 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 < k < n \end{cases} \qquad \textbf{(2.128)}$$

Ngoài ra từ tính chất $\varepsilon^{k+n} = \varepsilon^k$ có thể mở rộng công thức (2.128) cho mọi số nguyên k bất kỳ,

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{nếu } k \text{ là bội số của } n \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad \textbf{(2.129)}$$

Từ (2.128) và (2.129) ta có

$$\left\langle \omega_k ; \omega_l \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{jk}\overline{\varepsilon^{jl}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{j(k-l)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = l \\ 0 & \text{nếu } k \neq l \end{cases} ;\ k = 0,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.130)}$$

Vậy $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Từ định lý 2.12 ta suy ra rằng các hệ số $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ trong công thức (1.124) là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$

$$c_k = \left\langle \mathbf{x} ; \omega_k \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{e^{ikt_j}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ikt_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-jk} x_j \quad \textbf{(2.131)}$$

Nói cách khác, hệ số Fourier rời rạc c_k có được bằng cách lấy trung bình của các giá trị mẫu của hàm tích $x(t)e^{-ikt}$.

Chuyển từ tín hiệu $x(t)$ thành các hệ số Fourier rời rạc gọi là phép biến đổi Fourier rời rạc, ký hiệu

$$DFT\left\{x(t)\right\} = \widehat{X}(k) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1});\ c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-jk} x_j ,\ x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \quad \textbf{(2.132)}$$

Biến đổi ngược

$$IDFT\left\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\right\} = \left\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\right\},\ x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{jk} c_k \quad \textbf{(2.133)}$$

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ là các giá trị mẫu của hàm $x(t)$ và đa thức lượng giác $p(t)$ thỏa mãn

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \dots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} . \quad \textbf{(2.134)}$$

Ví dụ 2.67: Xét trường hợp $n = 4$ thì

$$\varepsilon = e^{i2\pi/4} = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i ,\ \varepsilon^2 = -1,\ \varepsilon^3 = -i$$

Từ công thức (2.127) ta có các véc tơ cơ sở

$$\omega_0 = \left(1, 1, 1^2, 1^3\right) = \left(1, 1, 1, 1\right),\ \omega_1 = \left(1, i, i^2, i^3\right) = \left(1, i, -1, -i\right),$$

$$\omega_2 = \left(1, -1, (-1)^2, (-1)^3\right) = \left(1, -1, 1, -1\right),\ \ \omega_3 = \left(1, -i, (-i)^2, (-i)^3\right) = \left(1, -i, -1, i\right).$$

Cho tín hiệu có các giá trị mẫu tại 4 thời điểm lấy mẫu

$$x_0 = x(0),\ x_1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right),\ x_2 = x(\pi),\ x_3 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Khi đó biểu diễn Fourier rời rạc tương ứng

$$\mathbf{x} = c_0\omega_0 + c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3$$

Trong đó

$$c_0 = \left\langle \mathbf{x};\omega_0 \right\rangle = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3), \qquad c_1 = \left\langle \mathbf{x};\omega_1 \right\rangle = \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3)$$

$$c_2 = \left\langle \mathbf{x};\omega_2 \right\rangle = \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3), \qquad c_3 = \left\langle \mathbf{x};\omega_3 \right\rangle = \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)$$

