CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.1. SỐ PHỨC

1.1.1. Dạng tổng quát của số phức

$z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực

$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$

$\bar{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp với số phức $z = x + iy$

$z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2; \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Tập hợp tất cả các số phức ký hiệu ℂ

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.1.2. Các phép toán

Phép cộng

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Phép trừ

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

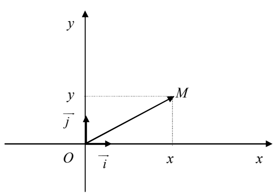
Phép nhân

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Phép chia $\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad i\frac{y}{x^2+y^2}$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.1.3. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức

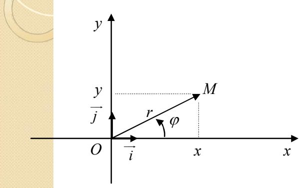


Đồng nhất mỗi điểm có tọa độ (x, y) với số phức $z = x + iy$

lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.1.4. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức



mô đun

$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

argument

$\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

dạng lượng giác $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

dạng mũ $z = |z| e^{i\varphi}$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.1.5. Lũy thừa và căn của số phức

Lũy thừa bậc n

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \; \operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Căn bậc n

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Ví dụ 1.11: Tính $\sqrt[4]{1+i}$

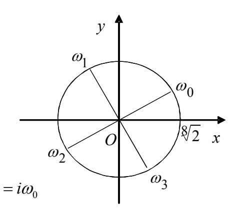
$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = i\omega_0$$

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right)\right) = -\omega_0$$

$$\omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i\omega_0$$



1.1.7. Lân cận, miền

Lân cận

ε – lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad B_\varepsilon(z_0)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<\varepsilon\}$

N – lân cận của $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ $\quad B_N(\infty)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>N\}\cup\{\infty\}$

Miền

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là *tập mở*

Tập *D* là *tập liên thông* nếu với bất kỳ 2 điểm nào của tập *D* cũng có thể nối chúng bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong *D*

Một tập mở và liên thông được *gọi là miền*

1.2. HÀM BIẾN PHỨC

1.2.1. Định nghĩa hàm biến phức

Một hàm biến phức $w=f(z),\ z\in D$ *là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức* $z\in D$ *với một hoặc nhiều số phức* w

$$z=x+iy\ ;\quad w=f(z)=u+iv\quad\Rightarrow\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

1.2.2. Giới hạn, liên tục

$$z_n=x_n+iy_n,\ L=a+ib;\quad \lim_{n\to\infty} z_n=L \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=b\end{cases}$$

$w=f(z)$ liên tục

1.2.3. Hàm khả vi, phương trình Cauchy-Riemann

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Nếu hàm phức $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ khả vi

thì phần thực và phần ảo có các đạo hàm riêng cấp 1 và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases}$$

Hàm chỉnh hình (giải tích)

Định nghĩa 1.6: *Hàm đơn trị $w=f(z)$ khả vi trong một lân cận của z được gọi là giải tích tại z. Nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói $f(z)$ giải tích trong D. $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ nếu nó giải tích trong một miền chứa $\overline{D}$.*

Khái niệm khả vi và đạo hàm của hàm phức được định nghĩa tương tự như trường hợp hàm thực. Vì vậy các tính chất và quy tắc tính đạo hàm đã biết đối với hàm thực vẫn còn đúng đối với hàm phức.

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z).$$
$$(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z).\qquad (1.38)$$

1.2.4. Các hàm phức sơ cấp cơ bản

Hàm lũy thừa $w=z^n$ **Hàm căn** $w=\sqrt[n]{z}$

Hàm mũ $w=e^z$ **Hàm lôgarit** $w=\operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z=e^w$

Các hàm lượng giác phức

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ;\ \forall z\in\mathbb{C}$$

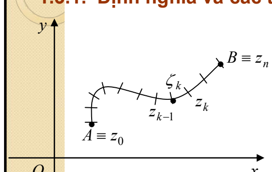
$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ z\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\ ;\ z\neq k\pi$$

Các hàm lượng giác hyperbolic phức

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$$

1.3. TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

1.3.1. Định nghĩa và các tính chất



Chia L thành *n* đoạn bởi các điểm $A\equiv z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,z_n\equiv B$

Chọn trên mỗi cung con $\overset{\frown}{z_{k-1},z_k}$

$\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$

Tổng tích phân $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz=\lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ 1\le k\le n}}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

Tính chất

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz \;;\quad \left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$$

Tích phân theo chiều dương của đường khép kín L : $\oint_L f(z)dz$

Ví dụ 1.17: Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz \;;\; A = 0,\, B = 2+4i$

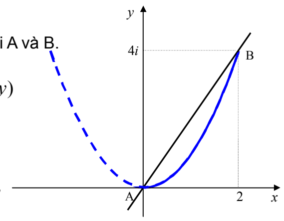
1. Dọc theo parabol : $y = x^2,\; 0 \le x \le 2$

2. Dọc theo đường thẳng nối A và B.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x+iy)^2(dx+idy)$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2-y^2)dx - 2xydy$$

$$+ i\int_{\overset{\frown}{AB}} 2xydx + (x^2-y^2)dy$$



1.3.2. Định lý tích phân Cauchy

Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm *f(z)* trong miền *D* không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của *f(z)* dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong *D* phải bằng 0.

