CHƯƠNG I

HÀM BIẾN SỐ PHỨC

Số phức khởi đầu được sử dụng để tính toán một cách đơn giản, tuy nhiên lý thuyết hàm biến phức ngày càng chứng tỏ là một công cụ rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực của khoa học và kỹ thuật. Hầu hết các lời giải độc đáo của các bài toán quan trọng trong lý thuyết truyền nhiệt, truyền dẫn, tĩnh điện, và thủy động lực đều được sử dụng phương pháp các hàm biến phức. Đối với vật lý hiện đại, hàm biến phức trở thành một bộ phận thiết yếu của vật lý lý thuyết. Chẳng hạn các hàm sóng trong cơ học lượng tử là các hàm biến phức.

Dĩ nhiên khi thực hiện một thí ngiệm hoặc phép đo nào đó thì kết quả mà chúng ta nhận được là các giá trị thực, nhưng để phát biểu lý thuyết về kết quả này thường phải sử dụng đến số phức. Có một điều kỳ lạ rằng nếu lý thuyết chính xác thì các phân tích toán học với hàm biến phức luôn dẫn đến lời giải là thực. Vì vậy hàm biến phức thực sự là một công cụ không thể thiếu của khoa học kỹ thuật hiện đại.

Trong chương này chúng ta tìm hiểu những vấn đề cơ bản của giải tích phức: Lân cận, miền, giới hạn, liên tục, đạo hàm của hàm biến phức, tích phân phức, chuỗi số phức, chuỗi lũy thừa, chuỗi Laurent … Để nghiên cứu các vấn đề này chúng ta thường liên hệ với những kết quả ta đã đạt được đối với hàm biến thực. Mỗi hàm biến phức $f(z)$ tương ứng với hai hàm hai biến thực $u(x,y)$, $v(x,y)$. Hàm biến phức $f(z)$ liên tục khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ liên tục. Hàm $f(z)$ khả vi khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tích phân phức tương ứng với hai tích phân đường loại 2 của các hàm $u(x,y)$, $v(x,y)$… như vậy ta có thể chuyển các tính chất giải tích của hàm biến phức về tính chất tương ứng của hàm thực hai biến và các tính chất này đã được học trong giải tích 2.

Ngoài ra xuất phát từ những tính chất đặc thù của hàm biến phức chúng ta còn có các công thức tích phân Cauchy, khai triển hàm biến phức thành chuỗi Taylor, chuỗi Laurent, tính thặng dự của hàm số tại điểm bất thường cô lập và ứng dụng lý thuyết thặng dư để giải quyết những bài toán cụ thể. Cuối cùng ta xét phép biến đổi Z là một ứng dụng cụ thể của khai triển Laurent.

1.1 TẬP SỐ PHỨC

1.1.1 Các dạng của số phức và các phép toán của số phức

Rất nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật và trong thức tế được qui về giải phương trình đại số cấp hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0).$$

Phương trình này có nghiệm thực khi $\Delta = b^2 - ac \geq 0$, tuy nhiên trường hợp phương trình không có nghiệm thực, ứng với $\Delta = b^2 - ac < 0$, cũng thường gặp và có nhiều ứng dụng. Vì vậy người ta mở rộng trường số thực đã có lên trường số mới sao cho trong trường số này phương trình cấp hai trên luôn có nghiệm.

Phương trình cấp hai với $\Delta < 0$ đơn giản nhất có dạng $x^2 + 1 = 0$. Nếu ta đưa vào số mới i (đơn vị ảo) sao cho $i^2 = -1$ thì phương trình trên có thể phân tích thành

$$x^2+1=x^2-i^2=(x-i)(x+i)=0.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=\pm i$.

Mở rộng trường số thực $\mathbb{R}$ để phương trình trên có nghiệm ta được trường số phức $\mathbb{C}$, mỗi phần tử của nó được gọi là số phức. Trường số phức $\mathbb{C}$ có cấu trúc trường với phép cộng, phép nhân được mở rộng từ các phép toán của trường số thực.

A. Dạng tổng quát của số phức

$z=x+iy$, trong đó $x,\ y$ là các số thực.

x là phần thực của z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$.

y là phần ảo của z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.

Khi $y=0$ thì $z=x$ là số thực; $x=0$, $z=iy$ gọi là số thuần ảo.

Số phức $x-iy$, ký hiệu $\bar{z}$, được gọi là ***số phức liên hợp*** với số phức $z=x+iy$.

Nhận xét 1.1: Một số tài liệu ký hiệu phần tử đơn vị ảo là j, lúc đó số phức viết dưới dạng tổng quát $z=x+jy$ và số phức liên hợp tương ứng là $z^*=x-jy$.

Hai số phức $z_1=x_1+iy_1$ và $z_2=x_2+iy_2$ bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của chúng bằng nhau.

$$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2;\ z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \quad \textbf{(1.1)}$$

Mở rộng các phép toán của trường số thực ta có các phép toán tương ứng sau của các số phức.

B. Các phép toán của số phức

Cho hai số phức $z_1=x_1+iy_1$ và $z_2=x_2+iy_2$, ta định nghĩa:

a) **Phép cộng**: Tổng của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z=z_1+z_2$ và được xác định như sau:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \quad \textbf{(1.2)}$$

b) **Phép trừ**: Ta gọi số phức $-z=-x-iy$ là số phức đối của $z=x+iy$.

Số phức $z=z_1+(-z_2)$ được gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z=z_1-z_2$.

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \quad \textbf{(1.3)}$$

c) **Phép nhân**: Tích của hai số phức z_1 và z_2 là số phức được ký hiệu z_1z_2 và được xác định như sau:

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \quad \textbf{(1.4)}$$

d) **Phép chia**: Nghịch đảo của số phức $z = x + iy \neq 0$ là số phức ký hiệu $\frac{1}{z}$ hay z^{-1}, thỏa mãn điều kiện $zz^{-1} = 1$. Đặt $z^{-1} = a + ib$, theo công thức (1.1) và (1.4) ta được

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ ya + xb = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{x}{x^2 + y^2},\ b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \textbf{(1.5)}$$

Số phức $z = z_1 z_2^{-1}$ ($z_2 \neq 0$) được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = \frac{z_1}{z_2}$. Áp dụng công thức (1.4)-(1.5) ta có

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \textbf{(1.6)}$$

Ví dụ 1.1: Cho $z = x + iy$, tính z^2, $z\overline{z}$.

Giải: $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, $z\overline{z} = x^2 + y^2$.

Ví dụ 1.2: Tìm các số thực x, y là nghiệm của phương trình

$$5(x + y)(1 + i) - (x + 2i)(3 + i) = 3 - 11i.$$

Giải: Khai triển và đồng nhất phần thực, phần ảo hai vế và áp dụng công thức (1.1) ta được

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2 = 3 \\ 4x + 5y - 6 = -11 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = \frac{7}{5}.$$

Tính chất 1.1:

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1z_2 = z_2z_1$ *tính giao hoán.*
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$; $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ *tính kết hợp.*
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ *tính phân bố của phép nhân đối với phép cộng.*
- $z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ hoặc $z_2 = 0$.
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} \geq 0$ và $z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$. **(1.7)**
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. **(1.8)**

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. **(1.9)**
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$. **(1.10)**

Ví dụ 1.3: Viết các số phức sau dưới dạng $z = x + iy$

a) $\left(3 - 2i\right)\left(1 + 3i\right)$,

b) $\dfrac{-5 + 5i}{4 - 3i}$,

c) $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i}$,

d) $\dfrac{3 - 2i}{-1 + i}$.

Giải:

a) $\left(3 - 2i\right)\left(1 + 3i\right) = 3 + 6 + i\left(-2 + 9\right) = 9 + 7i$,

b) $\dfrac{-5 + 5i}{4 - 3i} = \dfrac{-5\left(1 - i\right)\left(4 + 3i\right)}{16 + 9} = \dfrac{-5\left((4 + 3) + i(-4 + 3)\right)}{25} = \dfrac{-7}{5} + \dfrac{i}{5}$,

c) $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \dfrac{i - 1 - i + 1 + i}{1 + i} = \dfrac{i}{1 + i} = \dfrac{i\left(1 - i\right)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

hoặc $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \dfrac{i\left(1 + i + i^2 + i^3 + i^4\right)}{1 + i} = \dfrac{i}{1 + i}\dfrac{1 - i^5}{1 - i} = \dfrac{i - i^6}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$.

d) $\dfrac{3 - 2i}{-1 + i} = \dfrac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \dfrac{-5 - i}{2} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{i}{2}$.

Ví dụ 1.4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z + iw = 1 \\ 2z + w = 1 + i \end{cases}$.

Giải: Nhân i vào phương trình thứ nhất và cộng vào phương trình thứ hai ta được

$$\left(2 + i\right)z = 1 + 2i \;\Rightarrow\; z = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{\left(1 + 2i\right)\left(2 - i\right)}{5} = \frac{4 + 3i}{5},$$

$$\Rightarrow\; w = i\left(z - 1\right) = i\left(\frac{-1 + 3i}{5}\right) = -\frac{3 + i}{5}.$$

Ta cũng có thể giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer như sau

$$D = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2i;\; D_z = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 + i & 1 \end{vmatrix} = 2 - i;\; D_w = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 + i \end{vmatrix} = i - 1.$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 - i}{1 - 2i} = \frac{(2 - i)(1 + 2i)}{5} = \frac{4 + 3i}{5},\; w = \frac{i - 1}{1 - 2i} = \frac{(i - 1)(1 + 2i)}{5} = \frac{-3 - i}{5}.$$

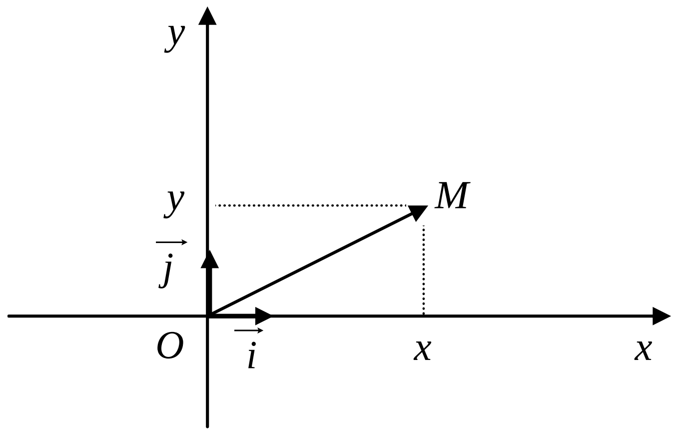
Ví dụ 1.5: Giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Giải: $z^2 + 2z + 5 = \left(z+1\right)^2 + 4 = \left(z+1\right)^2 - \left(2i\right)^2 = \left(z+1-2i\right)\left(z+1+2i\right)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

C. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức

Xét mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, véc tơ đơn vị trên hai trục tương ứng là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Mỗi điểm M trong mặt phẳng hoàn toàn được xác định bởi tọa độ $(x;y)$ của nó xác định bởi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Hình 1.1).



Hình 1.1*: Mặt phẳng phức*

Số phức $z = x + iy$ cũng hoàn toàn được xác định bởi phần thực x và phần ảo y của nó. Vì vậy có tương ứng 1-1 giữa các số phức và các điểm trong mặt phẳng.

Người ta đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x;y)$ với số phức $z = x + iy$, lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức. Trục hoành Ox biểu diễn các số thực nên được gọi là trục thực, trục tung Oy biểu diễn các số thuần ảo nên được gọi là trục ảo.

Tập hợp các véc tơ trong mặt phẳng với phép toán cộng véc tơ, phép nhân một số thực với véc tơ tạo thành không gian véc tơ. Khi ta đồng nhất điểm *M* hay véc tơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x;y)$ với số phức $z = x + iy$ thì hai phép toán trên hoàn toàn tương thích với phép cộng hai số phức và phép nhân số thực với số phức.

$\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1)$ tương ứng với số phức $z_1 = x_1 + iy_1$.

$\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2)$ tương ứng với số phức $z_2 = x_2 + iy_2$.

Thì $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ tương ứng với số phức $z_1 + z_2$ và $k.\overrightarrow{OM_1}$ tương ứng với số phức kz_1.

Ngoài ra trong tập hợp các số phức còn có phép nhân và phép chia hai số phức, điều này cho phép biểu diễn thêm nhiều phép biến đổi hình học mà không có đối với các phép toán của véc tơ.

D. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, ta chọn $\overrightarrow{Ox}$ làm trục cực khi đó điểm $M(x;y)$ có tọa độ cực $\left(r;\phi\right)$ xác định bởi

$$r = OM \ , \quad \varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \ \text{thỏa mãn} \ \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{1.11}$$

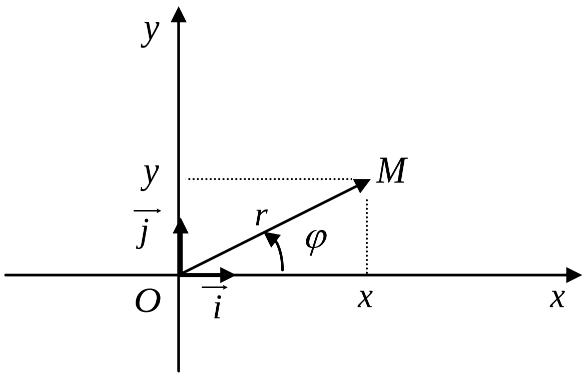
Ta ký hiệu và gọi

$$\left|z\right| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.12}$$

là mô đun và

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{1.13}$$

là argument của số phức $z = x + iy$.



Hình 1.2: *Mô đun và Argument của số phức*

Góc φ của số phức $z = x + iy \neq 0$ được xác định theo công thức sau

$$\begin{cases} \tan\varphi = y \,/\, x \\ \cos\varphi = x \,/\, \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{1.14}$$

Giá trị của $\operatorname{Arg} z$ nằm giữa $-\pi$ và π được gọi là argument chính, ký hiệu $\arg z$. Vậy

$$-\pi < \arg z \leq \pi .$$

Từ công thức (1.11) ta có

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \tag{1.15}$$

gọi là ***dạng lượng giác của số phức***.

Áp dụng khai triển Mac Laurin

$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\varphi^{2n}}{\left(2n\right)!} \ , \quad \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

$$\Rightarrow \ \cos\varphi + i\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\varphi^{2n}}{\left(2n\right)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{n}}{n!}=e^{i\varphi}.$$

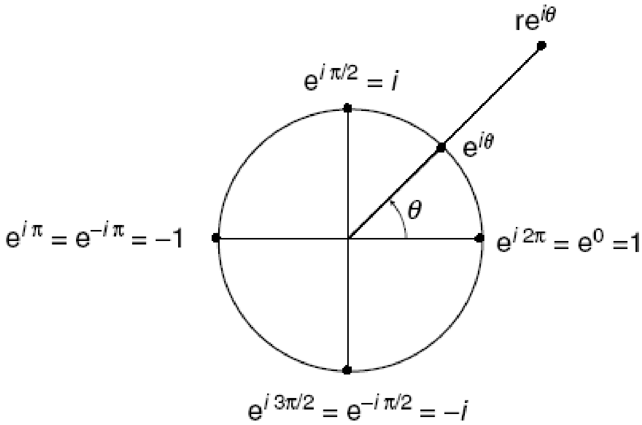
Vậy ta có công thức Euler

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi \tag{1.16}$$

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.17}$$

Từ (1.15)-(1.16) ta có thể viết ***số phức dưới dạng mũ***

$$z=|z|e^{i\varphi} \tag{1.18}$$



Hình 1.3: *Dạng cực của số phức. Đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức được biểu diễn bởi* $e^{i\theta}$. *Số phức bất kỳ có dạng* $re^{i\theta}$

Tính chất 1.2:

- $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \arg z_1=\arg z_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ **(1.19)**

- $z\bar{z}=|z|^2,\ \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$ **(1.20)**

- $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ \ |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$ **(1.21)**

- $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2,\ \ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2$ **(1.22)**

- $z=x+iy \Rightarrow \begin{cases}|x|\le|z|\\ |y|\le|z|\end{cases}$ và $|z|\le|x|+|y|$ **(1.23)**

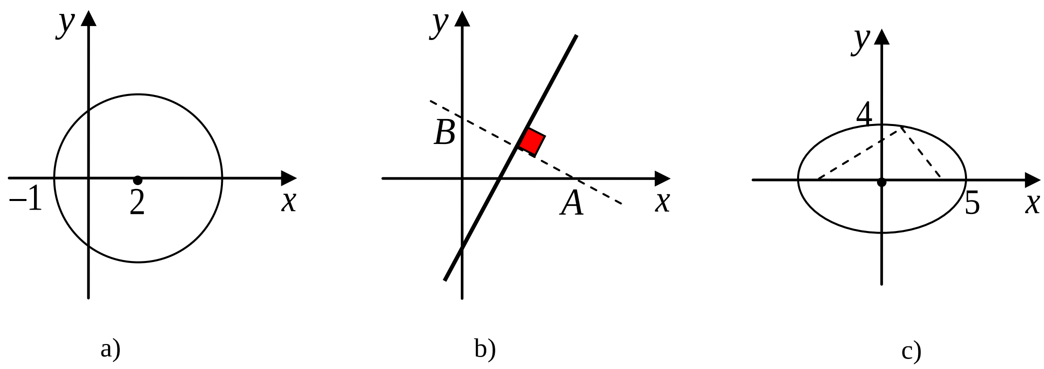
Ví dụ 1.6:

a. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-2\right|=3$ tương ứng với tập các điểm có khoảng cách đến $I(2;0)$ bằng 3, tập hợp này là đường tròn tâm I bán kính 3.

b. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-2\right|=\left|z-i\right|$ tương ứng với tập các điểm cách đều $A(2;0)$ và $B(0;1)$ đó là đường trung trực của đoạn AB có phương trình $4x-2y-3=0$.

c. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10$ tương ứng với tập các điểm có tổng khoảng cách đến $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$ bằng 10, đó là đường elip có phương trình

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$



Hình 1.4: *Đồ thị các đường của ví dụ* 1.6

Ví dụ 1.7: Áp dụng công thức (1.22) và số phức viết dưới dạng mũ (1.18) ta có thể kiểm chứng lại các công thức cộng góc của các hàm lượng giác:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}&=\left[\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right]\left[\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right]\\&=\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\right),\end{aligned}$$

Đồng nhất phần thực và phần ảo tương ứng theo công thức (1.1) ta được

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

E. Lũy thừa và căn của số phức

1) Lũy thừa

Lũy thừa bậc n của số phức z là số phức $z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n\text{ lần}}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Từ công thức (1.21)-(1.22) ta có

$$z^n=\left|z\right|^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)\text{ với }\operatorname{Arg}z=\varphi+k2\pi \qquad \textbf{(1.24)}$$

Đặc biệt, khi $|z| = 1$ ta có

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \tag{1.25}$$

Gọi (1.25) là ***Công thức Moivre***.

Ví dụ 1.8: Tính $(1+i)^8$.