Chẳng hạn với tín hiệu $x(t) = 2\pi t - t^2$

có các giá trị mẫu $x_0 = 0,$ $x_1 = 7,4022$ $x_2 = 9,8696$ $x_3 = 7,4022$

tính toán dựa vào công thức trên ta được

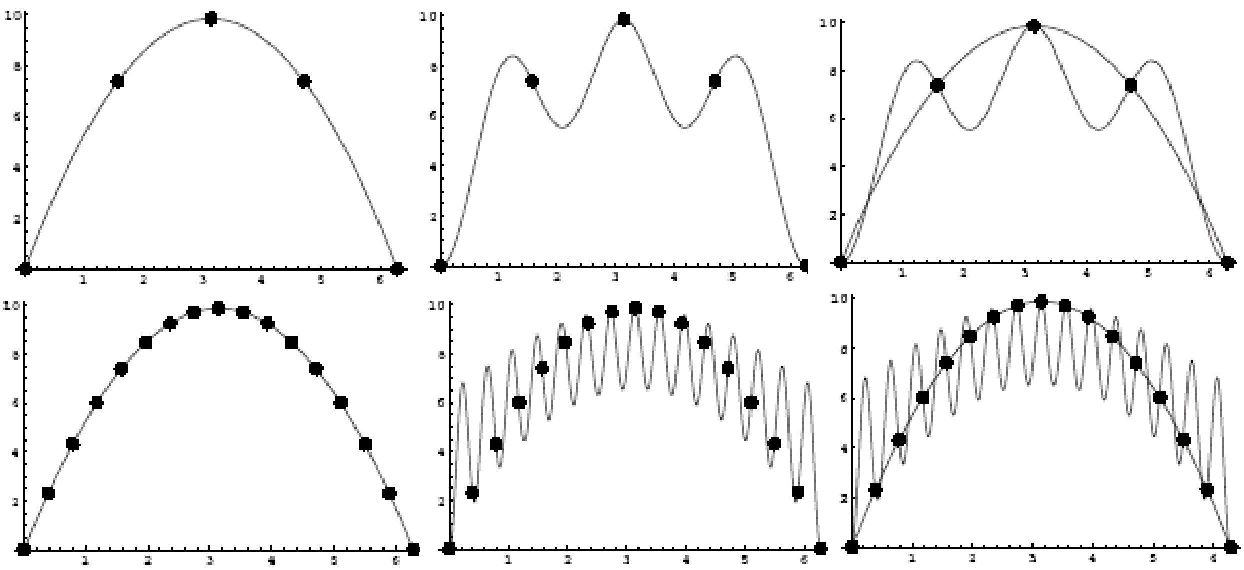
$c_0 = 6,1685$ $c_1 = -2,4674$ $c_2 = -1,2337$ $c_3 = -2,4674$

Vì vậy đa thức lượng giác nội suy là phần thực của đa thức

$$p(t) = 6,1685 - 2,4674e^{it} - 1,2337e^{i2t} - 2,4674e^{i3t} \qquad \textbf{(2.135)}$$

Cụ thể $\operatorname{Re} p(t) = 6,1685 - 2,4674\cos t - 1,2337\cos 2t - 2,4674\cos 3t$

Trong hình sau chúng ta sẽ so sánh tín hiệu $x(t)$ và các biểu diễn Fourier với $n = 4$ và $n = 16$.



Hình 2.22: *Biến đổi Fourier của* $2\pi t - t^2$ *ứng với* $n = 4$ *và* $n = 16$

Kết quả của đồ thị chỉ ra rằng có cản trở đáng kể đối với phép biến đổi Fourier rời rạc đó là trong khi đa thức lượng giác nội suy một cách chính xác từ các giá trị mẫu của tín hiệu nhưng dáng điệu dao động cao làm cho chúng vượt xa tại các điểm khác điểm mẫu (hình 2.22).

Tuy nhiên khó khăn này có thể khắc phục được một cách linh hoạt. Vấn đề là ta đã không chú ý đầy đủ đến các tần số được biểu diễn trong tổng Fourier (2.124).

Hình 2.23 cho ta thấy rằng các hàm mũ với tần số cao và tần số thấp có thể cho cùng dữ liệu mẫu nhưng có sự khác nhau rõ rệt trong khoảng giữa các điểm mẫu. Một nửa các số hạng đầu trong công thức tổng Fourier (2.121) có tần số thấp, nửa còn lại có tần số cao hơn. Ta thay các hàm mũ tần số cao này bằng các hàm mũ tần số thấp hơn tương ứng, như vậy sẽ giảm bớt sự dao động của các hàm mũ.

