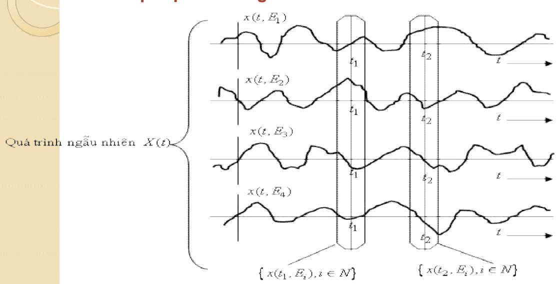
CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1. KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.1. Khái niệm quá trình ngẫu nhiên



1

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\{X(t,\omega);\ t \in T\}$ xác định trong cùng một phép thử .

Các quá trình này vừa phụ thuộc vào thời gian t, vừa phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên ω.

Khi cố định tham số t thì $X(t,\omega)$ là biến ngẫu nhiên phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên ω, và khi cố định ω ta được hàm theo thời gian t và được gọi là hàm mẫu hoặc một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên.

Tập chỉ số T thường biểu diễn tham số thời gian

Do tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nên một tín hiệu được truyền đi là một quá trình ngẫu nhiên $\{X(t,\omega); t \in T\}$

Tín hiệu cụ thể nhận được $\{x(t); t \in T\}$ là một hàm mẫu (một thể hiện) của quá trình ngẫu nhiên

2

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên

4.1.2.1 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập trạng thái E

Quá trình có trạng thái rời rạc nếu E là tập đếm được

Quá trình thực hoặc quá trình trạng thái liên tục nếu E là một khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$

Quá trình trạng thái phức nếu E là một tập con của tập số phức $\mathbb{C}$

Quá trình trạng thái k-véc tơ nếu E là một tập con của tập $\mathbb{R}^k$

3

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.2.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập các chỉ số T

- Nếu $T \subset \mathbb{Z}$ thì quá trình $\{X(t);\ t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian rời rạc hoặc tham số rời rạc.

Trường hợp này ta ký hiệu X_n thay cho $X(t)$ và gọi là một dãy ngẫu nhiên

- Nếu $T=[0; \infty)$ hoặc $T=\mathbb{R}$ thì $\{X(t);\ t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian liên tục

4

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.2.3. Phân loại theo các tính chất xác suất của quá trình ngẫu nhiên

Quá trình độc lập

Nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$, các biến ngẫu nhiên

$$X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)$$

là độc lập.

Ví dụ 4.1: Giả sử $X_1, X_2, ...$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Bernoulli với xác suất

$$P\{X_n = 1\} = p, P\{X_n = 0\} = q = 1 - p;\ \forall n = 1, 2, ...$$

Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một quá trình ngẫu nhiên gọi là quá trình Bernoulli tham số p.

4

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Một ví dụ về dãy mẫu của quá trình Bernoulli có thể nhận được bằng cách gieo đồng xu liên tiếp. Nếu mặt sấp xuất hiện ta gán giá trị 1, nếu mặt ngửa xuất hiện ta gán giá trị 0.

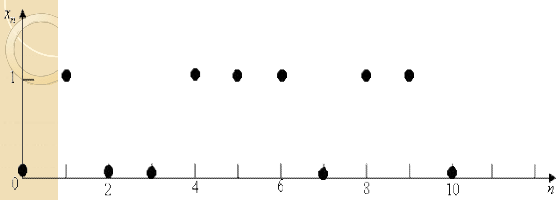
Chẳng hạn

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Mặt xuất hiện	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	$\cdots$
x_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

Dãy mẫu $\{x_n, n \geq 1\}$ nhận được ở trên được minh họa trong hình sau

6

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN



Hình 5.2: Hàm mẫu của quá trình Bernoulli

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Mặt xuất hiện	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	$\cdots$
x_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

CHƯƠNG V: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Quá trình có gia số độc lập

