3.1. HÀM DELTA

3.1.1. Khái niệm hàm delta

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hoặc hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng.

Hàm delta tại $t = t_0$, ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$, thỏa mãn hai điều kiện sau

$$\forall t \neq t_0 : \delta_{t_0}(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1$$

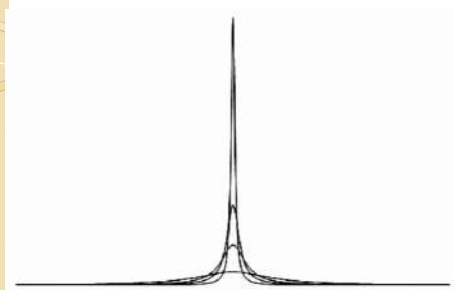
Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm trơn theo nghĩa thông thường
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp

Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan nt\Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1$$



Hình 3.1: *Đồ thị các hàm* $g_n(t)$

Vì vậy, một cách hình thức ta đồng nhất giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ là hàm delta tập trung tại gốc $t = 0$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \delta(t) = \delta_0(t)$$

Hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ có giá trị tập trung tại t_0 bất kỳ có thể nhận được từ hàm $\delta(t)$ bằng cách tịnh tiến

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$$

Hoặc

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n(t);\ \hat{g}_n(t) = g_n(t-t_0) = \frac{n}{\pi\left(1+n^2(t-t_0)^2\right)}$$

Tích chập của hàm delta

$$f(t_0) * \delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

3.1.2. Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Với mọi hàm liên tục *x*(*t*)

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt = \begin{cases} x(v) & \text{nếu } 0 < v < l \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

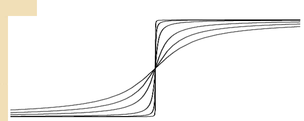
Do đó

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_v(u)du = \eta(t-v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > v \\ 0 & \text{nếu } t < v \end{cases}$$

Vậy có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{t} g_n(u)du = \int_{-\infty}^{t} \frac{n}{\pi\left(1+n^2u^2\right)}du = \frac{1}{\pi}\arctan nt + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nếu } t = 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm $f_n(t)$

Vậy có thể coi $\dfrac{d\eta(t)}{dt} = \delta(t)$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

Giả sử *x*(*t*) là hàm khả vi (theo nghĩa thông thường) tại mọi *t* ngoại trừ tại điểm gián đoạn t_0 với bước nhảy β, khi đó ta có thể biểu diễn lại hàm *x*(*t*) dưới dạng

$$x(t) = y(t) + \beta\eta(t - t_0)$$

trong đó y(t) là hàm liên tục tại mọi điểm và khả vi tại mọi điểm có thể trừ điểm gián đoạn. Do đó có đạo hàm

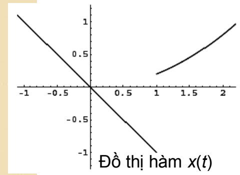
$$x'(t) = y'(t) + \beta\delta(t - t_0)$$

Ví dụ 3.1: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

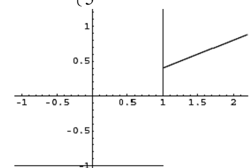
CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\eta(t-1)\ ;\ y(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 - \frac{6}{5} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

$$x'(t) = y'(t) + \frac{6}{5}\delta(t-1)\ ,\ y'(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 1 \\ \frac{2}{5}t & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$



Đồ thị hàm *x*(*t*)

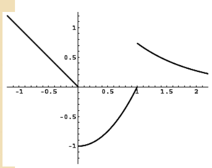


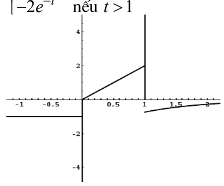
Đồ thị hàm *x'*(*t*)

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

Ví dụ 3.2: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nếu } t < 0 \\ t^2 - 1 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$

$$x'(t) = -\delta(t) + \frac{2}{e}\delta(t-1) + \begin{cases} -1 & \text{nếu } t < 0 \\ 2t & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ -2e^{-t} & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$





CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

Ví dụ 3.3: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên ***X*** xác định bởi công thức

$$F_X(x) = P\{X \le x\},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Nếu $f_X(x)$ là hàm mật độ xác suất thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Nếu biến ngẫu nhiên ***X*** rời rạc có hàm khối lượng xác suất