Cụ thể với $0 < k \le \frac{n}{2}$ thì e^{-ikt} và $e^{i(n-k)t}$ có cùng các giá trị mẫu, nhưng hàm e^{-ikt} có tần số thấp hơn $e^{i(n-k)t}$.

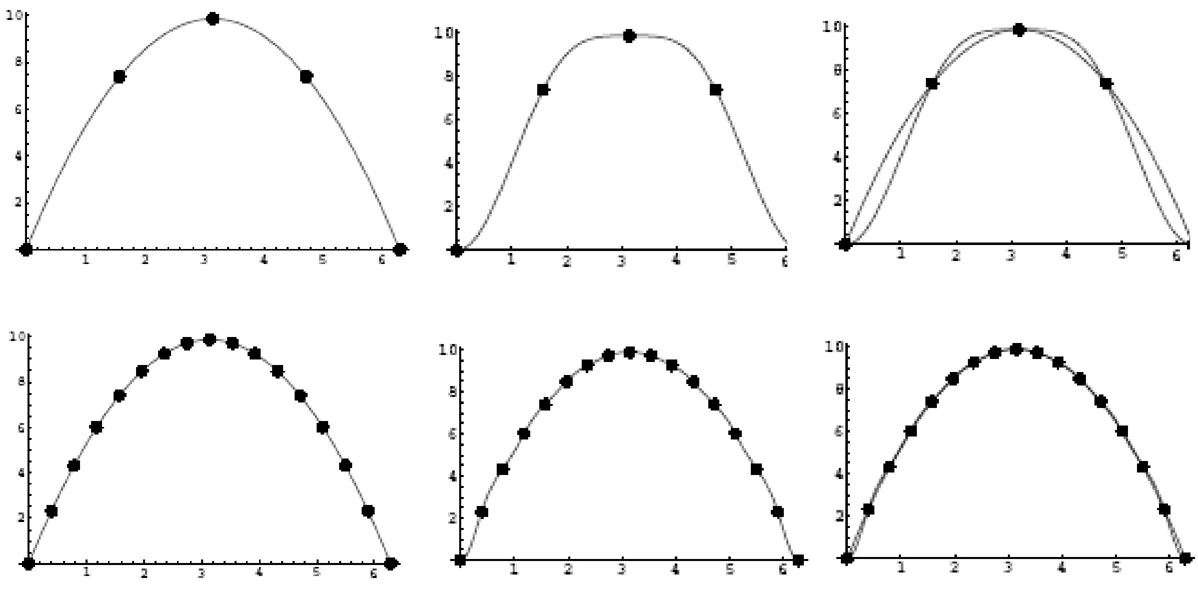
Vì vậy ta sẽ thay các hàm mũ trong các số hạng nửa sau của tổng Fourier (2.121) bằng các hàm mũ tương ứng có tần số thấp hơn.

Nếu $n = 2m+1$ là một số lẻ thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \dots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \dots + c_me^{imt} = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt} \qquad \textbf{(2.136)}$$

Nếu $n = 2m$ là một số chẵn thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \dots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \dots + c_{m-1}e^{i(m-1)t} = \sum_{k=-m}^{m-1} c_k e^{ikt} \qquad \textbf{(2.137)}$$



Hình 2.23: *Biến đổi Fourier tần số thấp của* $2\pi t - t^2$ *ứng với* $n = 4$ *và* $n = 16$

Trở lại ví dụ trên, ta thay đa thức lượng giác nội suy (2.135) bằng đa thức dạng (2.137)

$$\hat{p}(t) = -1{,}2337e^{-i2t} - 2{,}4674e^{-it} + 6{,}1685 - 2{,}4674e^{it}$$

$$\operatorname{Re}\hat{p}(t) = 6{,}1685 - 4{,}9348\cos t - 1{,}2337\cos 2t \qquad \textbf{(2.138)}$$

Hình 2.23 sau đây so sánh đồ thị của hàm gốc $2\pi t - t^2$ và các đa thức lượng giác nội suy gồm các hàm mũ tần số thấp ứng với $n = 4$ và $n = 16$.