Nếu với mọi cách chọn các thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$ thì các biến ngẫu nhiên

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2),...., X(t_n)-X(t_{n-1})$$

là độc lập

Quá trình gia số độc lập dừng

Quá trình gia số độc lập được gọi là quá trình gia số độc lập dừng nếu

$\forall s,t : s < t;\ \forall h \geq 0;\ X(t)-X(s)$ và $X(t+h)-X(s+h)$

có cùng phân bố

CHƯƠNG V: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Quá trình Martingal

Nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_{n+1}$ và các giá trị bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_n$ thì

$$\mathrm{E}\left[X(t_{n+1}) \middle| X(t_1)=a_1,...,X(t_n)=a_n\right]=a_n$$

Tính chất Martingal nói rằng giá trị *trung bình* của hệ ở thời điểm tương lai t_{n+1} bằng giá trị hệ nhận được có ở thời điểm hiện tại t_n và *không phụ thuộc vào giá trị hệ đã nhận được trong quá khứ.*

Một quá trình gia số độc lập với kỳ vọng bằng 0 là quá trình Martingal.

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Quá trình Markov

Nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$, với mọi giá trị tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$; với mọi thời điểm $t > t_n$ và với mọi a ta có

$$P\left\{X(t)\leq a \middle| X(t_1)=a_1,...,X(t_n)=a_n\right\}=P\left\{X(t)\leq a \middle| X(t_n)=a_n\right\}$$

Nghĩa là qui luật xác suất trong tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ. Nói cách khác *quá trình Markov mô tả các hệ không có trí nhớ* (memoryless).

Hàm xác suất chuyển từ thời điểm s đến thời điểm t

$$p(s,a;t,A)=P\left\{X(t)\in A \middle| X(s)=a\right\};\ s<t$$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được gọi là chuỗi Markov (hay xích Markov, Markov chains).

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xác định qua hàm khối lượng xác suất, vì vậy tính chất Markov đối với chuỗi Markov $\{X_n; n=0,1,2,...\}$ với thời gian rời rạc được viết lại như sau

$$P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_0=i_0, X_1=i_1,...,X_n=i\right\}=P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right\}$$

$\forall\ i_0, i_1, ..., i, j \in E$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Quá trình dừng (stationary)

Dừng theo nghĩa chặt (strictly stationary)

Nếu với mọi $h > 0$, với mọi thời điểm $t_1, t_2, ..., t_n$ thì hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\left(X(t_1+h), X(t_2+h), ..., X(t_n+h)\right)$$

$$\left(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\right)$$

có cùng phân bố xác suất.

Nói riêng mọi $X(t)$ có cùng phân bố.

Quá trình dừng theo nghĩa chặt ít gặp trong thực tế và người ta mở rộng khái niệm quá trình dừng theo nghĩa sau

Dừng theo nghĩa rộng hay dừng hiệp phương sai (wide sense stationary or covariance stationary)

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ dừng theo nghĩa rộng nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

1. Với mọi t, $\mathrm{E}\,X(t) = \mathrm{m} =$ hằng số
2. Với mọi t, $\mathrm{E}\,[X(t), X(t+\tau)]$ chỉ phụ thuộc τ

Hàm tự tương quan của quá trình

$$K_X(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t), X(t+\tau)\right]$$

4.2 CHUỖI MARKOV

Chuỗi Markov là quá trình Markov $\{X(t);\ t \in T\}$ có không gian trạng thái E đếm được

Tùy theo tập chỉ số $T = \{0, 1, 2, ...\}$ hoặc $T = (0; \infty)$ tương ứng ta có chuỗi Markov với thời gian rời rạc hoặc liên tục

Công thức xác suất chuyển

$$p(s,i;t,j) = P\left\{X(t) = j \middle| X(s) = i\right\},\ t > s; i, j \in E$$

Nếu xác suất chuyển chỉ phụ thuộc vào $t - s$

$$p(s,i;t,j) = p(s+h,i;t+h,j)$$

đúng với mọi h, thì ta nói *quá trình là thuần nhất theo thời gian*

Quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được gọi là chuỗi Markov (hay xích Markov, Markov chains).