Giải: Ta có $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, do đó $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}} = 16e^{i2\pi} = 16 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.9: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Giải:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{10} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^9(-1+i\sqrt{3}).$$

Vậy ta cũng có $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^9 = 2^9 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.10: Tính các tổng

$$S = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi, \quad T = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi.$$

Giải: Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, trường hợp $z \neq 1$ ta có

$$S + iT = z + z^2 + \cdots + z^n = z(1 + z + \cdots + z^{n-1}) = z\frac{z^n - 1}{z-1} = \frac{z^{n+1} - z}{z-1}$$

$$= \frac{\left(z^{n+1}-z\right)\overline{\left(z-1\right)}}{\left(z-1\right)\overline{\left(z-1\right)}} = \frac{z^n z\bar{z} - z\bar{z} - z^{n+1} + z}{z\bar{z} - \left(z+\bar{z}\right) + 1} = \frac{z^n - 1 - z^{n+1} + z}{1 - \left(z+\bar{z}\right) + 1}$$

$$= \frac{\left(\cos n\varphi - 1 - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\right) + i\left(\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin\varphi\right)}{2\left(1-\cos\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\cos n\varphi - 1 - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi}{2\left(1-\cos\varphi\right)}, \ T = \frac{\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin\varphi}{2\left(1-\cos\varphi\right)}.$$

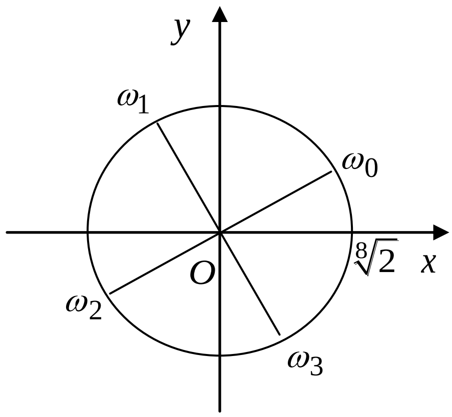
2) Căn của số phức

Số phức ω được gọi là căn bậc n của z nếu $\omega^n = z$, ký hiệu $\omega = \sqrt[n]{z}$ hay $\omega = z^{\frac{1}{n}}$.

Biểu diễn dưới dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$, $\omega = \rho e^{i\theta}$ ta có $\omega^n = \rho^n e^{in\theta}$; do đó

$$z=\omega^n \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Vì Argument của một số phức xác định sai khác một bội số nguyên của 2π nên với mỗi số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n. Các căn bậc n này có cùng mô đun và Argument nhận các giá trị ứng với $k = 0, 1, ..., n-1$. Vì vậy các căn bậc n nằm trên đỉnh của *n*-giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}$.



Hình 1.5: Các căn bâc bốn $\sqrt[4]{1+i}$

Ví dụ 1.11: Tính $\sqrt[4]{1+i}$

Giải: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

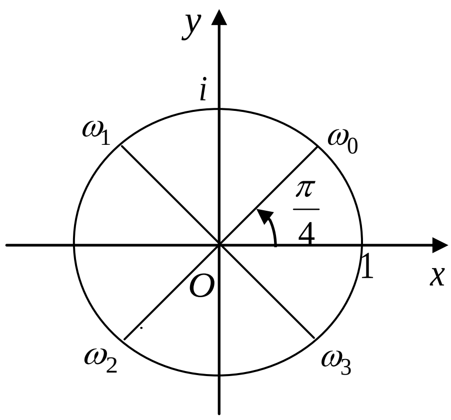
Các căn bậc 4 tương ứng là:

$$\omega_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$\omega_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2})\right)=i\omega_0,$$

$$\omega_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{16}+\pi)\right)=-\omega_0,$$

$$\omega_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2})\right)=-i\omega_0.$$



Hình 1.6: Các căn bậc bốn $\sqrt[4]{-1}$

Ví dụ 1.12: Giải phương trình $z^4+1=0$

Giải: Nghiệm của phương trình là căn bậc 4 của $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ tương ứng là:

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

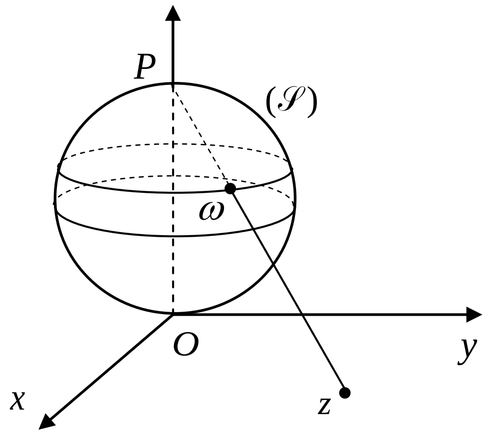
$$\omega_1=i\omega_0=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \omega_2=-\omega_0=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ \omega_3=-i\omega_0=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

1.1.2 Tập số phức mở rộng, mặt cầu phức

Trong 1.1.1.3 ta đã có một biểu diễn hình học của tập các số phức $\mathbb{C}$ bằng cách đồng nhất mỗi số phức $z=x+iy$ với điểm M có tọa độ $(x;y)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Mặt khác nếu ta dựng mặt cầu $(\mathscr{S})$ có cực nam tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại O, khi đó mỗi điểm z thuộc mặt phẳng Oxy sẽ tương ứng duy nhất với điểm ω là giao điểm của tia Pz và mặt cầu $(\mathscr{S})$, P là điểm cực bắc của $(\mathscr{S})$.

Vậy mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy được xác định bởi một điểm trên mặt cầu $(\mathscr{S})$ ngoại trừ điểm cực bắc P.



Hình 1.7*: Mặt cầu phức*

Ta gán cho điểm cực bắc này số phức vô cùng ∞. Tập hợp số phức $\mathbb{C}$ thêm số phức vô cùng được gọi là tập số phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$. Như vậy toàn bộ mặt cầu $(\mathscr{S})$ là một biểu diễn hình học của tập số phức mở rộng.

Quy ước: $\dfrac{z}{0} = \infty\ (z \neq 0),\ z \cdot \infty = \infty\ (z \neq 0),\ z + \infty = \infty,\ \infty - z = \infty$.

1.1.3 Lân cận, miền

A. Lân cận

Khái niệm $\varepsilon-$lân cận của một điểm trong mặt phẳng phức được định nghĩa hoàn toàn tương tự với $\varepsilon-$lân cận trong $\mathbb{R}^2$, đó là hình tròn có tâm tại điểm này và bán kính bằng ε.

$\varepsilon-$lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ và $N-$lân cận $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ lần lượt là

$$B_\varepsilon\left(z_0\right) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle|\ \left|z - z_0\right| < \varepsilon\right\} \tag{1.27}$$

$$B_N\left(\infty\right) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle|\ \left|z\right| > N\right\} \cup \left\{\infty\right\} \tag{1.28}$$

B. Điểm trong, tập mở

Giả sử E là một tập các điểm của mặt phẳng phức hoặc mặt cầu phức. Điểm z_0 được gọi là ***điểm trong*** của E nếu tồn tại một lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E.

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là ***tập mở***.

C. Điểm biên

Điểm z_1, có thể thuộc hoặc không thuộc E, được gọi là ***điểm biên*** của E nếu mọi lân cận của z_1 đều có chứa các điểm thuộc E và các điểm không thuộc E.

Tập hợp các điểm biên của E được gọi là biên E, ký hiệu ∂E.

Hình tròn mở $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|z - z_0\right| < r\right\}$ và phần bù của hình tròn đóng $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|z - z_0\right| > r\right\}$ là các tập mở có biên lần lượt là $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|z - z_0\right| = r\right\}$ và $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|z - z_0\right| = r\right\} \cup \left\{\infty\right\}$.

Hình tròn đóng $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|z - z_0\right| \le r\right\}$ không phải là tập mở vì các điểm trên biên $\left|z - z_0\right| = r$ không phải là điểm trong.

D. Tập liên thông, miền

Tập con D của mặt phẳng phức hay mặt cầu phức được gọi là ***tập liên thông*** nếu với bất kỳ 2 điểm nào của D cũng có thể nối chúng bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D.

Một tập mở và liên thông được *gọi là* ***miền***.

Miền D cùng biên ∂D của nó được gọi là miền đóng, ký hiệu $\overline{D}$, vậy $\overline{D} = D \cup \partial D$. Miền chỉ có một biên được gọi là ***miền đơn liên***, trường hợp ngược lại gọi là ***miền đa liên***.

Ta chỉ xét các miền hoặc miền đóng có biên là đường cong trơn hoặc trơn từng khúc.

Qui ước hướng dương trên biên của miền là hướng mà khi ta đi trên biên theo hướng đó thì miền D ở bên tay trái.

Miền D được gọi là ***miền bị chặn*** nếu tồn tại $R > 0$ sao cho $\left|z\right| \le R,\ \forall z \in D$.

1.2 HÀM BIẾN PHỨC

1.2.1 Định nghĩa hàm biến phức

Định nghĩa 1.1: *Một hàm biến phức xác định trên tập con D của $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$ là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức $z \in D$ với một hoặc nhiều số phức w, ta ký hiệu*

$$w = f(z),\ z \in D.$$

Biến z được gọi là biến độc lập hay đối số, còn w là biến phụ thuộc hay giá trị của hàm. Nếu với mỗi z chỉ cho tương ứng duy nhất một giá trị w thì $f(z)$ được gọi là hàm đơn trị, lúc này f là ánh xạ từ D vào $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$. Trường hợp ngược lại f được gọi là hàm đa trị.

Hàm số $w = f(z) = z^2 + 3$ là một hàm đơn trị, còn hàm số $w = f(z) = \sqrt[3]{z}$ là một hàm đa trị.

Tập D trong định nghĩa trên được gọi là tập xác định. Ta chỉ xét tập xác định D là một miền, vì vậy D được gọi là miền xác định.

Thông thường người ta cho hàm biến phức dưới dạng công thức xác định ảnh $f(z)$, khi đó miền xác định D là tập các số phức z sao cho biểu thức $f(z)$ có nghĩa.

Hàm số $w = f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ có miền xác định là $D = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} \middle| z \ne \pm i\right\}$.

Một hàm biến phức có thể được biểu diễn bởi hai hàm thực của hai biến (x,y) như sau:

$$\begin{cases} w = f(z) = f(x+iy) \\ w = u + iv = u(x,y) + iv(x,y) \end{cases} ; \quad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{1.29}$$

Chẳng hạn, hàm số $w = f(z) = z^2 + 3 = (x+iy)^2 + 3 = (x^2 - y^2 + 3) + i2xy$ có

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 3 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

Trường hợp hàm biến phức biến số thực, nghĩa là miền xác định $D \subset \mathbb{R}$, ta ký hiệu $w = f(t)$, biến số là t thay cho biến số z.

Trường hợp miền xác định D là tập số tự nhiên hoặc tập con của tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì ta có dãy số phức $z_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu dãy số là $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hay $\left(z_n\right)_{n=0}^{\infty}$.

Nếu $z_n = f(n);\ n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, ta ký hiệu $\left(z_n\right)_{n=n_0}^{\infty}$.

1.2.2 Giới hạn, liên tục

Định nghĩa 1.2: *Dãy số phức $\left(z_n\right)_{n=0}^{\infty}$ hội tụ về số phức L, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \left|z_n - L\right| = 0$, nghĩa là*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 : n \ge N \ \Rightarrow \left|z_n - L\right| < \varepsilon \tag{1.30}$$

Dãy số $\left(z_n\right)_{n=0}^{\infty}$ có giới hạn là ∞, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, nếu

$$\forall A > 0,\ \exists N > 0 : \forall n \ge N \ \Rightarrow \left|z_n\right| > A \tag{1.31}$$

Giả sử $z_n = x_n + iy_n$, $L = a + ib$. Khi đó từ (1.23) suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \tag{1.32}$$

Thật vậy:

Từ bất đẳng thức $\left|z_n - L\right| \le \left|x_n - a\right| + \left|y_n - b\right|$ suy ra $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$.

Bất đẳng thức $\begin{cases} |x_n - a| \le |z_n - L| \\ |y_n - b| \le |z_n - L| \end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$.

Định nghĩa 1.3: *Ta nói hàm biến phức $w = f(z)$ xác định trong một lân cận của z_0 có giới hạn là L khi z tiến đến z_0, ký hiệu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, nếu với mọi lân cận $B_\varepsilon(L)$ tồn tại lân cận $B_\delta(z_0)$ sao cho với mọi $z \in B_\delta(z_0)$, $z \ne z_0$ thì $f(z) \in B_\varepsilon(L)$.*

Định nghĩa này phát biểu cho tất cả các trường hợp z_0, L là các số phức hữu hạn hoặc ∞. Cụ thể:

- Trường hợp z_0, $L \in \mathbb{C}$ là hai số phức hữu hạn:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \qquad \textbf{(1.33)}$$

Từ (1.23), (1.27) và tương tự (1.32) ta có:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.34)}$$

Trong đó $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$.

- Trường hợp $z_0 = \infty$, $L \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall z,\ |z| > N \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \qquad \textbf{(1.35)}$$

- Trường hợp $z_0 \in \mathbb{C}$, $L = \infty$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \ \Leftrightarrow\ \forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall z,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > N \qquad \textbf{(1.36)}$$

- Trường hợp $z_0 = \infty$, $L = \infty$:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \ \Leftrightarrow\ \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall z,\ |z| > N \Rightarrow |f(z)| > M \qquad \textbf{(1.37)}$$

Định lý 1.1: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ khi và chỉ khi với mọi dãy $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n \to z_0$ thì $f(z_n) \to L$.

Như vậy giới hạn của hàm số khi $z \to z_0$ không phụ thuộc vào đường đi khi z tiến đến z_0.

Định nghĩa 1.4: *Hàm biến phức $w = f(z)$ xác định trong miền chứa điểm z_0 được gọi là liên tục tại z_0 nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Hàm biến phức $w = f(z)$ liên tục tại mọi điểm của miền D được gọi là liên tục trong D.

Từ (1.34) suy ra rằng một hàm biến phức liên tục khi và chỉ khi hai hàm thực hai biến xác định bởi (1.29) là liên tục. Do đó ta có thể áp dụng các tính chất liên tục của hàm thực hai biến cho tính chất liên tục của hàm biến phức.

1.2.3 Hàm khả vi, phương trình Cauchy-Riemann

Giả sử $z = x + iy$ là một điểm thuộc miền xác định D của hàm biến phức đơn trị $w = f(z)$.

Với số gia của biến $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ thỏa mãn $z + \Delta z \in D$, ta được số gia của hàm

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Định nghĩa 1.5: *Nếu $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta z \to 0$ thì ta nói hàm $w = f(z)$ khả vi (hay có đạo hàm) tại z, giới hạn đó được gọi là đạo hàm tại z, ký hiệu $f'(z)$ hoặc $w'(z)$. Vậy*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \textbf{(1.38)}$$

Rõ ràng nếu hàm số có đạo hàm tại z thì liên tục tại z.

Ví dụ 1.13: Cho $w = z^2 + C$, tính $w'(z)$.

Giải: $\Delta w = \left((z + \Delta z)^2 + C\right) - (z^2 + C) = 2z\Delta z + \Delta z^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z$,

Do đó $w'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$.

Định lý 1.2: Nếu hàm biến phức $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \textbf{(1.39)}$$

Ngược lại, nếu phần thực $u(x,y)$, phần ảo $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann thì $w = f(z)$ khả vi tại $z = x + iy$ và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \quad \textbf{(1.40)}$$

Chứng minh: Hàm biến phức $w = f(z)$ có đạo hàm tại $z = x + iy$, do đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

không phụ thuộc đường đi của Δz tiến đến 0.

Xét trường hợp $\Delta z = \Delta x$ ta có:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x, y) - u(x,y)\big) + i\big(v(x+\Delta x, y) - v(x,y)\big)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \qquad \textbf{(1.41)}$$

Tương tự nếu $\Delta z = i\Delta y$ thì:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\big(u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\big) + i\big(v(x, y+\Delta y) - v(x,y)\big)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad \textbf{(1.42)}$$

So sánh (1.41)-(1.42) ta có điều kiện (1.39).

Ngược lại, từ giả thiết $u(x,y)$, $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) suy ra

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta_1 |\Delta z|$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_2 |\Delta z|$$

trong đó $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và $\eta_1,\ \eta_2 \to 0$ khi $|\Delta z| \to 0$.

Do đó $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\eta_1 + i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$

Thay $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

Ta được $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + (\eta_1 + i\eta_2)\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z} \to \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, khi $|\Delta z| \to 0$.

Ví dụ 1.14: Hàm $w = z^2 + C = (x^2 - y^2) + C + i(2xy)$ ở ví dụ 1.13 có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

do đó hàm khả vi tại mọi điểm và $w'(z) = 2x + i2y = 2z$.

Ví dụ 1.15: Hàm $w = \bar{z} = x - iy$ có $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$, các đạo hàm riêng không thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann, do đó hàm không khả vi tại bất kỳ điểm nào.

Định nghĩa 1.6: *Hàm đơn trị* $w = f(z)$ *khả vi trong một lân cận của* z *được gọi là giải tích (analytic) hay chỉnh hình (holomorphe) tại* z.

Nếu $f(z)$ *khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói* $f(z)$ *giải tích trong D.*

$f(z)$ *giải tích trong miền đóng* $\overline{D}$ *nếu nó giải tích trong một miền chứa* $\overline{D}$.

Khái niệm khả vi và đạo hàm của hàm biến phức được định nghĩa tương tự như trường hợp hàm thực và công thức tính đạo hàm của biến phức có thể tính qua các đạo hàm riêng (1.40), vì vậy các tính chất và quy tắc tính đạo hàm đã biết đối với hàm thực vẫn còn đúng đối với hàm biến phức. Cụ thể

$$\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z). \tag{1.43}$$

$$\left(f(z)g(z)\right)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \tag{1.44}$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2} \quad , \quad g(z) \neq 0. \tag{1.45}$$

$$\left(f\left(u(z)\right)\right)' = f'(u).u'(z). \tag{1.46}$$

1.2.4 Các hàm biến phức sơ cấp cơ bản

A. Hàm lũy thừa $w = z^n$, n **nguyên dương ≥ 2.**

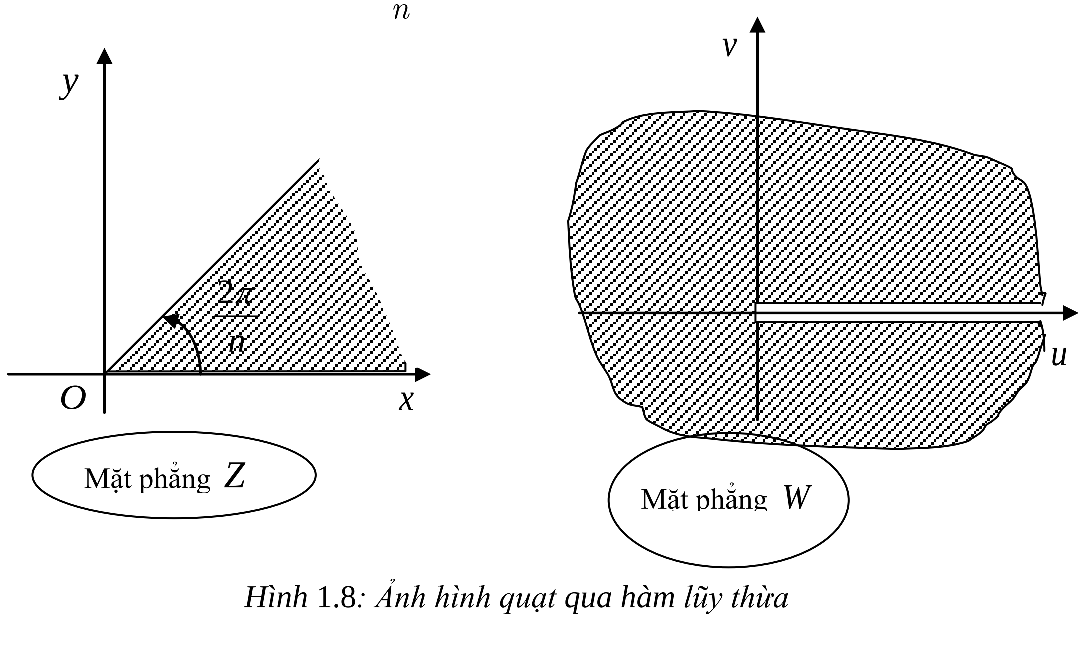
Hàm số lũy thừa xác định và giải tích với mọi z, có đạo hàm $w = nz^{n-1}$.

Nếu $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ thì $w = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$.

Vậy ảnh của đường tròn $\left|z\right| = R$ là đường tròn $\left|w\right| = R^n$.

Ảnh cúa tia $\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$ là tia $\operatorname{Arg} w = n\varphi + k2\pi$.

Ảnh cúa hình quạt $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}$ là mặt phẳng w bỏ đi trục thực dương.