$p_X(x_k) = P\{X = x_k\}$ thì $F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_X(x_k)$

$$F_X(x) = \sum_{x_k \le x} p_X(x_k) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{x_k} p_X(x_k)\delta(t - x_k)dt$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \sum_{x_k} p_X(x_k)\delta(x - x_k)$$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

3.1.3. Khai triển Fourier của hàm delta

Các hệ số Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\cos n0 = \frac{1}{\pi}\ ,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\sin n0 = 0$$

Chuỗi Fourier

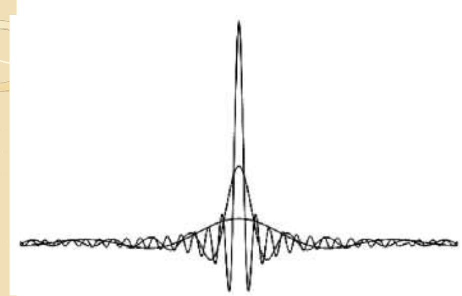
$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}(\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots)$$

$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\left(\cdots + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots\right)$$

Tổng riêng của chuỗi Fourier

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT



Hình 3.7: *Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier hàm delta*

3.1.4. Biến đổi Fourier của hàm delta

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi f t} dt = 1 \qquad \delta(t) = \mathscr{F}^{-1}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f t} df$$

$\delta(t)$ là hàm chẵn, do đó $\delta(t) = \delta(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi f t} df$

Tính đồng dạng của biến đổi Fourier $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$$\mathscr{F}\{\eta(t)\} = \mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda) d\lambda\right\} = \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ -1 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} = \eta(t) - \eta(-t) \Rightarrow \mathscr{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{1}{i\pi f}$$

3.2. CÁC HÀM SỐ TÍCH PHÂN

3.2.1. Công thức xác định các hàm số tích phân

Hàm tích phân mũ $\operatorname{Ei}(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \ t > 0$

Hàm tích phân sin $\operatorname{Si}(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin u}{u} du, \ t > 0$

$$\operatorname{si}(t) = -\int_{t}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \ ; \quad \operatorname{Si}(t) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si}(t)$$

Hàm tích phân cosin $\operatorname{Ci}(t) = -\int_{t}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du, \ t > 0$

Hàm lỗi (error function) $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du, \ t > 0$

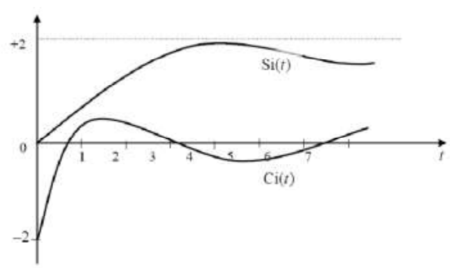
$$\operatorname{erf}(t) = 2\Phi\left(\sqrt{2}t\right) - 1, \ \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

3.2.2. Khai triển các hàm tích phân thành chuỗi luỹ thừa

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

$$\operatorname{Ci}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{\ln\left(s^2+1\right)}{2s}\right\} = \ln t + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!2n}$$

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t - \frac{t^3}{1!3} + \frac{t^5}{2!5} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots\right]$$



Hình 3.9: *Đồ thị của các hàm* **Si**(*t*) *và* **Ci**(*t*)

3.3. HÀM GAMMA, HÀM BETA

3.3.1. Định nghĩa hàm Gamma (Gauss)

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+m)}, \ \forall z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Công thức Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} . \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}$$

Công thức Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \ \operatorname{Re} z > 0$$

3.3.2. Các tính chất của hàm Gamma

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \forall z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

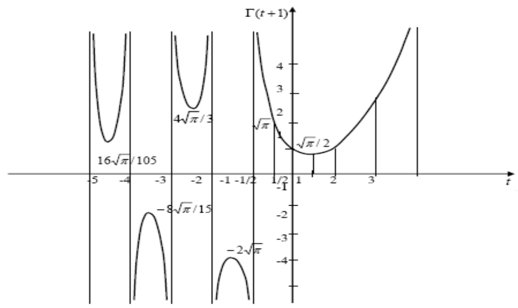
$$\Gamma(1) = 1; \ \Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!, \ \forall z = n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \ \forall z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \ \forall z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \ \forall z = n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \ \forall z = n \in \mathbb{N}$$