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xác định qua hàm khối lượng xác suất, vì vậy tính chất Markov đối với chuỗi Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, ...\}$ với thời gian rời rạc được viết lại như sau

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i\right\} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\}$$

$\forall\ i_0, i_1, ..., i, j \in E$

4.2.1 Chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất

Quá trình $\{X_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ với thời gian rời rạc được gọi là chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

i) Không gian trạng thái E của quá trình $\{X_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ là tập đếm được

ii) Hàm xác suất chuyển là thuần nhất theo thời gian, nghĩa là

$$p(0,i;m,j) = p(n,i;m+n,j)$$

4.2.2. Ma trận xác suất chuyển

Với mọi $i, j \in \mathrm{E}$; đặt

$$p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = P\left\{X_1 = j \middle| X_0 = i\right\}$$

Xác suất này không phụ thuộc vào n, là *xác suất để từ trạng thái i sau một bước hệ sẽ chuyển thành trạng thái j*

Ma trận $\quad P = \left[p_{ij}\right]$

được gọi là ma trận xác suất chuyển hay ma trận xác suất chuyển sau một bước của chuỗi Markov $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$

Các phần tử p_{ij} trên mỗi hàng của ma trận xác suất chuyển thỏa mãn điều kiện

$$p_{ij} \geq 0,\ \sum_{j \in E} p_{ij} = 1;\ \forall i \in E$$

4.2.3. Ma trân xác suất chuyển bậc cao, Phương trình Chapman–Kolmogorov

$$p_{ij}^{(k)} = P\left\{X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right\} = P\left\{X_k = j \middle| X_0 = i\right\}$$

là xác suất sau k bước hệ sẽ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j

Ma trận $\quad P^{(k)} = \left[p_{ij}^{(k)}\right]$

gọi là ma trận xác suất chuyển sau k bước

Ký hiệu $P^{(0)} = I$, I là ma trận đơn vị; $P^{(1)} = P$

Định lý 4.1: Với mọi $n \geq 0$, ta có

$$P^{(n+1)} = PP^{(n)} = P^{(n)}P$$

$$\Rightarrow P^{(n)} = P^n$$

$$\Rightarrow P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}, \forall n, m \geq 0$$

ta có thể viết các phần tử tương ứng dưới dạng

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

gọi là *Phương trình Chapman-Kolmogorov*

4.2.4. Phân bố xác suất của hệ $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$

Giả sử không gian trạng thái có dạng $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Ma trận hàng

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) & p_1(n) & p_2(n) & \cdots \end{bmatrix}, p_j(n) = P\{X_n = j\}, n = 0,1,2,...$$

gọi là ma trận phân bố của hệ tại thời điểm n hoặc phân bố của X_n

Các phần tử của ma trận hàng $\mathbf{P}(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$p_k(n) \geq 0; \ \sum_k p_k(n) = 1$$

Ma trận phân bố đầu $\quad \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_0(0) & p_1(0) & p_2(0) & \cdots \end{bmatrix}$

Định lý 4.2: Với mọi $n \geq 0$, $m \geq 0$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)}$$

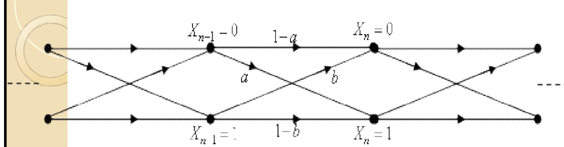
$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n)P$$

$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)P^{(m)}$$

Ví dụ 4.2: Xét một mạng viễn thông gồm một dãy các trạm chuyển tiếp các kênh viễn thông nhị phân cho trong sơ đồ sau

Trong đó X_n ký hiệu mã số nhị phân đầu ra của trạm thứ n và X_0 ký hiệu mã số nhị phân đầu vào của trạm đầu tiên