Hình 1.8: Ảnh hình quạt qua hàm lũy thừa

B. Hàm căn $w = \sqrt[n]{z}$

Hàm căn bậc n : $w = \sqrt[n]{z}$ là hàm ngược của hàm lũy thừa bậc n . Mọi số phức khác 0 đều có đúng n căn bậc n , vì vậy hàm căn là một hàm đa trị.

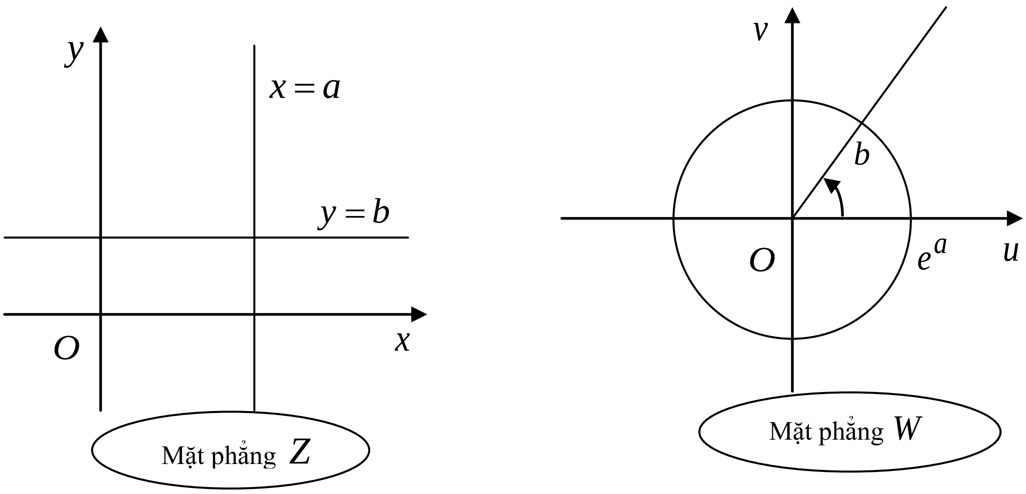
C. Hàm mũ $w = e^z$

Từ công thức Euler (1.16) ta có thể định nghĩa hàm mũ xác định như sau

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \tag{1.47}$$

♦ $\left|e^z\right| = e^x$, $\operatorname{Arg}(e^z) = y + k2\pi$.

♦ Hàm mũ giải tích tại mọi điểm và $\left(e^z\right)' = e^z$.



Hình 1.9: Ảnh đường thẳng qua hàm mũ

♦ $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$, $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$, $e^{z+ik2\pi} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}$. **(1.48)**

♦ $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$.

♦ Qua phép biến hình $w = e^z$, ảnh của đường thẳng $x = a$ là đường tròn $\left|w\right| = e^a$, ảnh của đường thẳng $y = b$ là tia $\operatorname{Arg} w = b + k2\pi$.

Ảnh của băng $0 < y < 2\pi$ là mặt phẳng w bỏ đi nửa trục thực dương.

D. Hàm lôgarit

Hàm lôgarit là hàm ngược của hàm mũ xác định như sau: $w = \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^w$

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv \;\Leftrightarrow\; z = e^w = e^{u+iv} = e^u\left(\cos v + i\sin v\right) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} e^u = \left|z\right| \\ v = \arg z + k2\pi \end{cases}$$

$$w = \operatorname{Ln} z \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \operatorname{Re} w = \ln\left|z\right| \\ \operatorname{Im} w = \arg z + k2\pi \end{cases} \tag{1.49}$$

Điều này chứng tỏ hàm lôgarit phức là hàm đa trị. Ứng với mỗi z có vô số giá trị của w, những giá trị này có phần thực bằng nhau còn phần ảo hơn kém nhau bội số nguyên của 2π. Ứng với mỗi k ở trên ta có một nhánh của hàm lôgarit.

Để tiện cho việc khảo sát, đôi khi người ta tách hàm $w = \operatorname{Ln} z$ thành các nhánh đơn trị như sau. Trong công thức (1.49) nếu ta cố định $k = k_0$ khi đó

$$w = \ln\left|z\right| + i\left(\arg z + k_0 2\pi\right)$$

trở thành một nhánh đơn trị của hàm lôgarit. Nhánh này biến miền $-\pi < \arg z < \pi$ của mặt phẳng Z thành băng $\left(2k_0 - 1\right)\pi < \operatorname{Im} w < \left(2k_0 + 1\right)\pi$ của mặt phẳng *W*. Nhánh đơn trị ứng với $k = 0$ được gọi là nhánh đơn trị chính và được ký hiệu $\ln z$. Vậy

$$\ln z = \ln\left|z\right| + i \arg z$$

trong đó $\ln$ ở vế trái là hàm lôgarit chính biến phức và ln ở vế phải là hàm lôgarit biến thực.

- $\operatorname{Ln}\left(-1\right) = \ln\left|-1\right| + i\left(\arg(-1) + k2\pi\right) = \left(2k+1\right)\pi i$ và $\ln\left(-1\right) = i\pi$.
- $\operatorname{Ln}\left(z_1 z_2\right) = \operatorname{Ln}\left(z_1\right) + \operatorname{Ln}\left(z_2\right)$, $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln}\left(z_1\right) - \operatorname{Ln}\left(z_2\right)$, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$.

Các nhánh đơn trị của hàm lôgarit giải tích trên nửa mặt phẳng phức Z bỏ đi nửa trục thực âm $(x < 0)$.

Ví dụ 1.16: Tìm lôgarit chính của $1+i$.

Giải: Vì $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, do đó $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4} i$.

E. Các hàm lượng giác phức

Mở rộng công thức Euler (1.17) cho các đối số phức ta được các hàm lượng giác phức

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.50}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}; \; \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad z \neq k\pi.$$

Tính chất 1.3:

Các hàm lượng giác phức còn giữ được nhiều tính chất của hàm lượng giác thực.

- Hàm $\cos z$, $\sin z$ tuần hoàn chu kỳ 2π, hàm $\tan z$, $\cot z$ tuần hoàn chu kỳ π.
- Các hàm lượng giác phức giải tích trong miền xác định

$$\left(\sin z\right)' = \cos z, \; \left(\cos z\right)' = -\sin z$$

$$\left(\tan z\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \; \left(\cot z\right)' = \frac{-1}{\sin^2 z}.$$

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- Các công thức cộng góc, hạ bậc, tổng thành tích, tích thành tổng vẫn còn đúng

Tuy nhiên có những tính chất của hàm lượng giác thực không còn đúng đối với hàm lượng giác phức. Chẳng hạn hàm lượng giác thực bị chặn nhưng hàm lượng giác phức không bị chặn (ta có thể chứng minh điều này bằng cách áp dụng định lý Louville):

Từ đẳng thức $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ suy ra $|\cos x| \le 1,\ |\sin x| \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

nhưng $$\cos ni = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2} > 1,\ |\sin ni| = \left|\frac{e^{-n} - e^{n}}{2i}\right| > 1 \text{ khi } n > 1.$$

F. Các hàm lượng giác hyperbolic phức

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad \textbf{(1.51)}$$

Tính chất 1.4:

- Các hàm lượng giác hyperbolic phức giải tích trong miền xác định

$$(\sinh z)' = \cosh z\ ,\ (\cosh z)' = \sinh z\,,$$

$$(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}\ ,\ (\coth z)' = \frac{-1}{\sinh^2 z}.$$

- $\cosh z + \sinh z = e^{z},\ \cosh z - \sinh z = e^{-z},\ \sin iz = i\sinh z,\ \cos iz = \cosh z$.

- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,\ \sinh 2z = 2\cosh z \sinh z,\ \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$.

1.3 TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

Trong mục này ta nghiên cứu tích phân phức của các hàm đơn trị.

1.3.1 Định nghĩa và các tính chất

Khái niệm tích phân phức dọc theo một đường cong được định nghĩa tương tự tích phân đường loại 2.

Giả sử hàm biến phức đơn trị $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ xác định trong miền *D* và *L* là đường cong (có thể đóng kín) nằm trong *D* có điểm mút đầu là *A* mút cuối là *B*.

Chia *L* thành *n* đoạn bởi các điểm $A \equiv z_0, z_1, z_2, ..., z_n \equiv B$ nằm trên *L* theo thứ tự tăng dần của các chỉ số.

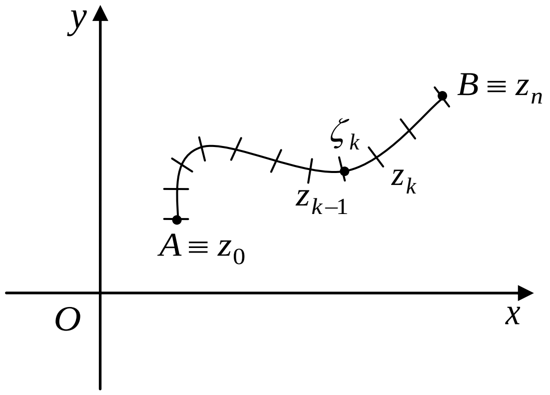
Chọn trên mỗi cung con $\overset{\frown}{z_{k-1}, z_k}$ của đường cong *L* một điểm bất kỳ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Đặt $z_k = x_k + iy_k$,

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1};\ k = 1,2, ..., n.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad \textbf{(1.52)}$$

được gọi là ***tổng tích phân*** của hàm $f(z)$ trên *L* ứng với phân hoạch $z_0, z_1, ..., z_n$ và cách chọn các điểm $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Tổng này nói chung phụ thuộc vào hàm $f(z)$, đường *L*, cách chia *L* bởi các điểm z_k và cách chọn các điểm ζ_k (xem hình 1.7).



Hình 1.7: Tổng tích phân

Khi $\max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right| \to 0$ tổng S_n tiến tới giới hạn $I \in \mathbb{C}$ không phụ thuộc cách chia đường *L* và chọn các điểm ζ_k ta nói hàm $f(z)$ khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và I được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong *L* từ *A* đến *B*, ký hiệu $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$. Vậy

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k \qquad \textbf{(1.53)}$$

Mặt khác, tổng tích phân (1.52) có thể phân tích thành tổng của 2 tổng tích phân đường loại 2.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\xi_k,\eta_k\right) + iv\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]\left(\Delta x_k + i\Delta y_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta x_k - v\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[v\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta x_k + u\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta y_k\right] \qquad \textbf{(1.54)}$$

Tương tự (1.32), áp dụng (1.23) ta có

$$\max_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta x_k\right| \to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta y_k\right| \to 0 \end{cases}$$

Vì vậy tích phân phức (1.53) tồn tại khi và chỉ khi hai tích phân đường loại 2 có tổng tích phân (1.54) tồn tại và có đẳng thức

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f\left(z\right)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy \qquad \textbf{(1.55)}$$

Mặt khác, nếu hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục trên *D* và đường *L* trơn từng khúc thì tồn tại hai tích phân đường loại 2 ở vế phải của (1.55) (ta đã biết trong Giải tích 2), do đó tồn tại tích phân phức tương ứng.

Từ đẳng thức (1.55) suy ra rằng tích phân phức có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân đường loại 2.

- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz, \tag{1.56}$$
- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz;\ k-\text{const}, \tag{1.57}$$
- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz, \tag{1.58}$$
- $$\left|\int_{L} f(z)dz\right| \le \int_{L} \left|f(z)\right|ds. \tag{1.59}$$

vế phải của bất đẳng thức (1.59) là tích phân đường loại 1 dọc theo cung L và có vi phân cung:

$$ds = \left|dz\right| = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Đặc biệt, nếu $\left|f(z)\right| \le M,\ \forall z\in L$ và $\boldsymbol{l}$ là độ dài của đường cong L thì

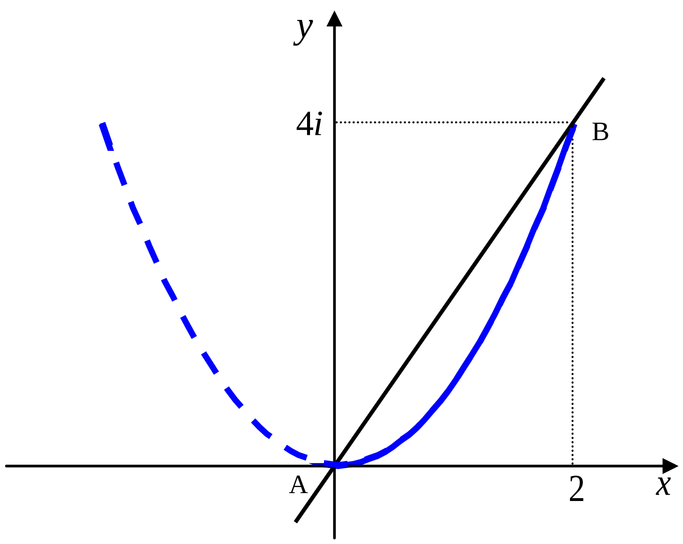
$$\left|\int_{L} f(z)dz\right| \le M\cdot \boldsymbol{l} \tag{1.60}$$

Khi A trùng với B thì L là đường cong kín (ta chỉ xét các đường cong kín không tự cắt, gọi là đường Jordan). Tích phân trên đường cong kín L lấy theo chiều dương của L được ký hiệu $\oint_{L} f(z)dz$, trường hợp lấy theo chiều âm ta ký hiệu $-\oint_{L} f(z)dz$.

Ví dụ 1.17: Tính tích phân $I=\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz;\ A=0,\ B=2+4i$

1. Dọc theo parabol $y=x^2,\ 0\le x\le 2$.
2. Dọc theo đường thẳng nối A và B.

Giải:



Hình 1.8*: Đường của ví dụ* 1.17

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+iy)^2(dx+idy)=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^2-y^2)dx-2xydy+i\int_{\overset{\frown}{AB}}2xydx+(x^2-y^2)dy$$

1. Nếu lấy tích phân dọc theo $y=x^2$ thì $dy=2xdx$

$$\Rightarrow\ I=\int_0^2\left[\left(x^2-x^4\right)-4x^4\right]dx+i\int_0^2\left[2x^3+\left(x^2-x^4\right)2x\right]dx=-\frac{88}{3}-\frac{16}{3}i\,.$$

2. Nếu lấy tích phân dọc theo đường thẳng nối từ *A* đến *B* thì $y=2x$, $dy=2dx$

$$I=\int_0^2\left[x^2-\left(2x\right)^2-2x\left(2x\right)2\right]dx+i\int_0^2\left[2x\left(2x\right)+2\left(x^2-\left(2x\right)^2\right)\right]dx=-\frac{88}{3}-\frac{16}{3}i\,.$$

Qua ví dụ trên ta nhận thấy giá trị của tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ *A* đến *B*. Các định lý sau cho điều kiện cần và đủ để tích phân phức không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối hai đầu mút của đường.

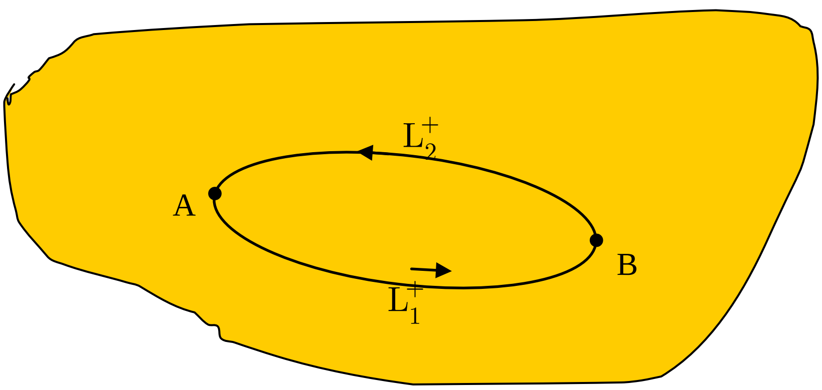
1.3.2 Định lý tích phân Cauchy và tích phân không phụ thuộc đường đi

Định lý 1.3: Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm $f(z)$ trong miền D không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong D phải bằng 0.

Chứng minh: Giả sử L_1^+, L_2^- là hai đường cong nối *A*, *B* trong D. Ta xét đường cong kín *L* gồm L_1^+, L_2^+, trong đó L_2^+ là cung ngược chiều của L_2^-.

$$0=\oint_L f\left(z\right)dz=\int_{L_1^+} f\left(z\right)dz+\int_{L_2^+} f\left(z\right)dz=\int_{L_1^+} f\left(z\right)dz-\int_{L_2^-} f\left(z\right)dz$$

$$\Rightarrow\ \int_{L_1^+} f\left(z\right)dz=\int_{L_2^-} f\left(z\right)dz\,.$$



Hình 1.9: *Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân*

Ngược lại, giả sử *L* là đường cong kín nằm trong D. Chọn hai điểm khác nhau *A*, *B* nằm trên *L*, ký hiệu L_1^+, L_2^- là các cung của *L* nối từ *A* đến *B* khi đó

$$\oint_L f(z)dz = \int_{L_1^+} f(z)dz - \int_{L_2^-} f(z)dz = 0.$$

Định lý 1.4: Nếu hàm biến phức $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín L bất kỳ trong D đều bằng 0.

Chứng minh: Áp dụng định lý Green chuyển tích phân đường loại 2 về tích phân kép và công thức (1.55) ta có

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó Δ là hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín L nằm trong D.

Vì $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D nên các hàm dưới dấu tích phân trong hai tích phân kép ở vế phải bằng 0 do thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Vậy $\oint_L f(z)dz = 0$.

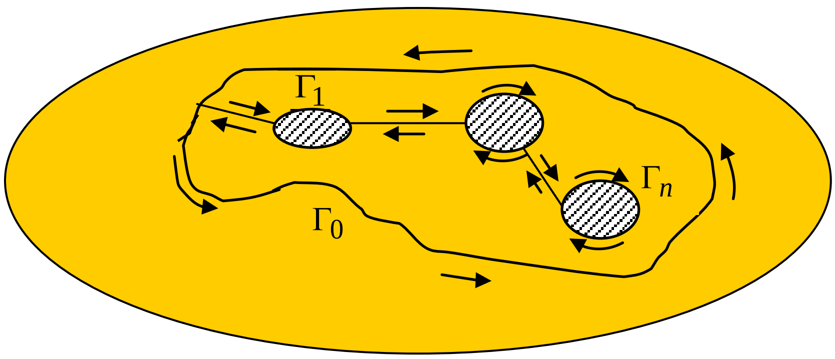
Hệ quả 1.1: Nếu $w = f(z)$ giải tích trong miền kín đơn liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ∂D thì $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Chứng minh: Tồn tại miền đơn liên $G \supset \overline{D}$ và $f(z)$ giải tích trong G. Áp dụng định lý 1.4 cho hàm $f(z)$ trong G và tích phân lấy trên đường cong kín $\partial D \subset G$.

Hệ quả 1.2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ có biên ngoài là Γ_0 và biên trong là $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ và khả tích trên các biên thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz \qquad \textbf{(1.61)}$$

Chứng minh:



Hình 1.10: Tích phân biên ngoài và biên trong

Cắt $\overline{D}$ theo các lát cắt nối Γ_0 với Γ_1, ..., Γ_n ta được một miền đơn liên (xem hình 1.10). Theo hệ quả 1.1 tích phân trên biên của miền này bằng 0 và chú ý rằng lúc đó tích phân trên đường nối Γ_0 với $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ được lấy hai lần ngược chiều nhau vì vậy tích phân trên biên bằng $\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$. Chuyển vế ta được đẳng thức cần chứng minh.

Có thể chứng minh được rằng hệ quả 1.1 và hệ quả 1.2 còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong D và liên tục trong $\overline{D}$.