Như vậy, bằng cách sử dụng tần số thấp ta có thể nội suy một hàm cho trước bằng đa thức lượng giác cùng giá trị mẫu.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $x(t)$ liên tục, tuần hoàn chu kỳ 2π, và khả vi liên tục từng khúc thì đa thức lượng giác nội suy (2.136)-(2.137) hội tụ đều về $x(t)$ khi số các điểm mẫu $n \to \infty$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1 Hàm ảnh $X(s)$ của biến đổi Laplace là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.2 Nếu $x(t)$ là hàm gốc thì đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.3 Nếu $x(t)$ là hàm gốc thì tích phân $\varphi(t) = \int_0^t x(u)du$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.4 Phép biến đổi Laplace có tính chất tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.5 Biến đổi Laplace của tích hai hàm gốc bằng tích hai hàm ảnh.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.6 Chỉ có các hàm tuần hoàn mới tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.7 Phép biến đổi Fourier hữu hạn được sử dụng để khảo sát các tín hiệu rời rạc $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.8 Mọi hàm gốc của biến đổi Laplace đều tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.9 Phép biến đổi Fourier rời rạc áp dụng cho các dãy tín hiệu $\left\{x(n)\right\}$ tuần hoàn chu kỳ N.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.10 Phép biến đổi Fourier biến miền thời gian về miền tần số.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.11 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $\sin^3 t$ **b.** $\cos^4 \omega t$ **c.** $e^{-2t}\cosh 3t$

d. $\left(1 + te^{-t}\right)^3$ **e.** $\cosh 2t \cos t$ **f.** $e^{-t}\sin 2t \cos 4t$.

2.12 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $t\cosh 3t$ **b.** $t\cos\omega t\cosh a t$ **c.** $t^2 \sin t$

d. $\dfrac{\sin 4t}{t}$ **e.** $\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$ **f.** $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.

2.13 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $\eta(t-b)\cos^2(t-b)$ **b.** $x(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{nếu } t > 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < t < 1 \end{cases}$

c. $x(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{nếu } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$ **d.** $x(t) = \begin{cases} \cos t & \text{nếu } 0 < t < \pi \\ \sin t & \text{nếu } t > \pi \end{cases}$.

2.14 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $x(t) = \displaystyle\int_0^t \left(u^2 - u + e^{-u}\right) du$ **b.** $x(t) = \displaystyle\int_0^t (u+1)\cos\omega u\, du$

c. $x(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-u)e^{2u} du$ **d.** $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du$

2.15 Chứng minh rằng nếu $X(s) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$ thì $\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} x(u)\, du\right\} = \dfrac{X(s)}{s^2}$.

2.16 Gọi $J_0(t)$ là hàm Bessel bậc 0 (nghiệm của phương trình vi phân $tx'' + x' + tx = 0$ với điều kiện ban đầu $J_0(0) = 1$. Chứng minh:

a. $\mathscr{L}\left\{J_0(t)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ **b.** $\mathscr{L}\left\{J_0(at)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$

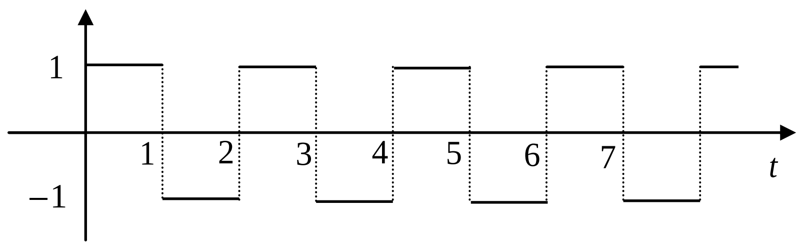
c. $\mathscr{L}\left\{\dfrac{d^2}{dt^2}\left(e^{2t}J_0(2t)\right)\right\} = \dfrac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}} - s - 2$.

d. $\mathscr{L}\left\{te^{-t}J_0(t)\right\} = \dfrac{s-1}{\sqrt{(s^2-2s+2)^3}}$.