Đây là một mô hình chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0, 1\}$



Ma trận xác suất chuyển của mạng viễn thông này còn được gọi là ma trận kênh

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}; 0 < a < 1, 0 < b < 1$$

a, b là xác suất lỗi

Giả sử $a = 0{,}1$, $b = 0{,}2$ và phân bố xác suất đầu

$$P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0{,}5$$

1. Tìm ma trận xác suất chuyển sau 2 bước,
2. Tìm phân bố của trạm thứ hai X_2

Giải:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(0)P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}585 & 0{,}415 \end{bmatrix}$$

Như vậy có 58,5% tín hiệu 0 và 41,5% tín hiệu 1 ở đầu ra của trạm thứ hai, mặc dù đầu vào ở trạm đầu tiên hai tín hiệu này xuất hiện đồng khả năng

4.2.6 Phân bố dừng, phân bố giới hạn, phân bố ergodic

Ma trận hàng $\quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots \end{bmatrix}$

*được gọi là phân bố dừng của chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển **P** nếu thoả mãn 2 điều kiện:*

$$\begin{cases} \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P & (a) \\ p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1 & (b) \end{cases}$$

Từ điều kiện a) suy ra $\quad \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P = \mathbf{P}^* P^2 = \ldots = \mathbf{P}^* P^n \ ; \forall n$

Như vậy nếu chuỗi Markov có phân bố dừng tại thời điểm nào đó thì hệ sẽ có phân bố xác suất không thay đổi sau mọi bước chuyển kể từ thời điểm này.

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Định nghĩa 4.4: Ta nói rằng chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển $\boldsymbol{P}$ có phân bố giới hạn là $[p_1 \quad p_2 \quad \ldots]$ nếu thoả mãn 2 điều kiện:

1) Với mọi j tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ không phụ thuộc i,

2) $\sum\limits_j p_j = 1\,,\quad p_j \ge 0$

Nếu điều kiện 2) được thay bởi

3) $\sum\limits_j p_j = 1\,,\quad p_j > 0$

thì chuỗi Markov được gọi là *có tính ergodic và* $[p_1 \quad p_2 \quad \ldots]$ *là phân bố ergodic*

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

➢ Nếu phân bố của X_{n_0}(ở thời điểm thứ n_0) của chuỗi là phân bố dừng thì từ thời điểm này trở đi phân bố của chuỗi không thay đổi; nghĩa là với mọi $m \ge n_0$, X_m và X_{n_0} có cùng phân bố

➢ Phân bố giới hạn là phân bố hệ sẽ đạt được khi thời gian tiến đến vô cùng. Phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển, không phụ thuộc phân bố đầu. Trong thực tế có thể đến thời điểm nào đó trở đi ma trận xác suất chuyển có các hàng bằng nhau, lúc đó chuỗi đạt được phân bố giới hạn. Ví dụ 4.5 sau đây chứng tỏ với n = 20 thì chuỗi đạt được phân bố giới hạn.

➢ Phân bố ergodic là phân bố giới hạn với xác suất dương tại mọi trạng thái của chuỗi. Như vậy về lâu dài hệ nhận giá trị tại mọi trạng thái với xác suất dương.

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Ví dụ 4.5: Có 3 mạng điện thoại di động A, B, C cùng khai thác thị trường. Tỉ lệ chiếm lĩnh thị trường hiện tại tương ứng là 40%, 30% và 30%. Theo thống kê người ta thấy xác suất thay đổi mạng của khách hàng trong mỗi quí (3 tháng) như sau:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Áp dụng công thức tính được phân bố tại thời điểm thứ n

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)}$$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

$n = 0$ $\qquad \mathbf{P}(0) = [0,4 \quad 0,3 \quad 0,3]$

$n = 1$ $\quad P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(1) = [0,35 \quad 0,43 \quad 0,22]$