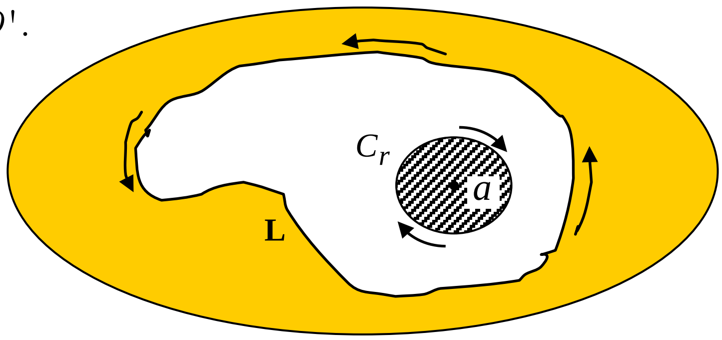
Ví dụ 1.18: Tính tích phân $I_n = \oint\limits_L \dfrac{dz}{(z-a)^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

trong đó *L* là đường cong kín bất kỳ không đi qua a.

Giải: Gọi D là miền được giới hạn bởi *L*.

- Nếu $a \notin D$ thì $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D nên $I_n = 0$.
- Nếu $a \in D$. Gọi $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| = r\}$ là đường tròn tâm a bán kính r. Chọn r đủ bé để $C_r \subset D$. Xét D' là miền nhị liên có được bằng cách lấy miền D bỏ đi hình tròn tâm a bán kính r. D' có biên ngoài là *L*, biên trong là C_r.

$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D'.



Hình 1.11: *Chuyển tích phân trên đường* L *về đường* C_r

Theo hệ quả 1.2 ta có

$$I_n = \oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_r} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Phương trình tham số của $C_r : z = a + re^{it}$; $0 \le t \le 2\pi$. Do đó

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}} dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} idt & \text{khi } n = 1 \\ \displaystyle\frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt & \text{khi } n \ne 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi } n = 1 \\ 0 & \text{khi } n \ne 1. \end{cases} \quad \textbf{(1.62)}$$

1.3.3 Nguyên hàm và tích phân bất định

Hàm $F(z)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm biến phức $f(z)$ nếu $F'(z) = f(z)$.

Tương tự như hàm thực, ta có thể chứng minh được rằng nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì $F(z) + C$ (với mọi hằng số *C* tùy ý) cũng là một nguyên hàm của $f(z)$ và mọi nguyên hàm của $f(z)$ đều có dạng như thế.

Tập hợp các nguyên hàm của $f(z)$ được gọi là tích phân bất định của $f(z)$, ký hiệu $\int f(z)dz$.

Định lý 1.5: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D, $z_0 \in D$, khi đó tích phân dọc theo cung nối điểm z_0 đến điểm z không phụ thuộc đường đi nằm trong *D*. Hàm biến phức xác định như sau

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz := \int_{\overset{\frown}{z_0 z}} f(z)dz$$

là một nguyên hàm của $f(z)$. Trong đó vế phải của đẳng thức trên là tích phân phức được lấy theo đường cong bất kỳ nằm trong D nối z_0 đến z.

Định lý 1.6 (Công thức Newton - Lepnitz): Giả sử $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ trong miền đơn liên D. Khi đó, với mọi $z_0, z_1 \in D$ ta có:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0) \qquad \textbf{(1.63)}$$

Ví dụ 1.19: $\int e^z dz = e^z + C$, $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \sin z dz = -\cos z + C$;

$$\int_0^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_0^{2+4i} = \frac{8}{3}(1+2i)^3 = -\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i \text{ (xem ví dụ 1.17).}$$

Hàm $f(z) = z\sin(z^2)$ có một nguyên hàm là $-\dfrac{1}{2}\cos(z^2)$ do đó

$$\int_0^{\pi i} z\sin(z^2)dz = -\frac{1}{2}\cos(z^2)\Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\left(\cos 0 - \cos(-\pi^2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\pi^2)\right)$$

1.3.4 Công thức tích phân Cauchy

Định lý 1.7: Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{D}$ (có thể đa liên) và khả tích trên biên ∂D. Khi đó, với mọi $a \in D$ ta có:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad \textbf{(1.64)}$$

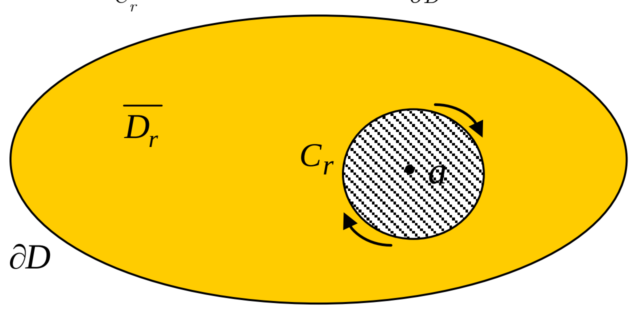
Hoặc

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \qquad \textbf{(1.65)}$$

Chứng minh: Với mọi $\varepsilon > 0$ chọn r đủ bé để đường tròn tâm a bán kính r: $C_r \subset D$ và $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ với mọi $z : |z-a| \le r$ (điều này có được vì $f(z)$ liên tục tại a). Gọi $\overline{D_r}$ là miền có được bằng cách bỏ đi hình tròn $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| < r\}$ từ miền D. Biên của $\overline{D_r}$ gồm biên ∂D của D và C_r.

Hàm $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong miền $\overline{D_r}$, áp dụng hệ quả 1.2 ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$



Hình 1.12: *Chuyển tích phân trên biên* ∂D *về đường* C_r

Mặt khác, từ (1.62) ta có

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(a)}{z-a} dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| |dz| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2r\pi = \varepsilon$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý cho trước nên

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a)\right| = 0 \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Nhận xét 1.2: *Công thức* (1.64) *được gọi là* ***công thức tích phân Cauchy***.

1. Công thức tích phân Cauchy nói lên rằng giá trị của hàm giải tích $f(z)$ hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó ở trên biên.
2. Công thức (1.64) còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong miền D và liên tục trong $\overline{D}$.

3. Khi $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ có biên ∂D là đường cong trơn từng khúc, nếu $a \notin \overline{D}$ thì $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong $\overline{D}$ do đó

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = 0\,.$$

Kết hợp với công thức (1.65) ta có

$$\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{nếu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nếu } a \notin \overline{D} \end{cases} \qquad \textbf{(1.66)}$$

1.3.5 Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

Định lý 1.8: Hàm $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ thì có đạo hàm mọi cấp trong D và với mọi $a \in D$ ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz \qquad \textbf{(1.67)}$$

Hoặc

$$\oint_C \frac{f(z)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \textbf{(1.68)}$$

trong đó *C* là đường cong kín bất kỳ bao quanh a nằm trong *D*.

Chứng minh: Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp

Ta chứng minh công thức với trường hợp $n = 1$.

Áp dụng công thức (1.64) ta có

$$\frac{f\left(a+\Delta z\right)-f\left(a\right)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{\Delta z}\left(\frac{1}{\xi-a-\Delta z}-\frac{1}{\xi-a}\right)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi-a-\Delta z\right)\left(\xi-a\right)}d\xi$$

Đặt $2d = \min\limits_{\xi\in C}\left|\xi-a\right|$; cho $\left|\Delta z\right| < d \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\left|\xi-a\right|} < \dfrac{1}{d},\;\; \dfrac{1}{\left|\xi-a-\Delta z\right|} < \dfrac{1}{d}$.

$$\Rightarrow \left|\frac{f\left(a+\Delta z\right)-f\left(a\right)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi-a\right)^2}d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f\left(\xi\right)}{\left(\xi-a-\Delta z\right)\left(\xi-a\right)^2}d\xi\right| \le \frac{M.\boldsymbol{l}}{2\pi d^3}\cdot\left|\Delta z\right|$$

trong đó $\left|f\left(\xi\right)\right| \le M,\ \forall \xi \in C$; đường cong kín *C* có độ dài là $\boldsymbol{l}$.

Cho $\Delta z \to 0$ ta được $f'\left(a\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^2}dz$.

Giả sử công thức đúng đến $n-1$, ta chứng minh công thức đúng đến n.

$$\frac{f^{(n-1)}\left(a+\Delta z\right)-f^{(n-1)}\left(a\right)}{\Delta z}=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{\Delta z}\left(\frac{1}{(\xi-a-\Delta z)^n}-\frac{1}{(\xi-a)^n}\right)d\xi$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-1-k}\right)d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n-1)}\left(a+\Delta z\right)-f^{(n-1)}\left(a\right)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(\xi\right)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f\left(\xi\right)\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-1-k}}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^n}-\frac{n}{(\xi-a)^{n+1}}\right)d\xi$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f\left(\xi\right)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

Chọn $\left|\Delta z\right|^n < d^n \ \Rightarrow 2^n d^n \le \left|\xi-a\right|^n \le \left|\xi-a-\Delta z\right|^n+\left|\Delta z\right|^n$

$$\Rightarrow \left|\xi-a-\Delta z\right|^n \ge 2^n d^n-\left|\Delta z\right|^n > 2^n d^n-d^n > 2d^n > d^n \Rightarrow \frac{1}{\left|\xi-a-\Delta z\right|^n}<\frac{1}{d^n}.$$

Do đó

$$\left|\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f\left(\xi\right)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right|$$

$$\le \frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot\frac{M}{d^{2n+1}}\oint_C\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)\right|\left|d\xi\right|\to 0 \text{ khi } \Delta z\to 0.$$

Trong đó *M* là chặn trên của $f(z)$ trên *C*.

Theo nguyên lý quy nạp công thức đúng với mọi *n*.

Nhận xét 1.3:

1. Định lý trên suy ra rằng đạo hàm của một hàm giải tích là một hàm giải tích.
2. Kết hợp định lý 1.5 và định lý 1.8, ta suy ra rằng: điều kiện cần và đủ để hàm đơn trị có nguyên hàm trong miền *D* là giải tích trong *D*.
3. Tương tự công thức (1.66) ta có công thức tương ứng với (1.68)

$$\oint_{\partial D}\frac{f\left(z\right)}{(z-a)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{nếu } a\in\overline{D}\\ 0 & \text{nếu } a\notin\overline{D}\end{cases} \tag{1.69}$$

Ví dụ 1.20: Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{(z+1)z^2}dz$, trong đó C là đường tròn: $|z-1|=3$.

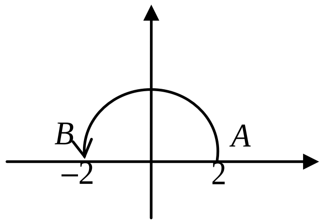
Giải: Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có thể phân tích $\frac{1}{(z+1)z^2}$ thành tổng các phân thức hữu tỷ tối giản $\frac{1}{(z+1)z^2}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z+1}$.

Do đó $I=\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{(z+1)z^2}dz=-\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z}dz+\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z^2}dz+\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z+1}dz$.

Các điểm $z=0$ và $z=-1$ đều nằm trong hình tròn giới hạn bởi C. Áp dụng công thức (1.66) và (1.69) ta có:

$$I=-2\pi i\cos \pi z\big|_{z=0}+2\pi i(\cos \pi z)'\big|_{z=0}+2\pi i\cos \pi z\big|_{z=-1}=-4\pi i.$$

Ví dụ 1.20: Tính tích phân phức $I=\int\limits_{AB}\frac{z\cos z}{z^2+1}dz$,



cung $\overset{\frown}{AB}$ là nửa trên của đường tròn $|z|=2$ nối điểm $A(2;0)$ đến điểm $B(-2;0)$ (Xem hình bên).

Giải: Đặt $f(z)=\frac{z\cos z}{z^2+1}=\frac{z\cos z}{(z+i)(z-i)}$

Gọi C là đường khép kín tạo bởi cung $\overset{\frown}{AB}$ và đoạn thẳng $\overline{BA}$ theo chiều dương. Theo tính chất của tích phân phức ta có: $I=\oint\limits_C f(z)dz+\int\limits_2^{-2} f(z)dz$

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_C \frac{\frac{z\cos z}{z+i}}{z-i}dz=2\pi i\left.\frac{z\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{\pi(1+e^2)i}{2e}$$

$$\int\limits_{-2}^{2} f(z)dz=0 \Rightarrow I=\frac{\pi(1+e^2)i}{2e}.$$

1.3.6 Bất đẳng thức Cauchy và định lý Louville

Từ công thức (1.69) suy ra rằng, nếu đường tròn $C_R:|z-a|=R$ nằm trong D và $|f(z)|\le M$ với mọi $z\in C_R$ thì

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint\limits_{C_R}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M2R\pi}{R^{n+1}}$$

hay
$$\left|f^{(n)}(a)\right|\le \frac{n!M}{R^n};\quad n=0,\ 1,\ldots \tag{1.70}$$

Bất đẳng thức (1.70) *được gọi là* ***bất đẳng thức Cauchy***.

Định lý 1.9 (định lý Louville): Nếu $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hàm hằng.

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại $M > 0$ sao cho $\left|f(z)\right| \le M$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (1.70) với $n = 1$, ta được $\left|f'(a)\right| \le \dfrac{M}{R}$ với mọi $R > 0$ suy ra $f'(a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{C}$.

Áp dụng công thức Newton - Leibniz, ta có

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(z)dz = 0 \Rightarrow f(z) = f(z_0),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nhận xét 1.4: Hai hàm lượng giác phức $\cos z$ và $\sin z$ giải tích tại mọi điểm và không phải hàm hằng do đó không bị chặn.

1.4 CHUỖI BIẾN SỐ PHỨC

1.4.1 Chuỗi số phức

Cho dãy số phức $\left\{u_n\right\}_{n=0}^{\infty}$, tổng $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ được gọi là một chuỗi số phức có số hạng tổng quát thứ $n+1$ là u_n.

Tổng $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ $n+1$ của chuỗi trên.

Nếu dãy các tổng riêng $\left\{S_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn là $S \in \mathbb{C}$ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ và S được gọi là tổng của chuỗi, ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Trong trường hợp ngược lại, dãy $\left\{S_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ không có giới hạn hoặc có giới hạn bằng ∞ thì ta nói chuỗi phân kỳ.

Tương tự sự hội tụ của dãy số phức (công thức 1.32), mỗi chuỗi số phức $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi hai chuỗi số thực tương ứng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tu; trong đó $u_n = a_n + ib_n$. Đồng thời ta có đẳng thức

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n\ ;\ a_n, b_n \in \mathbb{R} \tag{1.71}$$

Với nhận xét này, ta có thể áp dụng các kết quả đã biết đối với chuỗi số thực cho các chuỗi số phức. Chẳng hạn:

♦ Điều kiện cần để chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ là $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Thật vậy, Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ suy ra hai chuỗi số thực tương ứng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ. Theo điều kiện cần hội tụ của chuỗi số thực ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ và $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, do đó $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

♦ Nếu chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Khi đó ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

Vì $|a_n| \le |u_n|$ và $|b_n| \le |u_n|$, do đó từ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hội tụ suy ra hai chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ hội tụ. Theo tính chất hội tụ tuyệt đối của chuỗi số thực ta cũng có $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

♦ Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ thì ta nói chuỗi bán hội tụ.

1.4.2 Chuỗi luỹ thừa

Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \textbf{(1.72)}$$

trong đó c_n, a là các hằng số phức và z là biến số phức, được gọi là chuỗi luỹ thừa tâm a.

Rõ ràng rằng mọi chuỗi luỹ thừa tâm a bất kỳ có thể đưa về chuỗi luỹ thừa tâm 0 bằng cách đặt $Z = z - a$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n \qquad \textbf{(1.73)}$$

Tập hợp các điểm z sao cho chuỗi hội lũy thừa tụ được gọi là miền hội tụ.

Ví dụ 1.21: Xét chuỗi luỹ thừa cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Tổng riêng thứ n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1 - z^n}{1 - z} & \text{nếu } z \neq 1 \\ n & \text{nếu } z = 1 \end{cases}$$

Nếu $|z| \geq 1$ thì $|z^n| \geq 1$ với mọi n, dó đó z^n không thể tiến đến 0 khi $n \to \infty$, và khi $|z| < 1$ thì z^n tiến đến 0 khi $n \to \infty$. Vậy

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - z} & \text{khi } |z| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{khi } |z| \geq 1 \end{cases} \tag{1.74}$$

Ví dụ 1.22: Với mọi $r < 1$, chứng minh rằng

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\varphi + r^4}.$$

Giải: Xét $Z = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi + i \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\varphi}$

Đặt $z = r^2 e^{i\varphi}$, vì $r < 1$ do đó $|z| < 1$. Áp dụng công thức (1.74) ta được

$$Z = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

$$Z\overline{Z} = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \cdot \overline{\frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}} = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \cdot \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

$$= \frac{1}{1 - r^2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r^4} = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\varphi + r^4},$$

Mặt khác $$Z\overline{Z} = |Z|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi\right)^2.$$

Vậy $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\varphi + r^4}.$$

Định lý 1.10 (định lý Abel):

1. Nếu chuỗi (1.73) hội tụ tại $z_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $\{z : |z| < |z_0|\}$.
2. Từ đó suy ra rằng nếu chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_1 thì phân kỳ tại mọi điểm $z : |z| > |z_1|$.

Chứng minh: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ hội tụ suy ra $\lim_{n \to \infty} c_n z_0^n = 0$, vì vậy tồn tại $M > 0$ sao cho $|c_n z_0^n| \leq M, \ \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Do đó

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \le M \cdot \frac{\left|z^n\right|}{\left|z_0^n\right|}$$

Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \frac{\left|z^n\right|}{\left|z_0^n\right|}$ hội tụ khi $\left|z\right| < \left|z_0\right|$.

Suy ra chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tuyệt đối khi $\left|z\right| < \left|z_0\right|$,

Từ định lý trên ta thấy rằng với chuỗi (1.73) sẽ có ba khả năng sau:

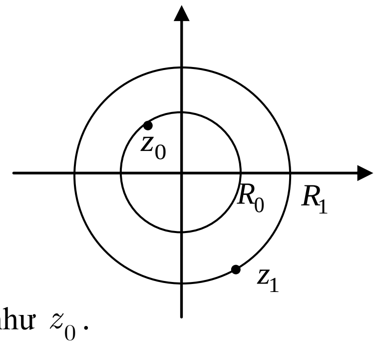
1) Không tồn tại $z_0 \ne 0$ để chuỗi (1.73) hội tụ tại z_0, trường hợp này chuỗi (1.73) chỉ hội tụ tại $z = 0$. Ta đặt

$$R = 0. \tag{75}$$

2) Không tồn tại z_1 để chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_1, trường hợp này chuỗi (1.73) hội tụ tại mọi z. Ta đặt

$$R = \infty. \tag{1.76}$$

3) Tồn tại $z_0 \ne 0$ để chuỗi (1.73) hội tụ tại z_0 và tồn tại z_1 để chuỗi (1.64) phân kỳ tại z_1. Theo định lý 1.10 ta suy ra rằng chuỗi (1.73) hội tụ khi $\left|z\right| < \left|z_0\right| = R_0$, phân kỳ khi $\left|z\right| > \left|z_1\right| = R_1$. Trong hình vành khăn $z : R_0 < \left|z\right| < R_1$, chuỗi (1.73) có thể hội tụ hoặc phân kỳ.



♦ Nếu $R_0 = R_1$ thì ta đặt $R = R_0 = R_1$.

♦ Nếu $R_0 < R_1$, ta xét $z_2 = \dfrac{R_0 + R_1}{2} = R_2$

- Nếu chuỗi (1.73) hội tụ tại z_2, ta z_2 xem đóng vai trò như z_0.
- Nếu chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_2, ta z_2 xem đóng vai trò như z_1.

Trong cả hai trường hợp thì ta đã thu hẹp hình vành khăn mà trong đó ta chưa biết chuỗi (1.73) hội tụ hay phân kỳ xuống còn một nửa.

Tiếp tục quá trình này, cuối cùng ta tìm được số R sao cho:

$$\text{Chuỗi (1.73) hội tụ khi } \left|z\right| < R \text{, phân kỳ khi } \left|z\right| > R. \tag{1.77}$$

Số R xác định theo công thức (1.75) hoặc (1.76) hoặc (1.77) *được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* (1.73).

Định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn để tìm bán kính hội tụ R.