Hình 3.10: Đồ thị hàm Gamma

3.3.5. Hàm Beta

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Xác định với mọi $p,q>0$

Tính chất

$$B(p,q)=B(q,p) \qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$$

Ví dụ 3.4: $$\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=\frac{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{16}{315}$$

Ví dụ 3.5: *Tính tích phân* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}=\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}==\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

3.4. CÁC HÀM BESSEL

3.4.1. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2

Phương trình Bessel cấp α, $\alpha \geq 0$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0$$

Nếu $J_\alpha(z)$ và $Y_\alpha(z)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y(z)=AJ_\alpha(z)+BY_\alpha(z)=Z_\alpha(z)$$

3.4.1.2. Hàm Bessel loại 1

Tìm nghiệm của phương trình theo phương pháp Frobenius bằng cách xét các nghiệm dạng

$$y(z)=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\ \ a_0\neq 0$$

Thay vào phương trình và đồng nhất hệ số suy ra

$$\begin{cases}(\rho^2-\alpha^2)a_0=0\\ \left((\rho+1)^2-\alpha^2\right)a_1=0\\ \left((\rho+2)^2-\alpha^2\right)a_2+a_0=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left((\rho+r)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}=0\ ;\ k\geq 2\end{cases}$$

Từ điều kiện $a_0\neq 0$ ta được $\rho=\pm\alpha,\alpha\geq 0$

Với $\rho=\alpha$ ta được hàm Bessel loại 1 $J_\alpha(z)$

$$J_\alpha(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

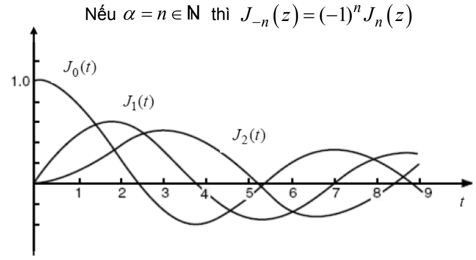
$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad J_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

Với $\rho=-\alpha$ ta được hàm Bessel loại 1 $J_{-\alpha}(z)$

$$J_{-\alpha}(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

Định lý 3.2: Nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ thì $J_\alpha(z), J_{-\alpha}(z)$ độc lập

Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$



Hình 3.12: Đồ thị các hàm Bessel $J_0(t)$, $J_1(t)$, $J_2(t)$

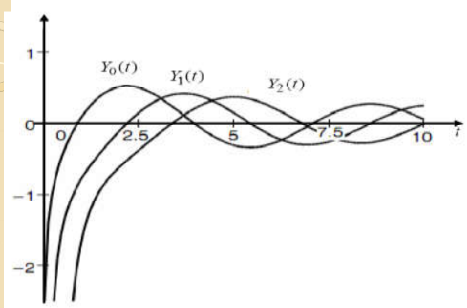
3.4.1.3. Hàm Bessel loại 2

$$Y_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{(\cos \pi\alpha) J_\alpha(z) - J_{-\alpha}(z)}{\sin \pi\alpha} & \text{nếu } \alpha \neq n \\ \lim\limits_{\beta \to n} Y_\beta(z) & \text{nếu } \alpha = n \end{cases}$$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_n(z)}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n}\right]$$

Hàm Weber $I_n(z) = J_n(z)\left(A + B\int \dfrac{dz}{zJ_n^2(z)}\right)$

Hàm Neumann $N_\alpha(z) = \dfrac{1}{2}\pi Y_\alpha(z) + (\ln 2 - \gamma) J_\alpha(z)$



Hình 3.13: Đồ thị các hàm Bessel loại 2

3.4.2. Các công thức truy toán đối với hàm Bessel

$$J_{\alpha+1}(z) = \frac{2\alpha}{z} J_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z)$$

$$zJ'_\alpha(z) = \alpha J_\alpha(z) - zJ_{\alpha+1}(z) \qquad \alpha = 0 \Rightarrow J'_0(z) = -J_1(z)$$

$$J'_\alpha(z) = \frac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\right]$$

$$zJ'_\alpha(z) = zJ_{\alpha-1}(z) - \alpha J_\alpha(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right) = z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$$

$$\int_{z_0}^{z} z^\alpha J_{\alpha-1}(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} \frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right) dz = z^\alpha J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha} J_\alpha(z)\right) = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)$$