$n = 6$ $\quad P^6 = \begin{bmatrix} 0,2125 & 0,5492 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5648 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5181 & 0,2853 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(6) = [0,2047 \quad 0,5476 \quad 0,2477]$

$n = 18$ $\quad P^{18} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5499 & 0,2501 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(18) = [0,200 \quad 0,550 \quad 0,250]$

$n = 20$ $\quad P^{20} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(20) = [0,20 \quad 0,55 \quad 0,25]$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Ví dụ 4.6: Về sự bình đẳng trong giáo dục giữa các nhóm chủng tộc

Trên cơ sở báo cáo điều tra dân số của văn phòng điều tra dân số Hoa kỳ năm 1960, hai tác giả Lieberson và Fuguitt (1967) đã xác định được ma trận chuyển trình độ học vấn giữa hai thế hệ khi so sánh tình trạng học vấn của nhóm thanh niên độ tuổi 20-24 với trình độ học vấn của bố của họ

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Dưới ĐH} & \text{ĐH} & \text{Trên ĐH} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,43 & 0,34 & 0,23 \\ 0,10 & 0,36 & 0,54 \\ 0,05 & 0,15 & 0,80 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Dưới ĐH} \\ \text{ĐH} \\ \text{Trên ĐH} \end{array}$$

CHƯƠNG IV: QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

		% Dưới ĐH	% ĐH	% Trên ĐH	Chỉ số % khác nhau
$\mathbf{P}(1)$ (1960)	Da trắng	46	31	23	29
	Da mầu	75	16	09	
$\mathbf{P}(2)$	Da trắng	24	30	46	13
	Da mầu	34	33	33	
$\mathbf{P}(3)$	Da trắng	16	26	58	6
	Da mầu	20	28	52	
$\mathbf{P}(4)$	Da trắng	12	23	64	3
	Da mầu	14	25	61	
$\mathbf{P}(5)$	Da trắng	11	22	68	1
	Da mầu	11	23	66	
$\mathbf{P}(6)$	Da trắng	10	22	68	1
	Da mầu	11	22	67	
$\mathbf{P}(7)$	Da trắng	10	21	69	1
	Da mầu	10	22	68	
$\mathbf{P}(8)$	Da trắng	10	21	69	0
	Da mầu	10	21	69	

Bảng kết quả trên được giả định rằng ma trận chuyển P giữa hai nhóm da trắng và da mầu là như nhau nhưng có xuất phát điểm khác nhau (phân bố đầu khác nhau)

Như vậy không phụ thuộc vào xuất phát điểm, sau 8 thế hệ các nhóm người trong cộng đồng đều có trình độ học vấn như nhau theo tỷ lệ 10% dưới ĐH, 21% ĐH và 69% trên ĐH

Nói cách khác hệ đạt phân bố giới hạn tại thời điểm $n = 8$

Định lý 4.3: Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì đó là phân bố dừng duy nhất.

Định lý 4.4: Nếu chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn thì chuỗi này là ergodic khi và chỉ khi tồn tại n_0 sao cho

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$$

Nhận xét 4.2: Mỗi phân bố dừng là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \end{bmatrix} P \\ x_j > 0, \ \sum_j x_j = 1. \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} P^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ x_j > 0, \ \sum_j x_j = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 4.7: Xét chuỗi Markov ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \ 0 < a, b < 1$$

Theo định lý 4.4 chuỗi Markov có tính ergodic với phân bố ergodic cũng là phân bố dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{a+b} \\ x_2 = \dfrac{a}{a+b} \end{cases}$$

4.3. QUÁ TRÌNH DỪNG

4.3.1. Hàm tự hiệp phương sai và hàm tự tương quan của quá trình dừng

Hàm tự tương quan:

$$K_X(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t+\tau)\overline{X(t)} \right]$$