Định lý 1.11: Nếu

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|c_{n+1}\right|}{\left|c_n\right|} \text{ (tiêu chuẩn D'Alembert)}$$

hoặc

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|c_n\right|} \text{ (tiêu chuẩn Cauchy)}$$

thì

$$R = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho} \text{ nếu } 0 < \rho < \infty \\ \infty \text{ nếu } \rho = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.78)}$$

là bán kính hội tụ của chuỗi (1.73).

Nhận xét 1.5: Giả sử chuỗi (1.73) có bán kính hội tụ là $R > 0$:

1. Có thể chứng minh được chuỗi (1.73) hội tụ đều trong mọi hình tròn $\left|z\right| \le R_1$, với R_1 bất kỳ thỏa mãn $R_1 < R$.
2. Tại các điểm trên đường tròn $\left|z\right| = R$ chuỗi (1.73) có thể hội tụ hay phân kỳ.
3. Như vậy để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa tâm a bất kỳ dạng (1.72) ta thực hiện các bước sau:
   - Đổi biến $Z = z - a$ để đưa về chuỗi lũy thừa tâm 0 dạng (1.73),
   - Tìm bán kính hội tụ R theo công thức (1.78),
   - Xét sự hội tụ khi $\left|Z\right| = R$, và từ đó suy ra miền hội tụ.

Ví dụ 1.23: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{b^n + n}$; $b > 1$.

Giải: Đặt $Z = z - i$, ta được chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{b^n + n}$ là chuỗi lũy thừa tâm 0 có dạng (1.73).

$$\frac{\left|c_{n+1}\right|}{\left|c_n\right|} = \frac{\dfrac{1}{b^{n+1} + (n+1)}}{\dfrac{1}{b^n + n}} = \frac{b^n + n}{b^{n+1} + (n+1)} = \frac{b^n\left(1 + \dfrac{n}{b^n}\right)}{b^n\left(b + \dfrac{n+1}{b^n}\right)} = \frac{1 + \dfrac{n}{b^n}}{b + \dfrac{n+1}{b^n}}.$$

Do đó $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|c_{n+1}\right|}{\left|c_n\right|} = \dfrac{1}{b}$. Vậy bán kính hội tụ $R = b$.

Khi $\left|Z\right| = b$ thì $\left|\dfrac{Z^n}{b^n + n}\right| = \dfrac{\left|Z\right|^n}{b^n + n} = \dfrac{b^n}{b^n + n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, do đó $\dfrac{Z^n}{b^n + n}$ không thể hội tụ về 0 khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi cần tìm là hình tròn mở tâm i bán kính b : $\left|z-i\right|<b$.

Định lý 1.12: Giả sử chuỗi (1.72) có bán kính hội tụ R. Khi đó tổng của chuỗi

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

là một hàm giải tích trong hình tròn hội tụ $\left|z-a\right|<R,$

có đạo hàm $f'(z)$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi

$$f'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1} \quad \textbf{(1.79)}$$

và một nguyên hàm được xác định bằng cách lấy tích phân từng số hạng của chuỗi

$$F\left(z\right)=\int_a^z f(z)dz\,;\ F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^z c_n(z-a)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}. \quad \textbf{(1.80)}$$

$f'\left(z\right)$, $F\left(z\right)$ cũng có bán kính hội tụ là R.

Định lý được chứng minh tương tự trường hợp chuỗi lũy thừa biến số thực trong Giải tích 1.

1.4.3 Chuỗi Taylor, Chuỗi Mac Laurin

1.4.3.1 Khái niệm và tính chất

Cho hàm $f(z)$ giải tích tại a, khi đó theo Định lý 1.8 hàm $f(z)$ có đạo hàm mọi cấp tại a. Xét chuỗi lũy thừa dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}(z-a)^n \quad \textbf{(1.81)}$$

được gọi là ***chuỗi Taylor*** của hàm $f(z)$ tại a.

Chuỗi Taylor tại điểm $a=0$ được gọi là ***chuỗi Mac Laurin*** của hàm $f(z)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \quad \textbf{(1.82)}$$

Định lý 1.13:

1. Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.

Nghĩa là nếu $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n=f(z)$ thì $c_n=\dfrac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}$.

2. Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $\left|z-a\right|<R$.

Nghĩa là $f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}(z-a)^n;\forall z:\left|z-a\right|<R$

Bán kính hội tụ R là số thực dương lớn nhất sao cho $f(z)$ giải tích trong lân cận $\left|z-a\right|<R$.

Chứng minh:

1. Giả sử chuỗi luỹ thừa tổng quát $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-a\right)^n$ có bán kính hội tụ R, theo định lý 1.12 ta có hàm tổng $f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-a\right)^n$ giải tích trong hình tròn hội tụ $\left|z-a\right|<R$.

Lấy lần lượt đạo hàm các cấp của hàm tổng theo công thức (1.79) ta được

$$f'\left(z\right)=c_1+2c_2\left(z-a\right)+\cdots+nc_n\left(z-a\right)^{n-1}+\cdots$$

$$f''\left(z\right)=2c_2+3\cdot 2c_3\left(z-a\right)+\cdots+n(n-1)c_n\left(z-a\right)^{n-2}+\cdots$$

… …

$$f^{(n)}\left(z\right)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}\left(z-a\right)+\cdots$$

Thay $z=a$ ta được:

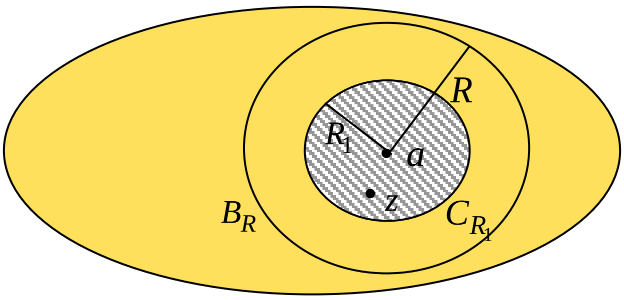
$$c_0=f\left(a\right),\ c_1=f'\left(a\right),\ c_2=\frac{f''\left(a\right)}{2!},\ \ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!},\ \ldots$$

2. Để chứng minh phần 2 của định lý ta giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn tâm a bán kính R: $B_R=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\left|z-a\right|<R\right\}$.

Với bất kỳ $z\in B_R$, chọn R_1 sao cho: $\left|z-a\right|<R_1<R$ (xem hình 1.13).

Ký hiệu C_{R_1} là đường tròn tâm a bán kính R_1.

Áp dụng công thức tích phân Cauchy (1.64) cho hàm $f(z)$ tại điểm z nằm trong đường tròn C_{R_1}, ta có $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.



Hình 1.13

Mặt khác

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{(\xi-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\xi-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{(\xi-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^n}{\left(\xi-a\right)^{n+1}}$$

Vì $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right| = \dfrac{|z-a|}{R_1} < 1$ đều với mọi $\xi \in C_{R_1}$ do đó chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ hội tụ đều với mọi $\xi \in C_{R_1}$. Vì vậy có thể chuyển dấu tích phân vào trong dấu tổng của chuỗi, đồng thời sử dụng công thức (1.69) ta được:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} f(\xi) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \right) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (z-a)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n .$$

Nhận xét 1.6:

1. Nếu hàm $f(z)$ giải tích tại a thì hàm có thể khai triển duy nhất thành chuỗi luỹ thừa tâm a, đó chính là chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a. Vì vậy, nếu có thể bằng một phương pháp khác, ta có khai triển $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ thì $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

2. Áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz , \qquad \textbf{(1.83)}$$

Trong đó C là đường cong khép kín tùy ý bao quanh điểm a và nằm trong miền giải tích của $f(z)$.

Ví dụ 1.24: Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ thành chuỗi Mac Laurin.

Giải: Rõ ràng rằng hàm $f(z)$ không giải tích tại 1 và -2, vì vậy hàm số khai triển được thành chuỗi Mac Laurin trong hình tròn $|z| < 1$.

Ta có $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2} \right)$ và $\dfrac{d^n}{dz^n}\left(\dfrac{1}{z+a} \right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(z+a)^{n+1}}$

Do đó $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{3} \left(\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(z+2)^{n+1}} \right)\Bigg|_{z=0} = \dfrac{1}{3}\left(-1 + \dfrac{1}{(-2)^{n+1}} \right)$.

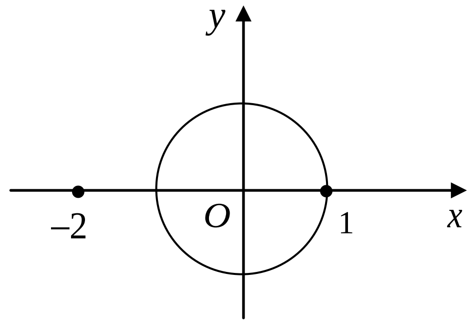
Vậy hàm $f(z)$ có chuỗi Mac Laurin

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{(-2)^{n+1}} \right) z^n .$$

Mặt khác ta cũng có thể khai triển hàm $f(z)$ thành tổng của chuỗi lũy thừa tâm 0 bằng cách sử dụng hàm tổng của chuỗi cấp số nhân (1.74):

Nếu $\left|z\right| < 1$ thì:

- $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \dfrac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- $\left|z\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right| < \dfrac{1}{2} < 1$



Hình 1.14

do đó $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Vậy $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\dfrac{1}{(-2)^{n+1}}\right)z^n$.

1.4.3.2 Khai triển thành chuỗi Mac Laurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

a. Hàm mũ $f(z) = e^z$

Với mọi n, $f^{(n)}\left(z\right) = e^z \Rightarrow f^{(n)}\left(0\right) = 1$. Vậy

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad \textbf{(1.84)}$$

Hàm mũ giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

b. Hàm $f(z) = \sin z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(iz\right)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-iz\right)^k}{k!}\right] = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(iz\right)^k}{k!}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad \textbf{(1.85)}$$

c. Hàm $f(z) = \cos z$

$$\cos z = \left(\sin z\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad \textbf{(1.86)}$$

Hàm sin, cosin giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

d. Hàm $f(z) = \sinh z$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(z\right)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-z\right)^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(z\right)^k}{k!}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad \textbf{(1.87)}$$

Hàm giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

Tương tự

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad \textbf{(1.88)}$$

e. Hàm $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$ vì hàm số không giải tích tại -1.

f. Nhánh chính của hàm lôgarit và hàm lũy thừa

Vì hàm $\ln(1+z)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{z+1}$ nên

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}. \qquad \textbf{(1.89)}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Hàm lũy thừa $m \in \mathbb{R}$:

$$\left(1+z\right)^m = 1 + \frac{mz}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} z^n + \cdots \qquad \textbf{(1.90)}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Đặc biệt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = \left(1+z\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} z + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} z^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} z^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^n.$$

Định nghĩa 1.7: *Điểm a được gọi là không điểm của hàm giải tích $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.*

Khai triển Taylor của $f(z)$ tại không điểm a có dạng

$$f(z) = c_n \left(z-a\right)^n + c_{n+1}\left(z-a\right)^{n+1} + \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left(z-a\right)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(z-a\right)^k.$$

Số tự nhiên n bé nhất sao cho $c_n = \dfrac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!} \neq 0$ thì được gọi là cấp của không điểm a.

Nếu n là cấp của không điểm a thì

$$f(z) = (z-a)^n \phi(z), \text{ với } \phi(a) = c_n \neq 0. \qquad \textbf{(1.91)}$$

$\phi(z)$ là tổng của một chuỗi luỹ thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a nên giải tích trong lân cận của a.

Định lý 1.14: Giả sử $f(z)$ giải tích tại a và không đồng nhất bằng 0 trong bất kỳ lân cận nào của a, khi đó nếu a là không điểm của $f(z)$ thì tồn tại một lân cận của a sao cho trong lân cận này không có một không điểm nào khác.

Chứng minh: Vì a là không điểm của $f(z)$ nên có thể biểu diễn dưới dạng (1.91) trong đó hàm giải tích $\phi(z)$ thỏa mãn $\phi(a) \neq 0$. Vì vậy tồn tại một lân cận của a để trong lân cận này $\phi(z) \neq 0$, do đó $f(z)$ cũng khác 0.

Hệ quả 1.3: Nếu $f(z)$ giải tích tại a và tồn tại dãy không điểm $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq a$, có giới hạn là a khi $n \to \infty$ thì $f(z)$ đồng nhất bằng 0 trong một lân cận nào đó của a.

Định lý 1.15 (định lý về tính duy nhất): Nếu $f(z),\ g(z)$ là hai hàm giải tích trong miền *D* và trùng nhau trên một dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq a$, hội tụ về a trong *D* thì $f(z) = g(z),\ \forall z \in D$.

1.4.4 Chuỗi Laurent và điểm bất thường

Có thể xảy ra trường hợp hàm $f(z)$ không giải tích tại a nhưng giải tích trong một lân cận của a bỏ đi điểm a:

$$0 < |z-a| < R$$

hoặc giải tích trong hình vành khăn

$$r < |z-a| < R.$$

Trong trường hợp này hàm $f(z)$ không thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa (chuỗi Taylor) tại a. Tuy nhiên, có thể khai triển được dưới dạng chuỗi Laurent tại a như sau.

1.4.4.1 Chuỗi Laurent

Định nghĩa 1.8: *Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K = \{z : r < |z-a| < R\}$; $0 \le r < R \le \infty$. Khi đó chuỗi sau được gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại a,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad \textbf{(1.92)}$$

trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong hình vành khăn K bao quanh a (xem hình 1.15).

Tổng $\quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ được gọi là phần đều và $\quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ được gọi là phần chính của chuỗi Laurent (1.92).

Định lý 1.16 (định lý tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent):

1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K: r < |z-a| < R$ đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent (1.92). Nghĩa là

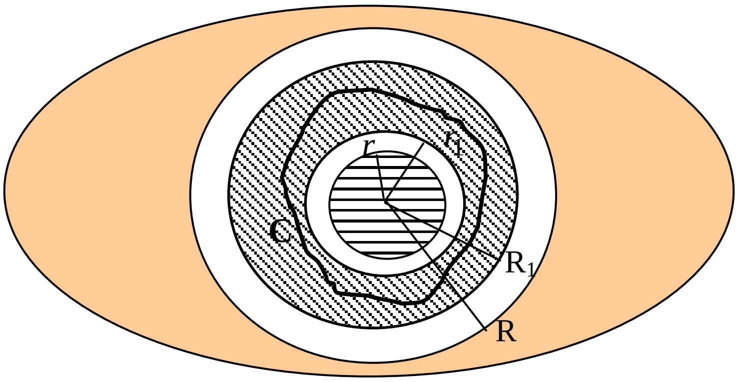
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n;\ c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

2. Ngược lại, chuỗi bất kỳ có dạng $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hội tụ trong hình vành khăn K:

$$r < |z-a| < R;\ 0 \le r < R \le \infty$$

có hàm tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$ trong hình vành khăn K. Nghĩa là nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z)$ thì $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$.

Chứng minh:



Hình 1.15

1. Với mọi $z_0 \in K: r < |z_0 - a| < R$ do đó tồn tại r_1, R_1 sao cho

$$r < r_1 < |z_0 - a| < R_1 < R.$$

Gọi là K_1 hình vành khăn: $r_1 < |z_0 - a| < R_1$ thì $f(z)$ cũng giải tích trong K_1.

Áp dụng hệ quả 1.2 và công thức (1.66) đối với hàm $f(z)$ tại $z_0 \in K_1$ ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

trong đó C_{R_1}, C_{r_1} lần lượt là đường tròn tâm a bán kính R_1, r_1.

- Xét hàm $f_1\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}}\dfrac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz$, tương tự cách chứng minh định lý 1.13 ta có

$$f_1\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}}f\left(z\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z_0-a\right)^n}{\left(z-a\right)^{n+1}}\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz\right)\left(z_0-a\right)^n$$

Đặt $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}}\dfrac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz$ thì $f_1\left(z_0\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(z_0-a\right)^n$.

- Xét hàm $f_2\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r_1}}\dfrac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz$, tương tự chứng minh định lý 1.13 ta xét

$$\frac{-1}{z-z_0}=\frac{1}{(z_0-a)-(z-a)}=\frac{1}{(z_0-a)\left(1-\dfrac{z-a}{z_0-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^n}{\left(z_0-a\right)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^{n-1}}{\left(z_0-a\right)^n}.$$

Vì $\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|=\dfrac{r_1}{\left|z_0-a\right|}<1$ đều với mọi $z\in C_{r_1}$, do đó chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(z-a\right)^{n-1}}{\left(z_0-a\right)^n}$ hội tụ đều với mọi $z\in C_{r_1}$. Vì vậy có thể chuyển dấu tích phân vào trong dấu tổng của chuỗi:

$$f_2\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r_1}}f\left(z\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^{n-1}}{\left(z_0-a\right)^n}\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r_1}}f\left(z\right)\left(z-a\right)^{n-1}dz\right)\frac{1}{\left(z_0-a\right)^n}$$

Đặt $c_{-n}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r_1}}f\left(z\right)\left(z-a\right)^{n-1}dz$ thì

$$f_2\left(z_0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z_0-a\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(z_0-a\right)^{-n}.$$

Thay chỉ số $-n$ mà n chạy qua $1,\ 2,\ 3,\ ...$ bởi chỉ số n chạy qua $-1,\ -2,\ -3,\ ...$ trong công thức trên, cuối cùng ta được.

$$f\left(z_0\right)=f_1\left(z_0\right)+f_2\left(z_0\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z_0-a\right)^n,\quad \forall z_0\in K.$$

Với đường cong C bất kỳ bao quanh a nằm trong hình vành khăn K, ta có thể chọn r_1, R_1 thỏa mãn $r<r_1<R_1<R$ sao cho đường cong kín C cũng vẫn nằm hoàn toàn trong K_1. Lúc đó:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad \text{với mọi } n \geq 0,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad \text{với mọi } n < 0.$$

2. Ngược lại, giả sử chuỗi $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hội tụ trong hình vành khăn K:

$$0 \leq r < |z-a| < R \leq \infty.$$

Với mỗi $z \in K$, chọn $r_1 < R_1$ thích hợp sao cho $r_1 < |z-a| < R_1$, khi đó chuỗi hội tụ đều trong $\overline{K_1}$: $r_1 \leq |z-a| \leq R_1$. Chọn đường cong kín C nằm hoàn toàn trong K_1 bao quanh điểm a. Áp dụng công thức (1.62) ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{c_k (z-a)^k}{(z-a)^{n+1}}dz = c_n.$$

Như vậy chuỗi $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$.

Nhận xét 1.7:

1) Các hệ số c_n trong (1.92) không bằng $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ vì $f(z)$ không giải tích tại a.

2) Hình vành khăn K: $r < |z-a| < R$ với $0 \leq r < R \leq \infty$ có các trường hợp riêng:

- Khi $r = 0$ thì K là hình tròn mở tâm a bán kính R bỏ đi điểm a: $0 < |z-a| < R$.
- Khi $R = \infty$ thì K là miền ngoài của hình tròn tâm a bán kính r: $|z-a| > r$.

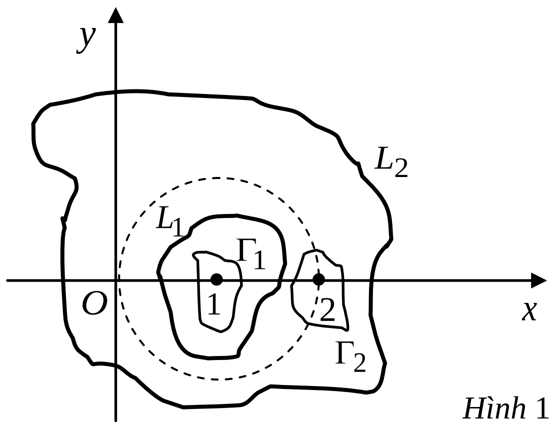
3) Hình vành khăn K trong định lý 1.16 là hình vành khăn tâm a lớn nhất mà $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn này. Vì vậy trên C_R và C_r có ít nhất một điểm mà $f(z)$ không giải tích tại đó.