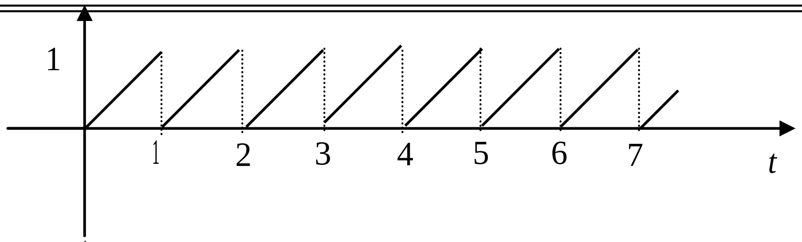
e. Sử dụng kết quả a. suy ra $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)dt = 1$ và $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}J_0(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.17 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn có đồ thị hoặc xác định như sau:

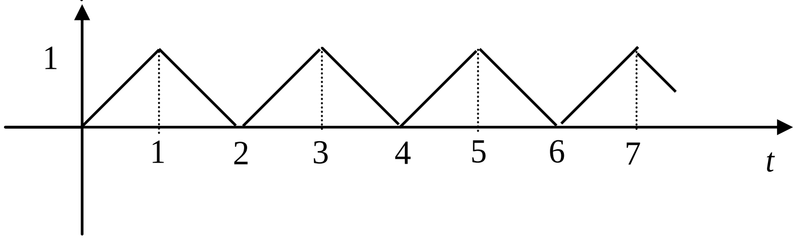
a.



b.



c.



d. $x(t) = \left|\cos t\right|$.

2.18 Sử dung công thức định nghĩa Laplace tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty t^3 e^{-t}\sin t\,dt$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt$

c. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt$ **d.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}dt$ **e.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.

2.19 **a.** Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n+1} t\right\} = \dfrac{(2n+1)!}{\left(s^2+1\right)\cdots\left(s^2+(2n+1)^2\right)}$.

b. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n} t\right\} = \dfrac{(2n)!}{s\left(s^2+4\right)\cdots\left(s^2+(2n)^2\right)}$.

2.20 Tìm hàm gốc của các hàm số sau:

a. $\dfrac{s^2}{(s-1)^3}$ **b.** $\dfrac{s+3}{s^2+6s+11}$ **c.** $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d. $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$ **e.** $\dfrac{s^3}{\left(s^2+4\right)^2}$ **f.** $\dfrac{3s+2}{\left(s^2-4s+6\right)^2}$.

2.21 Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{3s+1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$ **b.** $\dfrac{1}{s^3\left(s^3+1\right)}$ **c.** $\dfrac{s-1}{(s+3)\left(s^2+2s+2\right)}$

d. $\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}$ **e.** $\dfrac{s^2+2s+3}{\left(s^2+2s+2\right)\left(s^2+2s+5\right)}$ **f.** $\dfrac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$.

2.22 Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{s^4-9s^3+16s^2-4s+5}{s^5-4s^4+5s^3}$ **b.** $\dfrac{1}{s^4}+\dfrac{e^{-2s}}{(s+3)^4}$ **c.** $\dfrac{e^{-\frac{s}{3}}}{s(s^2+1)}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{s^3}}$ **e.** $\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}$ **f.** $\dfrac{e^{4-3s}}{\sqrt{(s+4)^5}}$.

2.23 Sử dụng phép biến đổi Laplace hãy nghiệm lại các tích chập sau

a. $1*1=t$ **b.** $1*e^t=e^t-1$ **c.** $t^2*\sin(at)=\dfrac{t^2}{a}-\dfrac{4}{a^3}\sin^2\left(\dfrac{at}{2}\right)$

d. $e^{-t}\eta(t)*e^{-t}\eta(t)=te^{-t}\eta(t)$ **e.** $e^{-t}\eta(t)*e^{-2t}\eta(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\eta(t)$

f. $\left[\eta(t)-\eta(t-2)\right]*\left[\eta(t)-\eta(t-2)\right]=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0<t<2\\ 4-t, & 2<t<4\\ 0, & t>4\end{cases}$.