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} \frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha} J_\alpha(z)\right) dz = -z^{-\alpha} J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$$

$$\int_0^z J_\alpha(z)\,dz = 2\left[J_{\alpha+1}(z) + J_{\alpha+3}(z) + \ldots\right] = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{\alpha+2k+1}(z)$$

$$I_m = \int_0^z z^m J_m(z)\,dz \Rightarrow I_m = -z^m J_{m-1}(z) + (2m-1) I_{m-1}$$

$$I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)\,dz \Rightarrow I_{m,n} = z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1) I_{m-1,n+1}$$

Ví dụ 3.6: *Tính tích phân* $I = \int_0^\lambda z^3 J_0(z)\,dz$ *theo* $J_1(\lambda)$ *và* λ,

trong đó λ là một nghiệm dương của phương trình $J_0(z) = 0$

Áp dụng các công thức truy toán của hàm Bessel ta có

$$I_{3,0} = z^3 J_1(z) - 2I_{2,1} = z^3 J_1(z) - 2z^2 J_2(z)$$

$$I_{3,0} = z^3 J_1(z) - 2z^2\left(\frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z)\right) = (z^3 - 4z) J_1(z) + 2z^2 J_0(z)$$

$$I = I_{3,0}\Big|_{z=\lambda} = (z^3 - 4z) J_1(z) + 2z^2 J_0(z)\Big|_{z=\lambda} = (\lambda^3 - 4\lambda) J_1(\lambda)$$

3.4.5. Khai triển theo chuỗi các hàm Bessel

Chuỗi Fourier - Bessel

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha(\lambda_i x)$$

các hệ số Fourier - Bessel

$$a_i = \frac{2}{J'^2_\alpha(\lambda_i)} \int_0^1 x f(x) J_\alpha(\lambda_i x)\,dx;\ i = 1, 2, \ldots$$

trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots$ là nghiệm của phương trình $J_\alpha(x) = 0$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

3.4.6. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2 với cấp bán nguyên

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$Y_{1/2}(z) = -J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\ ;\ Y_{-1/2}(z) = J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) \quad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z - \frac{\cos z}{z}\right)$$

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right\}$$

$$J_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z + \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\cos z\right\}$$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

3.4.11. Các phương trình vi phân đưa về phương trình Bessel

1. Phương trình dạng $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + \left(k^2 - \dfrac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$

   Công thức nghiệm

$$Z_\alpha(kx) = \begin{cases} AJ_\alpha(kx) + BJ_{-\alpha}(kx) & \text{nếu}\ \ \alpha \neq n \\ AJ_\alpha(kx) + BY_\alpha(kx) & \text{nếu}\ \ \alpha = n \end{cases}$$

2. Phương trình dạng

$$y'' + \left(2a + \frac{1}{x}\right)y' + \left(b + \frac{a}{x} - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$$

   Công thức nghiệm

$$y = e^{-ax} Z_\alpha\left\{\sqrt{b - a^2}\,x\right\},\ \text{nếu}\ \ b \neq a^2$$

$$y = e^{-ax}\left(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha}\right)\ \text{nếu}\ \ b = a^2, \alpha \neq 0$$

$$y = e^{-ax}(A + B\ln x)\ \text{nếu}\ \ b = a^2, \alpha = 0$$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

3. Phương trình dạng

$$y'' + \left[\frac{1}{x} - 2g(x)\right]y' - \left[1 - \frac{\alpha^2}{x^2} + g^2(x) - g'(x) - \frac{g(x)}{x}\right]y = 0$$

   Công thức nghiệm $\quad y = e^{\int g(x)dx} Z_\alpha(x)$

4. Phương trình dạng

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 2\cot x\right)y' - \left(\frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{\cot x}{x}\right)y = 0$$

   Công thức nghiệm $\quad y = \dfrac{1}{\sin x} Z_\alpha(x)$