4) Từ tính duy nhất của chuỗi Laurent suy ra rằng nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn K: $r < |z-a| < R$ và chuỗi $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$.

5) Sử dụng tính chất tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent ta có thể xây dựng phép biến đổi Z ở mục 1.6.

Ví dụ 1.25: Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent có tâm tại $z = 1$.

Giải: Rõ ràng rằng hàm $f(z)$ không giải tích tại 1 và 2. Vì vậy, khi khai triển theo chuỗi Laurent tâm tại 1 thì chỉ khai triển được trong hai miền: $0 < |z-1| < 1$ hoặc $|z-1| > 1$



Hình 1.16

a. Khai triển Laurent trong miền $0 < |z-1| < 1$:

Chọn đường cong kín L_1 bao quanh 1 nằm trong miền này: $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{L_1} \dfrac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+2}} dz$

.

- $n + 2 \le 0 \Rightarrow c_n = 0$ (theo định lý 1.4).
- $n = -1 \Rightarrow c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{L_1} \dfrac{\frac{1}{z-2}}{z-1} dz = \dfrac{1}{z-2}\Big|_{z=1} = -1$ (theo công thức 1.58).
- $n \ge 0 \Rightarrow c_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{z-2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = -1$

  (xem công thức 1.68)

Vậy $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n$.

b. Khai triển Laurent trong miền $|z-1| > 1$:

Chọn đường cong kín L_2 bao quanh 1 nằm trong miền này.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}} dz .$$

Chọn Γ_1, Γ_2 lần lượt là 2 đường cong kín nằm trong L_2 bao quanh 1 và 2.

Áp dụng công thức (1.61) hệ quả 1.2 của định lý 1.4 ta có:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} \frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz$$

Áp dụng công thức (1.69) ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \le -2 \\ \left.\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{(z-2)}\right)^{(n+1)}\right|_{z=1} & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \le -2 \\ -1 & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz = \left.\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\right|_{z=2} = 1, \text{ với mọi } n.$$

Vậy $c_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \le -2 \\ 0 & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} (z-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Ta cũng có thể khai triển Laurent của hàm $f(z)$ cách phân tích thành tổng của các phân thức hữu tỉ tối giản

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

- Trong miền $0 < |z-1| < 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n.$$

- Trong miền $|z-1| > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z-1|} < 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

1.4.4.2 Điểm bất thường cô lập

Định nghĩa 1.9: *Nếu hàm* $f(z)$ *giải tích trong hình vành khăn* $0<\left|z-a\right|<R$ *và không giải tích tại* a *thì* a *được gọi là điểm bất thường cô lập hay kỳ dị cô lập của hàm* $f(z)$.

Theo định lý 1.16 ta có thể khai triển hàm giải tích trong hình vành khăn ứng với điểm bất thường cô lập thành chuỗi Laurent. Có ba trường hợp xảy ra:

a. Nếu chuỗi Laurent của hàm chỉ có phần đều, nghĩa là

$$f\left(z\right)=c_0+c_1\left(z-a\right)+c_2\left(z-a\right)^2+\cdots$$

do đó tồn tại $\lim\limits_{z\to a}f\left(z\right)=c_0$.

Đặt $f\left(a\right)=c_0$ thì $f(z)$ giải tích trong hình tròn $\left|z-a\right|<R$. Điểm a được gọi là ***điểm bất thường bỏ được***.

b. Nếu phần chính chỉ có một số hữu hạn các số hạng, nghĩa là

$$f\left(z\right)=\frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1\left(z-a\right)+c_2\left(z-a\right)^2+\cdots$$

trong đó $c_{-n}\neq 0$ thì a được gọi là ***cực điểm*** *và* n ***được gọi là cấp của cực điểm***.

Cực điểm cấp 1 được gọi là *cực điểm đơn*.

c. Nếu phần chính có vô số số hạng thì a được gọi là ***điểm bất thường cốt yếu***.

Người ta còn chứng minh được rằng điểm bất thường cô lập a là:

- bỏ được khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.
- cực điểm khi và chỉ khi tồn tại giới hạn là vô cùng $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.
- cốt yếu khi và chỉ khi không tồn tại $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

Ví dụ 1.26:

- $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dfrac{z^6}{7!}+\cdots$

  Vậy $z=0$ là điểm bất thường bỏ được của hàm số $\dfrac{\sin z}{z}$.

- Hàm $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}$ trong ví dụ 1.25 có $z=1$ là cực điểm cấp 1.

- Hàm $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!z^n}+\cdots$ có $z=0$ là điểm bất thường cốt yếu.

Định lý 1.17: Giả sử hai hàm $f(z)$, $g(z)$ giải tích tại a và a là không điểm lần lượt cấp n, m của $f(z)$ và $g(z)$. Khi đó a là điểm bất thường của $\dfrac{f(z)}{g(z)}$:

- bỏ được nếu $n \geq m$
- cực điểm cấp $m - n$ nếu $n < m$.

1.5 THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

1.5.1 Định nghĩa thặng dư

Giả sử $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K = \left\{ z \middle| 0 < \left| z - a \right| < R \right\}$ có a là điểm bất thường cô lập. Từ hệ quả 1.2 ta suy ra rằng tích phân lấy theo mọi đường cong kín C bất kỳ bao điểm a nằm trong hình vành khăn K là một số phức không phụ thuộc vào đường C. Ta gọi số phức này là ***thặng dư của*** $f(z)$ ***tại*** a, ký hiệu

$$\left[\operatorname{Res} f\left(z\right); a \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f\left(z\right) dz \tag{1.93}$$

1.5.2 Cách tính thặng dư

a. Từ công thức khai triển Laurent của hàm trong hình vành khăn $K: 0 < \left| z - a \right| < R$ (công thức (1.92)), ta có

$$\left[\operatorname{Res} f\left(z\right); a \right] = c_{-1} \tag{1.94}$$

trong đó c_{-1} là hệ số của số hạng ứng với $\dfrac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

Chẳng hạn, từ ví dụ 24 ta có $\left[\operatorname{Res} \dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}; 1 \right] = -1$

b. Thặng dư tại cực điểm đơn

Nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ thì

$$\left[\operatorname{Res} f\left(z\right); a \right] = \lim_{z \to a} \left(z - a\right) f\left(z\right) \tag{1.95}$$

Thật vậy, khai triển Laurent của $f(z)$ tại a có dạng $f\left(z\right) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + f_1\left(z\right)$, trong đó $f_1\left(z\right)$ là phần đều của khai triển.

Nhân hai vế cho $\left(z - a\right)$ và lấy giới hạn khi $z \to a$, ta được:

$$\lim_{z \to a} \left(z - a\right) f\left(z\right) = c_{-1} + \lim_{z \to a} \left(z - a\right) f_1\left(z\right) = c_{-1}.$$

Đặc biệt, nếu $f\left(z\right) = \dfrac{\varphi\left(z\right)}{\psi\left(z\right)}$ thỏa mãn điều kiện $\varphi\left(a\right) \neq 0,\ \psi\left(a\right) = 0,\ \psi'\left(a\right) \neq 0$ thì

$$\left[\operatorname{Res} \frac{\varphi\left(z\right)}{\psi\left(z\right)}; a \right] = \frac{\varphi\left(a\right)}{\psi'\left(a\right)} \tag{1.96}$$

Thật vậy $\left[\text{Res}\ \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)};a\right] = \lim\limits_{z\to a}\left(z-a\right)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{(z-a)}} = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Ví dụ 1.27: $\left[\text{Res}\ \dfrac{1}{(z-1)(z-2)};\ 2\right] = \lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{z-1} = 1$;

$$\left[\text{Res}\ \cot z;0\right] = \frac{\cos z}{\left(\sin z\right)'}\Bigg|_{z=0} = 1;\quad \left[\text{Res}\ \frac{z-3}{z^2+1};\ i\right] = \frac{z-3}{(z^2+1)'}\Bigg|_{z=i} = \frac{i-3}{2i} = \frac{1+3i}{2}.$$

c. Thặng dư tại cực điểm cấp m

Giả sử a là cực điểm cấp m của $f(z)$ thì

$$\left[\text{Res}\ f(z);a\right] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad \textbf{(1.97)}$$

Thật vậy, khai triển Laurent của $f(z)$ tại a có dạng $f\left(z\right) = \dfrac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \dfrac{c_{-1}}{z-a} + f_1\left(z\right)$,

trong đó $f_1\left(z\right)$ là phần đều của khai triển.

Nhân hai vế cho $(z-a)^m$ ta được

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m f_1(z).$$

Lấy đạo hàm liên tiếp đến cấp $m-1$ và lấy giới hạn khi $z\to a$, ta được:

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] = (m-1)!\,c_{-1} + \lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f_1(z)\right] = (m-1)!\,c_{-1}.$$

Ví dụ 1.28: $\left[\text{Res}\ \dfrac{1}{z(z+2)^3};0\right] = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(z+2)^3} = \dfrac{1}{8}$,

$$\left[\text{Res}\ \frac{1}{z(z+2)^3};-2\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\left(\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{1}{8}.$$

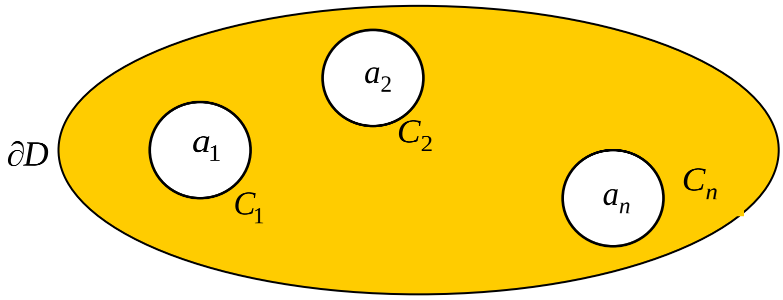
1.5.3 Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

1.5.3.1 Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân phức

Định lý 1.18: Cho miền đóng $\overline{D}$ có biên là ∂D. Giả sử $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1,\ldots,\ a_n \in D$. Khi đó

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res}\, f(z);a_k\right] \qquad \textbf{(1.98)}$$

Chứng minh: Gọi $C_1, \dots, C_n$ là các đường tròn tâm $a_1, \dots, a_n$ có bán kính đủ bé nằm trong D. Gọi $\overline{D'}$ là miền $\overline{D}$ bỏ đi hình tròn có các biên tương ứng là các đường tròn $C_1, \dots, C_n$. Biên của $\overline{D'}$ là ∂D và $C_1, \dots, C_n$.



Hình 1.17: *Tính tích phân theo thặng dư*

Áp dụng hệ quả 1.2 cho hàm $f(z)$ giải tích trong D' ta có

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Res} f(z); a_k\right].$$

Ví dụ 1.29: Tính tích phân $I = \oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$, trong đó

a. C là đường tròn: $|z| = \frac{3}{2}$.

b. C là đường tròn: $|z| = 10$.

Giải: Hàm $\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ có $z=1$ là cực điểm đơn và $z=-3$ cực điểm kép.

$$\left[\operatorname{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; 1\right] = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16},$$

$$\left[\operatorname{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; -3\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-1}\right] = \lim_{z\to -3} e^z\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}\right] = -\frac{5e^{-3}}{16}.$$

a. Khi C là đường tròn $|z| = \frac{3}{2}$ thì trong C hàm đã cho chỉ có một cực điểm $z=1$.

Vậy $I = 2\pi i \frac{e}{16} = \frac{e\pi i}{8}$.

b. Khi C là đường tròn. $|z| = 10$ thì trong C hàm đã cho có hai cực điểm $z=1$ và $z=-3$.

Do đó $I = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i\left(e^4 - 5\right)}{8e^3}$.

1.5.3.2 Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân thực

Bổ đề 1.1: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z \geq 0$, trừ ra tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, \ldots, a_n$ và thoả mãn:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \geq 0;\, z \to \infty} z f(z) = 0 \tag{1.99}$$

Khi đó $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$, trong đó $C_R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$ (xem hình 1.18).

Chứng minh: Điều kiện (1.99) suy ra: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $R \geq N$

$$\forall z : \ |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ thì } |zf(z)| < \varepsilon .$$

Có thể chọn $N > 0$ đủ lớn sao cho các điểm bất thường cô lập a_k thỏa mãn $|a_k| < N$, do đó với mọi $R > N$, $f(z)$ giải tích nửa trên đường tròn $C_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$. Vì vậy

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| = \left| \int\limits_0^{\pi} f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} dt \right| \leq \int\limits_0^{\pi} \left| f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} \right| dt < \int\limits_0^{\pi} \varepsilon dt = \varepsilon\pi$$

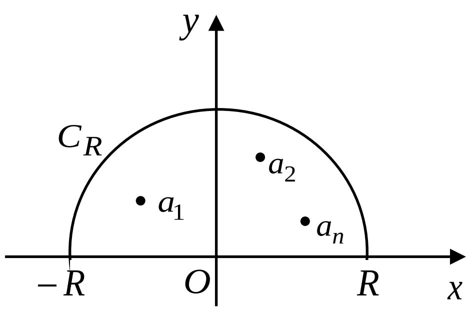
(hoặc xem công thức 1.59). Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

A. Tính tích phân có dạng $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$, trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức thực.

Định lý 1.19: Giả sử $P(z), Q(z)$ là hai đa thức hệ số thực biến phức, bậc của $Q(z)$ lớn hơn bậc của $P(z)$ ít nhất là hai. Nếu $Q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $a_1, \ldots, a_n$ là các cực điểm nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ của phân thức $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Khi đó

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Res} R(z); a_k \right] \tag{1.100}$$

Chứng minh:



Hình 1.18: Các điểm bất thường cô lập trong nửa trên của hình tròn

Chọn $R>0$ đủ lớn sao cho các cực điểm $a_1, \dots, a_n$ đều ở trong nửa trên đường tròn tâm O bán kính R. Gọi C_R là nửa trên của đường tròn này nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z>0$.

Áp dụng công thức (1.98) của định lý 1.18 ta có đẳng thức sau đúng với mọi $R>0$ đủ lớn:

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx+\int_{C_R} R(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z);a_k\right].$$

Tích phân thứ nhất ở vế trái hội tụ. Theo bổ đề 1.1 tích phân thứ hai có giới hạn bằng 0 khi $R\to\infty$ vì thỏa mãn điều kiện (1.99). Vế phải không đổi khi R đủ lớn.

Do đó khi cho $R\to\infty$ ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z);a_k\right].$$

Ví dụ 1.30: Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Giải: Hàm $R\left(z\right)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ có cực điểm kép $z=i$ nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z>0$. Vậy

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{1}{(z^2+1)^2};i\right]=\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]=\pi i\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{\pi}{4}.$$

B. Tính tích phân có dạng $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\beta x dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\beta x dx$

Hai tích phân trên là phần thực và phần ảo của tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\beta x}dx$.

Bổ đề 1.2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z\ge 0$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập và thoả mãn:

$$\left|f\left(z\right)\right|\le\frac{M}{R^k},\ \forall z\in C_R;\ \ k>0,\ M \text{ là hằng số} \qquad \textbf{(1.101)}$$

thì $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{i\lambda z}f\left(z\right)dz=0$, với mọi $\lambda>0$,

trong đó $\qquad C_R=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|=R,\ \operatorname{Im} z\ge 0\right\}$.

Chứng minh: Với mọi $z\in C_R$, đặt $z=Re^{it}$

$$\Rightarrow\int_{C_R} e^{i\lambda z}f\left(z\right)dz=\int_0^{\pi} e^{i\lambda Re^{it}}f\left(Re^{it}\right)Rie^{it}dt$$

$$\left|\int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)dz\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{i\lambda R e^{it}} f\left(Re^{it}\right) R ie^{it}\right| dt \le \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt$$

Vì $\sin t > \dfrac{t}{\pi}$ khi $0 < t \le \dfrac{\pi}{2}$, do đó

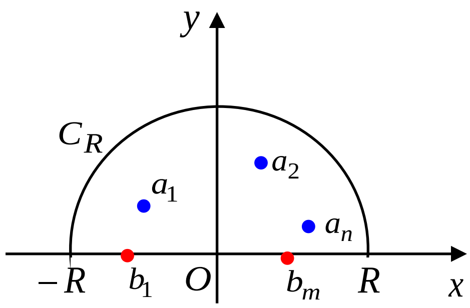
$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt \le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\lambda R t}{\pi}} dt = \frac{\pi M}{\lambda R^k}\left(1 - e^{-\lambda R}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Định lý 1.20: Giải sử $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ là một phân thức hữu tỷ thoả mãn các điều kiện sau:

1. $R(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ ngoại trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, \ldots, a_n$.
2. $R(z)$ có thể có m cực điểm $b_1, \ldots, b_m$ trên trục thực và $R(x)e^{i\beta x}$ khả tích tại những điểm này.
3. Bậc của $Q(z)$ lớn hơn bậc của $P(z)$ ít nhất là 1.

Khi đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\beta x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z}; a_k\right] + \pi i \sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z}; b_k\right] \qquad \textbf{(1.102)}$$



Hình 1.19*: Các điểm bất thường cô lập theo Định lý* 1.20

Ví dụ 1.31: Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$; $\lambda, a > 0$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + a^2} dx\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + a^2}; ai\right]\right) = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a}.$$

Ví dụ 1.32: Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$.

Hàm $R(z)=\frac{1}{z}$ thoả mãn các điều kiện của định lý 1.20, có cực điểm đơn duy nhất $z=0$ trên trục thực, do đó $I=\frac{1}{2i}\left(i\pi\left[\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z};0\right]\right)=\frac{1}{2i}\left(i\pi\right)=\frac{\pi}{2}$.

C. Tính tích phân dạng $\int\limits_{0}^{2\pi}R\left(\cos nx,\sin mx\right)dx$.

Đặt $z=e^{ix}$, ta có $\cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}$, $\sin mx=\frac{z^m-z^{-m}}{2i}$, $dx=\frac{dz}{iz}$

Khi x biến thiên từ $0\to 2\pi$ thì $z=e^{ix}$ vạch lên đường tròn đơn vị C theo chiều dương. Vì vậy

$$\int\limits_{0}^{2\pi}R\left(\cos nx,\sin mx\right)dx=\oint\limits_{C}R\left(\frac{z^n+z^{-n}}{2},\frac{z^m-z^{-m}}{2i}\right)\frac{dz}{iz} \qquad \textbf{(1.103)}$$

Ví dụ 1.33: Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5+3\sin x}$

Giải:

$$I=\oint\limits_{C}\frac{1}{5+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint\limits_{C}\frac{2dz}{3\left(z^2+\frac{10i}{3}z-1\right)}=2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{2}{3\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(z+3i\right)};-\frac{i}{3}\right]=\frac{\pi}{2},$$

vì hàm số $\frac{2}{3\left(z^2+\frac{10i}{3}z-1\right)}=\frac{2}{3\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(z+3i\right)}$ chỉ có một cực điểm đơn $z=-\frac{i}{3}$ nằm trong đường tròn đơn vị C.

Ví dụ 1.34: Tính tích phân $K(n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{\left|1-z_0e^{-ix}\right|^2}dx$, $z_0\in\mathbb{C}$, $\left|z_0\right|<1$

Giải: Đặt $z=e^{-ix}\Rightarrow dz=(-i)zdx$. Khi x tăng từ $-\pi$ đến π thì z vạch nên đường tròn đơn vị theo chiều âm, do đó

$$K(n)=-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C}\frac{z^n}{\left|1-z_0z\right|^2}\frac{dz}{(-i)z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{z^n}{\left(1-z_0z\right)\left(1-\overline{z_0z}\right)}\frac{dz}{z}$$

Mặt khác $\quad z \in C \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Do đó $\quad \dfrac{z^n}{(1 - z_0 z)(1 - \overline{z_0 z})} \cdot \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^n}{(1 - z_0 z)\left(1 - \dfrac{\overline{z_0}}{z}\right)} \cdot \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})}$.