Hàm tự hiệp phương sai

$$C_X(\tau) = \operatorname{cov}(X(t), X(t+\tau)); \ \forall t, t+\tau \in I$$

Công thức liên hệ giữa hàm tự tương quan và hàm tự hiệp phương sai

$$C_X(\tau) = K_X(\tau) - |m|^2$$

Ví dụ 4.9: Xét quá trình ngẫu nhiên

$$X(t) = U\cos\lambda t + V\sin\lambda t$$

trong đó λ là một hằng số; U, V là hai biến ngẫu nhiên thoả mãn

$$EU = EV = 0, \ \operatorname{cov}(U, V) = 0, \ \operatorname{var} U = \operatorname{var} V = \sigma^2$$

$X(t)$ là một quá trình dừng có trung bình bằng 0 và hàm tự tương quan

$$K_X(\tau) = \sigma^2 \cos\lambda\tau$$

Ví dụ 4.10: Tín hiệu ngẫu nhiên hình sin

$$X(t) = A\cos(\lambda t + \Theta)$$

trong đó A, Θ là hai biến ngẫu nhiên độc lập,

$$\mathrm{E}A = 0, \ \operatorname{var} A = \sigma^2$$

Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0; 2\pi]$

thì $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan

$$K_X(\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\cos\lambda\tau$$

Ví dụ 4.11: Quá trình $W(t)$, $t \ge 0$ được gọi là một quá trình Wiener với tham số σ^2 nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

1) $W(0) = 0$
2) $\forall s,t;\ 0 \le s < t: W(t) - W(s)$ là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathbf{N}(0;\sigma^2(t-s))$
3) $W(t)$, $t \ge 0$ là quá trình với gia số độc lập

Ta có $m(t) = \mathrm{E}W(t) = 0 \quad \forall\ t \ge 0$

$$r(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$$

Vậy quá trình Wiener là một quá trình gia số độc lập dừng nhưng không phải là quá trình dừng.

Quá trình Wiener biểu diễn chuyển động Brown mô tả sự chuyển động của hạt trong môi trường chất lỏng thuần nhất

4.3.2. Biểu diễn phổ của quá trình dừng

Mật độ phổ của quá trình dừng $\{X(t);\ t \in I\}$ là hàm $\mathscr{P}_X(f)$ thỏa mãn

$$K_X(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f} \mathscr{P}_X(f)df \quad \text{(quá trình thời gian rời rạc)}$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau 2\pi f} \mathscr{P}_X(f)df \quad \text{(quá trình thời gian liên tục)}$$

Hàm mật độ phổ là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan và hàm tự tương quan là biến đổi Fourier ngược của mật độ phổ

$$\mathscr{P}_X(f) = \mathscr{F}\{K_X(\tau)\}, \quad K_X(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{P}_X(f)\}$$

4.3.3. Mật độ phổ công suất

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & \text{nếu} \quad |t| < T/2 \\ 0 & \text{nếu} \quad |t| \ge T/2. \end{cases}$$

Áp dụng đẳng thức Parseval $\mathscr{E}_T = \int_{-\infty}^{\infty} X_T^{\,2}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df$

$$\mathrm{E}\mathscr{E}_T = \mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty} X_T^{\,2}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}X_T^{\,2}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{E}\left(X_T^2(t)\right)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left(X_T^2(t)\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df$$

Mật độ phổ công suất của quá trình, viết tắt PSD (Power Spectral Density)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2$$

Định lý Wiener - Khintchine

Mật độ phổ công suất PSD của quá trình dừng (với giá trị trung bình 0) bằng mật độ phổ của quá trình này

$$\mathscr{P}_X(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2, \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{P}_X(f)df$$

Tính chất

1) Giá trị của hàm mật độ phổ tại 0 bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm tự tương quan,

$$\mathscr{P}_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)d\tau$$

2) Giá trị bình phương trung bình của quá trình dừng bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm mật độ phổ