2.24 Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+2x'+x=t^2e^t$, $x(0)=x'(0)=0$.

b. $x'''+3x''+3x'+x=6e^{-t}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

c. $x''-x=4\sin t+5\cos 2t$, $x(0)=-1,\ x'(0)=-2$.

d. $x''+9x=\cos 2t$, $x(0)=1,\ x(\pi/2)=-1$.

2.25 Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+a^2x=f(t)$, $x(0)=1,\ x'(0)=-2$.

b. $x''-a^2x=g(t)$, $x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2$.

2.26 Giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số biến thiên $tx''+2x'+tx=0$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=1,\ x'(\pi)=0$

2.27 Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases}x'+y'=t\\ x''-y=e^{-t}\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=3,\ x'(0)=-2\\ y(0)=0\end{cases}$.

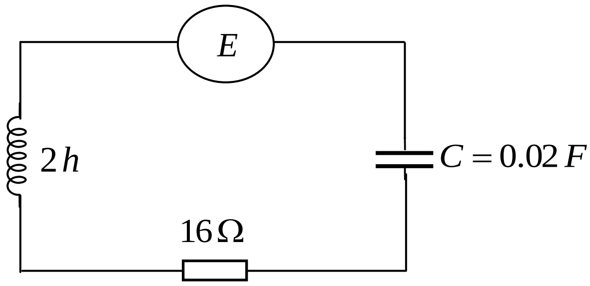
b. $\begin{cases}x'-y'-2x+2y=\sin t\\ x''+2y'+x=0\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=x'(0)=0\\ y(0)=0\end{cases}$.

c. $\begin{cases}-3x''+3y''=te^{-t}-3\cos t\\ tx''-y'=\sin t\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=-1,\ x'(0)=2\\ y(0)=4,\ y'(0)=0\end{cases}$.

2.28 Cho mạch điện cho trong hình 2.24 được nối tiến với suất điện động E volts, điện dung 0,02 farads, hệ số tự cảm 2 henry và điện trở 16 Ohms. Tại thời điểm t = 0 điện lượng ở tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch bằng 0. Tìm điện lượng và cường độ dòng điện tại thời điểm t nếu:

a. E = 300 (Volts)

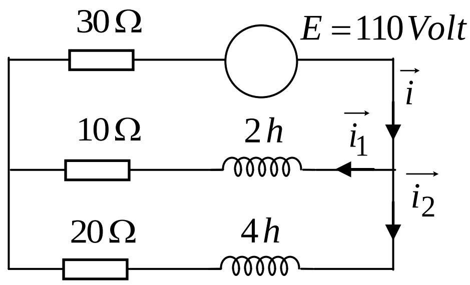
b. E = 100 sin3t (Volts)



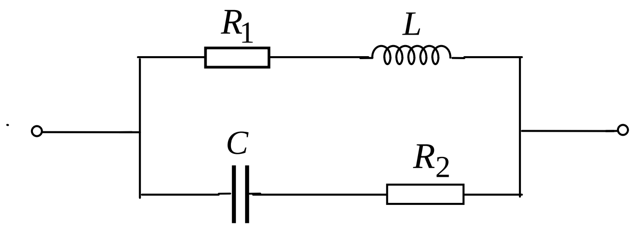
Hình 2.24

2.29 Cho mạch điện cho trong hình 2.25. Xác định cường độ trong các nhánh biến rằng cường độ ban đầu bằng 0.

2.30 Tìm trở kháng ảnh tương đương của hai mạch rẽ cho trong hình 2.26:



Hình 2.25



Hình 2.26

2.31 Cho mạch điện như hình 2.27:

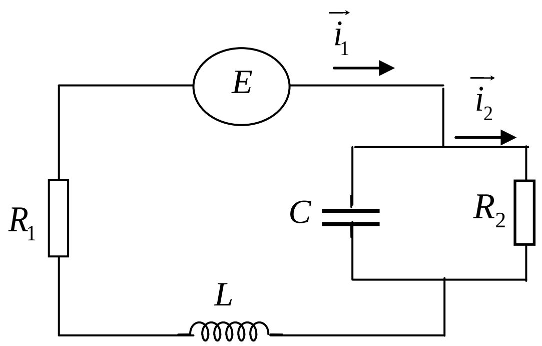
$E = 500\sin 10t$ $\quad L = 1$ henry

$R_1 = 10$ ohms $\quad R_2 = 10$ ohms

$C = 0,01$ farad.