Trong đường tròn đơn vị C hàm $\dfrac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})}$ chỉ có một cực điểm đơn $z = \overline{z_0}$.

Vậy $\quad K(n) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})} dz = \dfrac{z^n}{1 - z_0 z}\Bigg|_{z = \overline{z_0}} = \dfrac{\left(\overline{z_0}\right)^n}{1 - |z_0|^2}$.

1.6 PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Từ sau Thế chiến thứ II, sự phát triển của công nghệ kỹ thuật số đòi hỏi cần thiết kế và giải quyết các hệ dữ liệu mẫu với thời gian rời rạc (các tín hiệu được lấy mẫu tại những thời điểm rời rạc). Những hệ dữ liệu này thỏa mãn phương trình sai phân, trong đó mỗi thành phần $y(n)$ tại thời điểm n phụ thuộc vào các thành phần tại các thời điểm khác.

Dựa vào tính chất xác định duy nhất của hàm số giải tích trong hình vành khăn $r < |z| < R$ bởi dãy các hệ số trong khai triển Laurent của nó (công thức 1.92 và định lý 1.16), người ta xây dựng phép biến đổi Z và sử dụng để biểu diễn các dãy tín hiệu rời rạc qua các hàm giải tích trong hình vành khăn.

Phép biến đổi Z có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết xử lý tín hiệu và lọc số, vì nói chung việc khảo sát các hàm giải tích sẽ thuận lợi và dễ dàng hơn so với khảo sát các dãy rời rạc.

1.6.1 Định nghĩa phép biến đổi Z

Định nghĩa 1.10: *Biến đổi Z của dãy tín hiệu* $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *là hàm biến phức*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n \qquad \textbf{(1.104)}$$

Miền hội tụ của chuỗi (1.104) là miền xác định của biến đổi Z.

Ký hiệu $\qquad X(z) = \mathrm{Z}\{x(n)\}$

Trường hợp dãy tín hiệu $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ chỉ xác định với $n \ge 0$, nghĩa là $x(n) = 0$, $\forall n < 0$, khi đó biến đổi Z của tín hiệu này được gọi là ***biến đổi một phía***.

1.6.2 Miền xác định của biến đổi Z

Để tìm miền xác định của phép biến đổi Z ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn D'Alembert (định lý 1.11, công thức (1.78)).

Ta tách chuỗi vô hạn hai phía thành tổng của 2 chuỗi:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}=X_1(z)+X_2(z) \tag{1.105}$$

trong đó $X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}$, $X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}=\sum_{m=1}^{\infty}x(-m)z^{m}$ (đặt $m=-n$).

➢ Nếu $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x(n+1)\right|}{\left|x(n)\right|}$ (tiêu chuẩn D'Alembert)

hoặc $r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|x(n)\right|}$ (tiêu chuẩn Cauchy)

thì chuỗi $X_1(z)$ hội tụ khi $|z^{-1}|=\dfrac{1}{|z|}<\dfrac{1}{r}$ hay $r<|z|$.

➢ Nếu $\rho=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\left|x(-m-1)\right|}{\left|x(-m)\right|}$ (tiêu chuẩn D'Alembert)

hoặc $\rho=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\left|x(-m)\right|}$ (tiêu chuẩn Cauchy)

thì chuỗi $X_2(z)$ hội tụ khi $|z|<\dfrac{1}{\rho}=R$.

Tóm lại ta có hai tiêu chuẩn sau về miền xác định của $X(z)$.

♦ Tiêu chuẩn D'Alembert

Nếu $$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x(n+1)\right|}{\left|x(n)\right|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x(-n-1)\right|}{\left|x(-n)\right|} \tag{1.106}$$

thì miền xác định của $X(z)$ là $r<|z|<R$.

♦ Tiêu chuẩn Cauchy

Nếu $$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|x(n)\right|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|x(-n)\right|} \tag{1.107}$$

thì miền xác định của $X(z)$ là $r<|z|<R$.

♦ Trường hợp $x(n)=0,\ \forall n>n_0$ thì $r=0$, do đó miền xác định có dạng $0<|z|<R$.

$$x(n)=0,\ \forall n>n_0 \text{ có miền xác định } 0<|z|<R \tag{1.108}$$

♦ Trường hợp $x(n)=0,\ \forall n\le n_0<0$ thì $R=\infty$, miền xác định có dạng $r<|z|$. Ta gọi là ***phép biến đổi một phía***.

$$x(n)=0,\ \forall n\le n_0<0 \text{ có miền xác định } r<|z| \tag{1.109}$$

Ví dụ 1.35: *Tìm biến đổi* Z *của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} 2^n & \text{nếu } -\infty<n\le 3 \\ 0 & \text{nếu } \quad n>3 \end{cases}$

Giải: $X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=-\infty}^{3} 2^n z^{-n}=\dfrac{8}{z^3}+\dfrac{4}{z^2}+\dfrac{2}{z}+1+\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}$.

Đổi $m=-n$ vào chuỗi cuối cùng vế phải ở trên ta được:

$$1+\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}=1+\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} z^m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^m=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z}, \quad \text{với } |z|<2.$$

Vậy $X(z)=\dfrac{8}{z^3}+\dfrac{4}{z^2}+\dfrac{2}{z}+\dfrac{2}{2-z}$ với $0<|z|<2$.

Mặt khác theo nhận xét trên ta có $x(n)=0,\ \forall n>3 \Rightarrow r=0$.

$$x(n)=2^n,\ \forall n\le 3 \Rightarrow x(-n)=2^{-n},\ \forall n\ge 3 \Rightarrow \frac{x(-n-1)}{x(-n)}=\frac{2^{-n-1}}{2^{-n}}=\frac{1}{2}$$

hoặc $\sqrt[-n]{|x(n)|}=\sqrt[-n]{2^n}=\dfrac{1}{2},\ \forall n<0 \Rightarrow R=2$

Vậy biến đổi Z có miền xác định $0<|z|<2$.

Ví dụ 1.36: *Tìm biến đổi* Z *của tín hiệu xác định bởi* $x(n)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{|n|}$.

$$X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(z^{-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{3}{4z}}=\frac{4z}{4z-3}, \quad \text{với } \left|\frac{3}{4z}\right|<1 \text{ hay } |z|>\frac{3}{4}.$$

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\left(z^{-1}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-n}\left(z^{-1}\right)^n=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m \quad (\text{đặt } m=-n)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m-1=\frac{1}{1-\frac{3z}{4}}-1=\frac{4}{4-3z}-1=\frac{3z}{4-3z}, \quad \text{với } \left|\frac{3z}{4}\right|<1 \text{ hay } |z|<\frac{4}{3}.$$

Vậy $X(z)=\dfrac{4z}{4z-3}+\dfrac{3z}{4-3z}=\dfrac{7z}{(4z-3)(4-3z)}$, với $\dfrac{3}{4}<|z|<\dfrac{4}{3}$.

Ta cũng thấy rằng $r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(n)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{|n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}}=\dfrac{3}{4}$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(-n)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{|-n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}=\frac{3}{4} \Rightarrow R=\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 1.37: *Tìm biến đổi Z một phía của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} a^n & \text{nếu } n\ge 0 \\ 0 & \text{nếu } n<0\ ;\ a\ne 0 \end{cases}$

Giải:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \qquad \textbf{(1.110)}$$

có miền xác định $\left|z\right|>\left|a\right|$, (công thức 1.109).

- Trường hợp $a=1$ dãy tín hiệu $\eta(n)=\begin{cases} 1 & \text{nếu } n\ge 0 \\ 0 & \text{nếu } n<0 \end{cases}$

  có biến đổi Z là $\mathrm{H}(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$.

- Trường hợp $a=-1$, $x(n)=(-1)^n; n\ge 0$ có biến đổi Z là $X(z)=\dfrac{1}{1+z^{-1}}=\dfrac{z}{z+1}$.

Ví dụ 1.38: *Tìm biến đổi Z một phía của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} e^{anT} & \text{nếu } n\ge 0 \\ 0 & \text{nếu } n<0 \end{cases}$

với a là số phức.

Giải: Theo ví dụ 1.37 ta có

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{anT}z^{-n}=\frac{z}{z-e^{aT}} \qquad \textbf{(1.111)}$$

có miền xác định $\left|z\right|>\left|e^{aT}\right|$

Trường hợp a là số thực thì $\left|e^{aT}\right|=e^{aT}$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $\left|z\right|>e^{aT}$.

- Trường hợp $a=i\beta$ là số thuần ảo thì $\left|e^{i\beta T}\right|=1$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $\left|z\right|>1$.
- Trường hợp $a=\alpha+i\beta$ thì $\left|e^{(\alpha+i\beta)T}\right|=e^{\alpha T}$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $\left|z\right|>e^{\alpha T}$.

Ví dụ 1.39: *Tìm biến đổi Z của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} 1 & \text{nếu } 0\le n\le 5 \\ (1/2)^n & \text{nếu } n>6 \end{cases}$

Giải: $X(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{5}z^{-n}+\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n$.

Áp dụng công thức $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}q^n=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ và công thức tổng của chuỗi cấp số nhân ta được

$$X(z)=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}+\left(\frac{1}{2z}\right)^6\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^m=\frac{z^6-1}{z^6-z^5}+\left(\frac{1}{2z}\right)^6\frac{1}{1-\dfrac{1}{2z}}=\frac{z^6-1}{z^6-z^5}+\frac{1}{(2z)^6-(2z)^5},$$

miền xác định $\left|z\right|>\dfrac{1}{2}$.

1.6.3 Tính chất của biến đổi Z

Các tín hiệu $\left\{x(n)\right\}$ thường được xét từ thời điểm $n=0$ trở đi. Vì vậy hầu như chỉ xét phép biến đổi Z một phía.

Các tính chất sau cũng chỉ xét với **phép biến đổi Z một phía**.

a. Tuyến tính:

$$\mathrm{Z}\left\{Ax(n)+By(n)\right\}=A\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\}+B\mathrm{Z}\left\{y(n)\right\}, A, B \text{ là hằng số.} \quad \textbf{(1.112)}$$

b. Đồng dạng:

$$\text{Nếu } X(z)=\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\} \text{ thì } \mathrm{Z}\left\{a^{-n}x(n)\right\}=X(az). \quad \textbf{(1.113)}$$

c. Tịnh tiến

$$\text{Nếu } X(z)=\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\} \text{ thì } \mathrm{Z}\left\{x(n+1)\right\}=zX(z)-zx(0),$$

$$\mathrm{Z}\left\{x(n+m)\right\}=z^mX(z)-z^mx(0)-z^{m-1}x(1)-...-zx(m-1);\forall m>0 \quad \textbf{(1.114)}$$

d. Trễ

$$\text{Ký hiệu } \eta(n-k)=\begin{cases}1 & \text{nếu } n\ge k\\ 0 & \text{nếu } n<k\end{cases} \quad \textbf{(1.115)}$$

$$\text{Nếu } X(z)=\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\} \text{ thì } \mathrm{Z}\left\{x(n-k)\eta(n-k)\right\}=z^{-k}X(z). \quad \textbf{(1.116)}$$

e. Nhân với n

$$\text{Nếu } X(z)=\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\} \text{ thì } \mathrm{Z}\left\{nx(n)\right\}=-z\frac{dX(z)}{dz}. \quad \textbf{(1.117)}$$

f. Dãy tuần hoàn

Xét dãy tín hiệu rời rạc chu kỳ N có dạng $\left\{f(n)\right\}=\left\{\underbrace{f_0f_1f_2\cdots f_{N-1}}_{\text{Chu kỳ thứ nhất}}f_0f_1f_2\cdots\right\}$,

Đặt $$x(n)=\begin{cases}f_n & \text{nếu } 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{nếu } n\ge N\end{cases}$$

$$\text{Nếu } X(z)=\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\} \text{ thì } \mathrm{Z}\left\{f(n)\right\}=\frac{X(z)}{1-z^{-N}},\ \left|z^N\right|>1. \quad \textbf{(1.118)}$$

g. Tích chập

Tích chập của hai dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ và $\{y(n)\}$ là dãy tín hiệu $\{z(n)\}$ được ký hiệu và xác định như sau

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \qquad \textbf{(1.119)}$$

Nếu hai dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ và $\{y(n)\}$ chỉ xác định khi $n \geq 0$ thì tích chập trở thành

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k)y(k)$$

và biến đổi Z một phía có tính chất

$$\mathrm{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z) \qquad \textbf{(1.120)}$$

Ví dụ 1.40: *Tìm biến đổi* Z *một phía của tín hiệu* $x(n) = \begin{cases} \cos n\omega T & \text{nếu } n \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } n < 0 \end{cases}$

Giải: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\omega T).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{in\omega T} + e^{-in\omega T}\right)z^{-n}$.

Theo ví dụ 1.38 ứng với trường hợp số a thuần ảo và áp dụng công thức (1.110) ta được

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{in\omega T} + e^{-in\omega T}\right)z^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{i\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega T}}\right) = \frac{z\left[z - \cos(\omega T)\right]}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1},$$

miền xác định $|z| > 1$.

Ví dụ 1.41: Từ ví dụ 1.37 ta có $\mathrm{Z}\{a^n\} = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$, áp dụng công thức (1.115) ta được

$$\mathrm{Z}\{na^n\} = -z\frac{d}{dz}\left[\left(1 - az^{-1}\right)^{-1}\right] = (-z)(-1)\left(1 - az^{-1}\right)^{-2}(-a)(-1)z^{-2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

$$\mathbf{Z}\{n^2a^n\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{az}{(z-a)^2}\right] = (-z)a\left[\frac{(z-a)^2 - 2z(z-a)}{(z-a)^4}\right] = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} = \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{2a^2z}{(z-a)^3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z}\{n(n-1)a^n\} = \frac{2a^2z}{(z-a)^3}.$$

1.6.4 Biến đổi Z ngược

Theo định lý 1.16 mỗi hàm biến phức $X(z)$ giải tích trong hình vành khăn $r < |z| < R$, ($0 \leq r < R \leq \infty$) đều có thể khai triển duy nhất thành chuỗi Laurent:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{với} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{X(z)}{z^{n+1}}dz,$$

C là đường cong kín bao quanh gốc O và nằm trong hình vành khăn $r < |z| < R$.

Đặt $x(n) = c_{-n}$ thì

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{với} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} X(z) dz. \qquad \textbf{(1.121)}$$

Theo (1.121) $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ xác định duy nhất bởi $X(z)$ được gọi là ***biến đổi ngược của biến đổi*** Z *của* $X(z)$. Ký hiệu

$$\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} = \mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\}.$$

Nhận xét 1.8: 1) Tương tự khai triển Taylor, do tính chất duy nhất của khai triển hàm số giải tích trong hình vành khăn $r < |z| < R$ thành tổng của chuỗi Laurent nên ta có thể sử dụng phương pháp tính trực tiếp theo công thức (1.121) hoặc các phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa để tìm biến đổi ngược của phép biến đổi Z.

2) Nếu Z giải tích trong miền $|z| > r$ thì Z^{-1} là biến đổi ngược một phía, nghĩa là $x(n) = 0, \forall n \le 0$.

3) Có thể sử dụng thặng dư để tính các giá trị $x(n)$ theo công thức (1.121).

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} X(z) dz$$

C là đường cong kín bao quanh gốc O và bao tất cả các điểm bất thường của $z^{n-1}X(z)$.

4) Để tìm phép biến đổi ngược Z^{-1} ta có thể sử dụng các tính chất tương tự được suy ra từ phép biến đổi thuận. Chẳng hạn

$$\mathrm{Z}^{-1}\{AX(z) + BY(z)\} = A\mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\} + B\mathrm{Z}^{-1}\{Y(z)\} \text{ (tuyến tính)}$$

$$\mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(n) \Rightarrow \mathrm{Z}^{-1}\{X(az)\} = a^{-n}x(n) \text{ (đồng dạng) …}$$

A. Tìm biến đổi Z ngược bằng cách khai triển thành chuỗi hoặc tính thặng dư

Ví dụ 1.42: Hàm $X(z) = \dfrac{z+2}{2z^2 - 7z + 3} = \dfrac{z+2}{2\left(z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} + \dfrac{1}{z-3}$ giải tích tại mọi $z \ne \dfrac{1}{2}, 3$. Vì vậy ta có thể tìm biến đổi ngược trong 3 miền sau:

a. Miền $0 < |z| < \dfrac{1}{2}$:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{-1}{3\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-n} - \frac{1}{3^{-n+1}}\right)z^{-n}.$$

Vậy $\quad x(n) = \begin{cases} 2^{-n} - \dfrac{1}{3^{-n+1}} & \text{nếu } -\infty < n \le 0 \\ 0 & \text{nếu } \quad n > 0 \end{cases}.$

b. Miền $\frac{1}{2} < |z| < 3$:

$$X(z) = \frac{-1}{2z\left(1 - \frac{1}{2z}\right)} + \frac{-1}{3\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = \frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{0}3^{n-1}z^{-n}.$$

Vậy $\quad x(n) = \begin{cases} -3^{n-1} & \text{nếu } -\infty < n \le 0 \\ -2^{-n} & \text{nếu } \quad n > 0 \end{cases}.$

c. Miền $3 < |z|$: (Biến đổi Z ngược một phía)

$$X(z) = \frac{-1}{2z\left(1 - \frac{1}{2z}\right)} + \frac{1}{z\left(1 - \frac{3}{z}\right)} = \frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}3^{n}z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}z^{-n}$$

Vậy $\quad x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\infty < n \le 0 \\ 3^{n-1} - 2^{-n} & \text{nếu } \ n \ge 1 \end{cases}.$

Ví dụ 1.43: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Giải: Hàm $X(z)$ không giải tích tại $z = 1$ và $z = 2$, do đó biến đổi Z ngược một phía của $X(z)$ có dạng $|z| > 2$.

<u>Cách 1</u>: Khai triển thành chuỗi

Ta có $\quad \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-2z^{-1})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-(n+1)}, \text{ khi } |z| > 2.$$

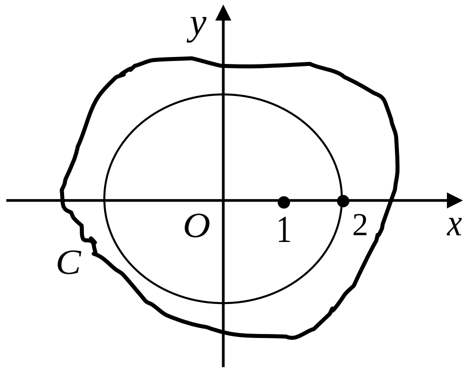
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-z^{-1})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}, \text{ khi } |z| > 1.$$

Vậy khi $|z| > 2$ ta có khai triển Laurent của hàm $X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-(n+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-(n+1)}=\sum_{m=2}^{\infty}(2^{m-1}-1)z^{-m}$$

Do đó biến đổi Z ngược của $X(z)$ là

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n\le 1\\ 2^{n-1}-1 & \text{nếu } n\ge 2\end{cases}$$



Hình 1.18

Cách 2: Dùng thặng dư và sử dụng công thức (1.121) để tìm biến đổi ngược như sau

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz\,,\ n\ge 0$$

trong đó C là đường khép kín bất kỳ nằm trong miền $|z|>2$

Khi $n>0$, sử dụng thặng dư và công thức (1.98) ta được

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz=\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)};1\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)};2\right]=-1+2^{n-1}$$

Khi $n=0$ hàm dưới dấu tích phân có 3 điểm bất thường cô lập là 0, 1, và 2, vậy

$$x(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-1}X(z)dz=\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};0\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};1\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};2\right]=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=0\,.$$

Do đó $x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n\le 0\\ 2^{n-1}-1 & \text{nếu } n>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{nếu } n\le 1\\ 2^{n-1}-1 & \text{nếu } n\ge 2\end{cases}$

Ví dụ 1.44: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{z^2+2z}{(z-1)^2}$.