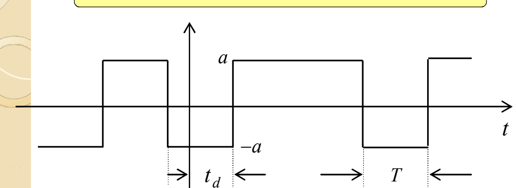
$$\mathrm{E}|X(t)|^2 = \mathrm{E}|X(0)|^2 = K_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{P}_X(f)df$$

Ví dụ 4.13: (***Sóng ngẫu nhiên nhị phân***) Xét quá trình ngẫu nhiên $\{X(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ gồm các bit 1 và các bit 0 thoả mãn các điều kiện sau:

1) Bit 1 và 0 lần lượt được biểu diễn bởi các xung chữ nhật với biên độ $+a$ và $-a$ volt với độ rộng của xung là T giây.

2) Các hàm mẫu (sample functions) là không đồng bộ và giả thiết rằng thời điểm xuất phát của xung thứ nhất t_d xảy ra đồng khả năng trong khoảng từ 0 đến T. Điều này có nghĩa là t_d là giá trị mẫu của biến ngẫu nhiên T_d có phân bố đều trong đoạn $[0;T]$

3) Trong khoảng thời gian xung bất kỳ $(n-1)T < t - t_d < nT$, hai bit 1 và 0 là đồng khả năng xuất hiện. $X(t)$ và $X(s)$ là độc lập nếu t, s ở trong khoảng xung thời gian khác nhau.



Hàm tự tương quan $K_X(\tau) = \begin{cases} a^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{nếu} \quad |\tau| < T \\ 0 & \text{nếu} \quad |\tau| \ge T. \end{cases}$

Mật độ phổ công suất $\mathscr{P}_X(f) = \mathscr{F}\{K_X(\tau)\} = a^2 T \operatorname{sinc}^2(fT)$

4.3. TRUNG BÌNH THEO THỜI GIAN VÀ TÍNH CHẤT ERGODIC

Định nghĩa 4.6: Trung bình theo thời gian của hàm số $x(t)$, $t\in\mathbb{R}$ được định nghĩa và ký hiệu

$$A[x(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Toán tử $A[\cdot] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\cdot]dt$

gọi là toán tử trung bình theo thời gian

Thực hiện toán tử trung bình theo thời gian theo các hàm mẫu $x(t)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ ta được trung bình theo thời gian và hàm tự tương quan theo thời gian xác định như sau

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathfrak{R}_X(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp được gọi là tính ergodic. Quá trình ngẫu nhiên có tính ergodic được gọi là quá trình ergodic.

Quá trình dừng là quá trình ergodic nếu

$$\overline{x} = \mathrm{E}[X(t)] = m \quad \text{và} \quad \mathfrak{R}_X(\tau) = R_X(\tau) = \mathrm{E}[x(t)x(t+\tau)]$$

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian ở các cấp trùng với trung bình theo tập hợp cùng cấp tương ứng. Giả thiết này đáng tiếc là không phải luôn đúng như một số các nhà kỹ thuật đầu thế kỷ 20 tin tưởng.

Định lý 4.8: Quá trình dừng thời gian rời rạc $\{X(n);\ n\ge 0\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_X(n)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n} C_X(m) = 0$$

Định lý 4.9: Quá trình dừng $\{X(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_X(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T C_X(t-s)dtds = 0$$

Định lý 4.10: Quá trình dừng $\{X(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_X(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)C_X(t)dt = 0$$

Hệ quả 4.1: Nếu $\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = 0$ thì quá trình là ergodic.

Tính ergodic là một dạng rất hạn chế của tính dừng và thật khó khăn để kiểm tra xem trong tình huống vật lý cụ thể nào thì giả thiết ergodic thỏa mãn. Dù sao chúng ta vẫn thường giả thiết quá trình là ergodic để đơn giản hóa.

Trong thế giới thực, chúng ta vẫn buộc lòng phải làm việc với hàm mẫu của quá trình. Khi ấy, dù muốn hay không ta cũng chỉ nhận được các giá trị trung bình, hàm tự tương quan theo thời gian.