Nếu điện thế ở tụ điện và cường độ i_1, i_2 bằng không tại thời điểm $t = 0$.

Tìm điện lượng tại tụ điện tại thời điểm $t > 0$.



Hình 2.27

2.32 Tìm nghiệm của bài toán: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, với điều kiện đầu

$u(x,0) = 3\sin 2\pi x,\ 0 < x < 1$ và điều kiện biên: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0\ ,\quad t > 0. \end{cases}$

2.33 Cho $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 10 và $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad -5 < t < 0 \\ 3 & \text{nếu} \quad 0 < t < 5 \end{cases}$

a. Tìm chuỗi Fourier của $x(t)$.

b. $x(t)$ nhận giá trị bao nhiêu tại $t = -5, 0, 5$ để chuỗi Fourier hội tụ về $x(t)$ với mọi $t \in [-5; 5]$.

2.34 Cho $x(t) = 2t,\ 0 < t < 4$.

a. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\sin$.

b. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\cos$.

2.35 Viết các chuỗi Fourier dạng cầu phương sau về dạng cực.

a. $x(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left[(2n-1)\pi t\right]}{2n-1}$

b. $x(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$.

2.36 Viết chuỗi Fourier dạng phức của các hàm số sau

a. $x(t) = |t|, -\pi \le t \le \pi$

b. $x(t) = t,\ 0 < t < 2$

c. $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad -\pi/2 < t < 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad 0 < t < \pi/2 \end{cases}$

2.37 Cho dãy tín hiệu rời rạc $x(n) = \begin{cases} 1/3^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$.

a. Tìm biến đổi Z của $x(n)$.

b. Tìm biến đổi Fourier của $x(n)$.

c. Tìm biến đổi Fourier của $y(n) = nx(n)$.

2.38 Tìm biến đổi Fourier ngược của $\widehat{X}(f) = \begin{cases} e^{-i2\pi f n_0} & |f| < f_0 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

trong trường hợp $f_0 = \dfrac{1}{4},\ n_0 = 4$.

2.39 **a.** Tìm biến đổi Fourier của $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{nếu} \quad |t| > T \end{cases}$

b. Hãy suy ra giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda t}{\lambda}d\lambda$.

c. Tính $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$.

d. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $x(t)$ ở câu a, suy ra giá trị của tích phân: $\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

2.40 Tìm hàm chẵn thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_0^\infty x(t)\cos\lambda t\, dt = \begin{cases} 1-\lambda & \text{nếu} \quad 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad \lambda > 1 \end{cases}.$$

2.41 Chứng minh rằng $\int_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$.

2.42 Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \Pi(t/T)\sin\omega_0 t$.

b. $\Lambda(t/T) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$.

2.43 Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \begin{cases} e^{-t/T} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $T > 0$.

b. $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$, $T > 0$.

c. $x(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$, $a > 0$.

d. $x(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{nếu} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad |t| > 1 \end{cases}$

e. $x(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)^2}$, $a > 0$

f. $x(t) = \eta(t)e^{-at}\cos(bt)$, $a > 0$

2.44 Sử dụng công thức Parseval cho hàm $x(t) = \eta(t)e^{-at}\sin(bt)$, $a > 0$ suy ra đẳng thức

$$2\int_0^\infty \frac{du}{(u^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2} = \frac{\pi}{2a(a^2+b^2)}.$$

2.45 Chứng minh các tính chất (2.107) của phép biến đổi Fourier.