Giải:

Cách 1: Khai triển thành chuỗi trong miền $|z|>1$.

$$\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\Rightarrow -\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-n)z^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2+2z}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n(z^2+2z)z^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(nz^{-n+1}+2nz^{-n})=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^{-m}+\sum_{n=0}^{\infty}2nz^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}(3m+1)z^{-m}\,.$$

Cách 2: Sử dụng công thức (1.121) để tìm biến đổi ngược như sau: Với mọi $n\ge 0$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2}dz=\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2};1\right],$$

$$x(n) = \left[\operatorname{Res}\frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2};1\right] = \frac{d}{dz}\left(z^{n+1}+2z^n\right)\Big|_{z=1} = 3n+1\,,\ \ n \geq 0\,.$$

Vậy $x(n) = 3n+1,\ n \geq 0$.

B. Tìm biến đổi Z ngược của các phân thức hữu tỉ

Để tìm biến đổi Z ngược một phía của các phân thức hữu tỉ dạng $X(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ta phân tích thành tổng của các phân thức tối giản và sử dụng công thức biến đổi Z của các phân thức tối giản.

Sử dụng công thức (1.121) ta có:

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^{k+1}};\ a \neq 0 \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(z-a)^{k+1}}dz\,.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(z-a)^{k+1}}dz = \left[\operatorname{Res}\frac{z^n}{(z-a)^{k+1}};a\right] = \frac{1}{k!}\lim_{z\to a}\frac{d^k}{dz^k}\left(z^n\right) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}\,.$$

Do đó có các công thức biến đổi ngược (xem thêm Ví dụ 1.37 và Ví dụ 1.41).

$$X(z) = \frac{z}{z-a};\ \ a \neq 0 \Rightarrow x(n) = a^n\eta(n) = \begin{cases} a^n & \text{nếu } \ n \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ n < 0 \end{cases}; \qquad \textbf{(1.122)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2};\ \ a \neq 0 \Rightarrow x(n) = na^{n-1}\eta(n-1) = \begin{cases} na^{n-1} & \text{nếu } \ n \geq 1 \\ 0 & \text{nếu } \ n < 1 \end{cases}. \qquad \textbf{(1.123)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^3};\ a \neq 0 \Rightarrow x(n) = C_n^2 a^{n-2}\eta(n-2) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2} & \text{nếu } \ n \geq 2 \\ 0 & \text{nếu } \ n < 2 \end{cases}. \qquad \textbf{(1.124)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^{k+1}};\ a \neq 0 \Rightarrow x(n) = C_n^k a^{n-k}\eta(n-k) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k} & \text{nếu } \ n \geq k \\ 0 & \text{nếu } \ n < k \end{cases}. \qquad \textbf{(1.125)}$$

Ví dụ 1.45: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản ta có

$$X(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1}\right).$$

Theo công thức (1.122) ta có $\mathrm{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\} = 1$, $\mathrm{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z+1}\right\} = (-1)^n$

$$\Rightarrow \mathrm{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right),\ n \geq 0\,.$$

Ví dụ 1.46: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{2z^2}{(z+2)(z+1)^2}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản ta có

$$X(z)=\frac{2z^2}{(z+2)(z+1)^2}=-\frac{4z}{z+2}+\frac{4z}{z+1}-\frac{2z}{(z+1)^2}.$$

Theo công thức (1.122)-(1.123) ta có

$$\mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\}=(-2)^n;\ \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}=(-1)^n,\ \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\}=n(-1)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=-4(-2)^n+4(-1)^n-2n(-1)^{n-1}=2(-1)^n\left(2-2^{n+1}+n\right),\ n\ge 0.$$

Ví dụ 1.47: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-2)^2}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản $\dfrac{z^2+z}{(z-2)^2}=\dfrac{z}{z-2}+\dfrac{3z}{(z-2)^2}$.

Theo công thức (1.122)-(1.123) ta có

$$\mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}=2^n,\ \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)^2}\right\}=n2^{n-1}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=2^n+3n2^{n-1}=\left(3n+2\right)2^{n-1},\ n\ge 0.$$

1.6.5 Ứng dụng biến đổi Z để giải phương trình sai phân

Có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi Z và phép biến đổi ngược để giải các phương trình sai phân.

Ví dụ 1.48: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$2x(n+2)-3x(n+1)+x(n)=5\cdot 3^n,\ n\ge 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0$ và $x(1)=1$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$2\mathrm{Z}\left\{x(n+2)\right\}-3\mathrm{Z}\left\{x(n+1)\right\}+\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\}=5\mathrm{Z}\left\{3^n\right\},$$

Từ công thức (1.114) và ví dụ 1.37 ta có

$$2z^2X(z)-2z^2x(0)-2zx(1)-3\left[zX(z)-zx(0)\right]+X(z)=\frac{5z}{z-3}.$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được

$$(2z-1)(z-1)X(z)=\frac{z(2z-1)}{z-3}\ \Rightarrow X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}.$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-1}\right).$$

Áp dụng công thức (1.122) ta nhận được nghiệm của phương trình sai phân

$$x(n)=\mathrm{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}-\frac{1}{2}\mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right),\ n\ge 0$$

Ví dụ 1.49: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$x(n+2)-2x(n+1)+x(n)=1,\ n\ge 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0$ và $x(1)=3/2$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$\mathrm{Z}\left\{x(n+2)\right\}-2\mathrm{Z}\left\{x(n+1)\right\}+\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\}=\mathrm{Z}\left\{1\right\},$$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)-2\left[zX(z)-zx(0)\right]+X(z)=\frac{z}{z-1}$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được $X(z)=\dfrac{3z^2-z}{2(z-1)^3}$.

$$X(z)=\frac{3z^2-z}{2(z-1)^3}=\frac{3z^2-3z+2z}{2(z-1)^3}=\frac{3z}{2(z-1)^2}+\frac{z}{(z-1)^3}.$$

Áp dụng công thức (1.122)-(1.123) ta được

$$x(n)=\boldsymbol{Z}^{-1}\left\{\frac{3z^2-z}{2(z-1)^3}\right\}=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+n.$$

Ta cũng có thể tìm biến đổi ngược bằng cách tính thặng dư như sau:

$$x(n)=\boldsymbol{Z}^{-1}\left\{\frac{3z^2-z}{2(z-1)^3}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{3z^{n+1}-z^n}{2(z-1)^3}dz=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{3z^{n+1}}{2}-\frac{z^n}{2}\right)\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}n^2+n.$$

Ví dụ 1.50: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$x(n+2)+b^2x(n)=0,\ n\ge 0$$

với $|b|<1$ và thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=b^2$ và $x(1)=0$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$\mathrm{Z}\left\{x(n+2)\right\}+b^2\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\}=0,$$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+b^2X(z)=0$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được $X(z)=\dfrac{b^2z^2}{z^2+b^2}$.

$$x(n) = \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{b^2z^2}{z^2+b^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{b^2 z^{n+1}}{(z-ib)(z+ib)}dz$$

$$x(n) = \left.\frac{b^2 z^{n+1}}{z+bi}\right|_{z=bi} + \left.\frac{b^2 z^{n+1}}{z-bi}\right|_{z=-bi} = \frac{b^{n+2}i^n}{2} + \frac{b^{n+2}(-i)^n}{2}$$

$$= \frac{b^{n+2}e^{in\pi/2}}{2} + \frac{b^{n+2}e^{-in\pi/2}}{2} = b^{n+2}\cos\frac{n\pi}{2}\ ,\ n \ge 0.$$

Hoặc sử dụng phương pháp phân tích thành các phân thức hữu tỉ tối giản

$$X(z) = \frac{b^2z^2}{z^2+b^2} = \frac{b^2}{2}\left(\frac{z}{z-bi} + \frac{z}{z+bi}\right)$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{b^{n+2}i^n}{2} + \frac{b^{n+2}(-i)^n}{2} = b^{n+2}\,\frac{e^{i\frac{n\pi}{2}} + e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{2} = b^{n+2}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Ví dụ 1.51: Giải hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) + 2y(n) \\ y(n+1) = 3x(n) + 3y(n), \quad n \ge 0 \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = 0$ và $y(0) = 5$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z ta được hệ phương trình ảnh

$$\begin{cases} zX(z) - x(0)z = 4X(z) + 2Y(z) \\ zY(z) - y(0)z = 3X(z) + 3Y(z) \end{cases},$$

Thay điều kiện đầu ta được $\begin{cases} (z-4)X(z) - 2Y(z) = 0 \\ 3X(z) - (z-3)Y(z) = -5z. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có nghiệm ảnh

$$X(z) = \frac{10z}{(z-6)(z-1)} = \frac{2z}{z-6} - \frac{2z}{z-1}\ ;\ Y(z) = \frac{5z(z-4)}{(z-6)(z-1)} = \frac{2z}{z-6} + \frac{3z}{z-1}.$$

$$x(n) = \mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\} = 2\cdot 6^n - 2\ ;\ y(n) = \mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\} = 2\cdot 6^n + 3.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Nếu hàm biến phức $w = f(z)$ có đạo hàm tại z_0 thì có đạo hàm mọi cấp tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.2. Hàm biến phức $w = f(z)$ giải tích tại z_0 thì có thể khai triển thành tổng của chuỗi lũy thừa tâm z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.3. Hàm biến phức $w = f(z)$ có đạo hàm khi và chỉ khi phần thực và phần ảo $u\left(x,y\right)$, $v\left(x,y\right)$ có đạo hàm riêng cấp 1.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.4. Nếu z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm biến phức $w = f(z)$ thì có thể khai triển Laurent của hàm số này tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.5. Tích phân của hàm biến phức giải tích $w = f(z)$ trong miền đơn liên D không phụ thuộc đường đi nằm trong D.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.6. Tích phân trên một đường cong kín của hàm biến phức giải tích $w = f(z)$ trong miền đơn liên D luôn luôn bằng không.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.7. Thặng dư của hàm biến phức $w = f(z)$ tại z_0 là phần dư của khai triển Taylor của hàm này tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.8. Hàm biến phức $w = f(z)$ có nguyên hàm khi và chỉ khi giải tích.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.9. Giả sử hàm biến phức $w = f(z)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập, khi đó tích phân của $w = f(z)$ dọc theo đường cong kín C (không đi qua các điểm bất thường) bằng tổng các thặng dư của $w = f(z)$ nằm trong đường C.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.10. Có thể tìm được một hàm biến phức bị chặn, không phải hàm hằng và giải tích tại mọi điểm.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.11 Rút gọn các biểu thức sau

a. $2\left(5-3i\right)-3\left(-2+i\right)+5\left(i-3\right)$, **b.** $\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}$,

c. $\left|3-4i\right|\left|4+3i\right|$, **d.** $\left(3-2i\right)^3$,

e. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$, **f.** $\dfrac{\left(1+i\right)\left(2+3i\right)\left(4-2i\right)}{\left(1+2i\right)^3\left(1-i\right)}$.

1.12 Giải các phương trình sau

a. $z^2+z+1=0$, **b.** $z^3-2z-4=0$,

c. $2z^4-3z^3-7z^2-8z+6=0$.

1.13 Tính căn

a. $\sqrt[3]{-1+i}$, **b.** $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}$.

1.14 **a.** Giả sử $z=\omega$ là một nghiệm khác 1 của phương trình $z^5=1$, chứng minh rằng $\left\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\right\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình $z^5=1$.

b. Chứng minh $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.

c. Tổng quát hóa kết quả a. và b. cho phương trình $z^n=1$.

1.15 Tính quỹ tích những điểm trong mặt phẳng phức thoả mãn

a. $\left|z-3-4i\right|=2$, **b.** $\arg\left(z-i\right)=\dfrac{\pi}{4}$,

c. $\left|z-2\right|+\left|z+2\right|=6$, **d.** $\left|z+2\right|=2\left|z-1\right|$,

e. $\left|z+5\right|-\left|z-5\right|=6$, **f.** $\operatorname{Im} z\le 3$,

g. $1<\left|z+2i\right|\le 2$, h. $\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

1.16 Tính phần thực và phần ảo của các hàm biến phức sau

a. $w=z^3$ **b.** $w=\dfrac{1}{1-z}$ **c.** $w=e^{3z}$.

1.17 Cho $w=z+\dfrac{1}{z}$. Tìm đạo hàm $w'(z)$ trực tiếp từ định nghĩa. Với giá trị nào của z thì hàm số không giải tích.

1.18 Chứng minh hàm $w=z\left|z\right|$ không giải tích tại mọi $z\neq 0$.

1.19 Chứng minh rằng hàm

a. $w=z^4$ **b.** $w=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z\neq\pm i$

thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tính $w'(z)$ trong mỗi trường hợp trên.

1.20 Tìm hàm biến phức giải tích $w=f\left(z\right)=u(x,y)+iv(x,y)$ biết phần thực

a. $u(x,y)=x^3-3xy^2$, **b.** $u(x,y)=x^2-y^2+2x$,

c. $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$.

1.21 Tìm hàm biến phức giải tích $w=f\left(z\right)=u(x,y)+iv(x,y)$ biết phần ảo

a. $v(x,y)=\dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2}$, **b.** $v(x,y)=2xy+3x$,

c. $v(x,y)=e^x\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y$.

1.22 Tính tích phân $I = \int\limits_C |z|\,dz$ trong hai trường hợp sau

a. C là đoạn thẳng nối 2 điểm -1 và +1.

b. C là nửa cung tròn tâm 0 nằm trong nửa mặt phẳng trên đi từ điểm -1 đến điểm 1.

1.23 **a.** Tính tích phân $I = \oint\limits_C \left(\bar{z}\right)^2 dz$, C là đường tròn $|z| = 1$.

b. Tính tích phân $I = \int\limits_C \left(\bar{z}\right)^2 dz$, dọc theo đường $y = x^2$ từ điểm $(0,0)$ đến (1,1).

1.24 Cho C là đường tròn $|z-1| = 3$, tính các tích phân sau:

a. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz$,

b. $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$.

1.25 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{dz}{z-3}$ trong hai trường hợp sau:

a. C là đường tròn $|z| = 1$.

b. C là đường tròn $|z+i| = 4$.

1.26 Tính tích phân $I = \int\limits_C z\,dz$ trong đó C là đường gấp khúc có đỉnh lần lượt là $-2,\ -1+2i,\ \ 1+i,\ 2$.

1.27 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$ trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

1.28 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2} dz$ trong đó C là ellipse $4x^2 + y^2 - 2y = 0$.

1.29 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^3}$ trong các trường hợp sau:

a. C là đường tròn $|z-1| = R,\ R < 2$,

b. C là đường tròn $|z+1| = R,\ R < 2$,

c. C là đường tròn $|z| = R,\ R < 1$.

1.30 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4} dz$ trong đó C là đường cong kín bất kỳ bao quanh điểm $z = 1$.

1.31 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{\left(z-1\right)^3} dz$, C là đường tròn $\left|z+1\right| = 3$.

1.32 Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$, **b.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}$,

c. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z-i\right)^n}{3^n}$, **d.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z-i\right)^{3n}}{3^n + n}$.

1.33 Viết bốn số hạng đầu trong khai triển Taylor của hàm số dưới đây tại $z = 0$.

a. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$, **b.** $w = \sin\frac{1}{1-z}$.

1.34 Khai triển Laurent của hàm số $w = \frac{z+1}{z^2 + z - 2}$

a. Trong hình vành khăn $1 < \left|z\right| < 2$.

b. Trong hình tròn $\left|z\right| < 1$.

c. Trong miền ngoài của hình tròn $\left|z\right| > 2$.

1.35 Khai triển Laurent của các hàm số tại các điểm được chỉ ra sau đây. Tìm miền hội tụ chuỗi, chỉ ra cấp hay loại cực điểm.

a. $w = \frac{e^z}{\left(z-1\right)^2}$, $z = 1$; **b.** $w = z\cos\frac{1}{z}$, $z = 0$;

c. $w = \frac{\sin z}{z - \pi}$, $z = \pi$; **d.** $w = \frac{z}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)}$, $z = -1$;

e. $w = \frac{1}{z\left(z+2\right)^3}$, $z = 0$, $z = -2$;

1.36 Tính tích phân $\oint\limits_C \frac{z^2}{(z+1)(z+3)} dz$ trong đó C là đường tròn $\left|z\right| = 4$.

1.37 Nếu C là đường tròn $\left|z\right| = 2$, chứng tỏ rằng $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{ze^{zt}}{\left(z^2+1\right)^2} dz = \frac{1}{2} t\sin t$.

1.38 Tính tích phân $\oint\limits_C \frac{dz}{\left(z-1\right)^2\left(z^2+1\right)}$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

1.39 Tính tích phân $\oint\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, C là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

1.40 Tính các tích phân thực sau

a. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; **b.** $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$, n nguyên dương;

c. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$; **d.** $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}$, $a>0$.

1.41 Tính các tích phân thực sau

a. $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$; **b.** $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$;

c. $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^2+4}dx$; **d.** $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin \pi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

1.42 Tính các tích phân thực sau

a. $I=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2-\cos x}$; **b.** $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}dx$;

c. $I=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$; **d.** $I=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}dx$, $0<a<1,\ n\in\mathbb{N}$.

1.43 Chứng minh các tính chất sau đây của phép biến đổi Z:

Tín hiệu: $x(n)$	Biến đổi Z tương ứng: $X(z)$	
a. $Ax(n)+By(n)$	$AX(z)+BY(z)$	(*tính tuyến tính*).
b. $x(n-n_0)\eta(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	(*tính trễ*).
c. $a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	(*tính đồng dạng*).
d. $nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	(*đạo hàm ảnh*)
e. $x(n)*y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$	$X(z)Y(z)$	(*tích chập*).

1.44 Tìm biến đổi Z của các dãy tín hiệu sau:

a. $x(n)=e^{in\omega}\eta(n)$.

b. $x(n)=ne^{-na}\eta(n)$.

1.45 Tìm biến đổi Z của các dãy tín hiệu sau:

a. $x(n) = a^n \eta(-n)$.

b. $x(n) = -a^n \eta(-n-1)$.

c. $x(n) = 2^n \operatorname{rect}_N(n)$, trong đó $\operatorname{rect}_N(n) = \eta(n) - \eta(n-N)$: gọi là dãy chữ nhật.

1.46 Tìm biến đổi Z ngược của hàm giải tích $X(z) = \dfrac{4}{z^3(2z-1)}$ trong miền $|z| > \dfrac{1}{2}$.

1.47 Tìm biến đổi Z một phía của dãy các tín hiệu sau

a. $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **b.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 5 \\ 1 & \text{nếu } 0 \le n \le 5 \end{cases}$ **c.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 0 \\ -1 & \text{nếu } n = 1 \\ a^n & \text{nếu } n \ge 2 \end{cases}$

1.48 Tìm biến đổi Z một phía của dãy các tín hiệu sau

a. $x(n) = nTe^{-anT}$ **b.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 0 \\ n^2 a^{n-1} & \text{nếu } n \ge 1 \end{cases}$ **c.** $x(n) = \cos(n-2)\eta(n-2)$

d. $x(n) = \sin(n\omega_0 T + \theta)$ **e.** $x(n) = (-1)^n$

1.49 Tìm biến đổi ngược một phía $x(n) = \boldsymbol{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\},\ n \ge 0$.

a. $X(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)(z^2 - z + 1/4)}$ **b.** $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-a)}$ **c.** $X(z) = e^{a/z}$

d. $X(z) = \dfrac{z+1}{z^{10}(z-1/2)}$ **e.** $X(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$

1.50 Giải các phương trình sai phân, các hệ phương trình sai phân sau:

a. $x(n+1) - x(n) = n^2,\ x(0) = 1$ **b.** $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 1,\ x(0) = x(1) = 0$

c. $x(n+1) - 5x(n) = \cos(n\pi),\ x(0) = 0$ **d.** $x(n+2) - \dfrac{1}{4}x(n) = \dfrac{1}{2^n},\ x(0) = x(1) = 0$

e. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - 4y(n) \\ y(n+1) = 2x(n) - 3y(n);\ x(0) = 3, y(0) = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) - 2y(n) \\ y(n+1) = -6y(n);\ \ x(0) = -1, y(0) = -7 \end{cases}$.