Định lý 1: Tích phân của hàm phức chỉnh hình dọc theo mọi đường cong kín *L* bất kỳ trong miền đơn liên đều bằng 0.

Hệ quả: Nếu *f(z)* giải tích trong miền kín đơn liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ∂D thì $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$

Định lý 2: Nếu *f(z)* giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ngoài Γ_0 và các biên trong $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz$$

1.3.4. Công thức tích phân Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz \Rightarrow \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{nếu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nếu } a \notin \overline{D} \end{cases}$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{nếu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nếu } a \notin \overline{D} \end{cases}$$

1.4. CHUỖI BIẾN SỐ PHỨC

1.4.1. Chuỗi số phức

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;,\quad u_n = a_n + ib_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

1.4.2. Chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n$$

Tập hợp các giá trị *z* sao cho chuỗi hội tụ được gọi là miền hội tụ

Ví dụ 1.21: Xét chuỗi luỹ thừa cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \text{nếu } z \ne 1 \\ n & \text{nếu } z = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{khi } |z| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{khi } |z| \ge 1 \end{cases}$$

Miền hội tụ của chuỗi là hình tròn |z|<1

Bán kính hội tụ của chuỗi là số R thỏa mãn:

Chuỗi hội tụ khi $|z|<R$ và phân kỳ khi $|z|>R$

Tiêu chuẩn D'Alembert $\quad \rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$

Tiêu chuẩn Cauchy $\quad \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$

$$R = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho} \text{ nếu } 0<\rho<\infty \\ \infty \text{ nếu } \rho = 0 \end{cases}$$

Nếu chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $R>0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

thì

$$f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^z c_n (z-a)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

$f'(z), F(z)$ cũng có bán kính hội tụ là R

1.4.3. Chuỗi Taylor

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ — ***chuỗi Taylor*** của hàm f tại *a*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ — ***chuỗi Mac Laurin***

Định lý 1.13:

1) Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.

2) Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $|z-a|<R$. Bán kính hội tụ R là số thực dương lớn nhất sao cho $f(z)$ giải tích trong lân cận $|z-a|<R$.

1.4.4. Khai triển thành chuỗi Mac Laurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

1.4.5. Chuỗi Laurent và điểm bất thường

Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn

$$K = \{ z \mid r < |z-a| < R \}, \quad 0 \le r < R \le \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ (*) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

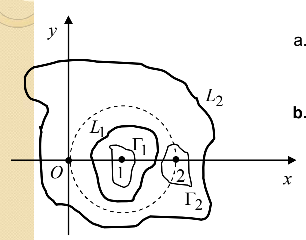
trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong K bao quanh a,

được gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại a

Định lý 1.16 (định lý tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent):

1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn K đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent.
2. Ngược lại, chuỗi bất kỳ có dạng (*) hội tụ trong hình vành khăn K có hàm tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$ trong hình vành khăn K.

Ví dụ 1.25: Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent có tâm tại $z=1$



a. Khai triển Laurent trong miền $0 < |z-1| < 1$:

b. Khai triển Laurent trong miền $|z-1| > 1$:

a. Khai triển Laurent trong miền 0 < |*z* –1| < 1:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz \qquad n+2 \le 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$n=-1 \Rightarrow c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}dz = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=1} = -1$$

$$n \ge 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = -1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

b. Khai triển Laurent trong miền |*z* –1| >1:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n \le -2 \\ -1 \text{ nếu } n \ge -1 \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz = \frac{1}{(z-1)^{n+2}}\Bigg|_{z=2} = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

1.5. THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

1.5.1. Định nghĩa thặng dư

$$\left[\text{Res } f(z);a\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

1.5.2. Cách tính thặng dư

$$\left[\text{Res } f(z);a\right] = c_{-1}$$

$\left[\text{Res } f(z);a\right] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ nếu *a* là cực điểm đơn

$\left[\text{Res } f(z);a\right] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$ cực điểm cấp *m*

1.5.3. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

1.5.3.1. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân phức

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } f(z);a_k\right]$$

f(*z*) có các điểm bất thường cô lập $a_1,\ldots, a_n \in D$

Ví dụ 1.29: Tính tích phân $I = \oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$

$$\left[\text{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2};1\right] = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16} \qquad C: |z| = 2,\ I = 2\pi i\frac{e}{16} = \frac{e\pi i}{8}$$

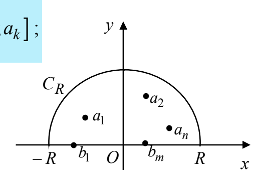
$$\left[\text{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2};-3\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-1}\right] = -\frac{5e^{-3}}{16}$$

$$C: |z| = 4 \qquad I = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right)$$

1.5.3.2. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân thực

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } R(z);a_k\right];$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\beta x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res } R(z)e^{i\beta z};a_k\right] + \pi i\sum_{k=1}^{m}\left[\text{Res } R(z)e^{i\beta z};b_k\right]$$

1.6. PHÉP BIẾN ĐỔI Z

1.6.1. Định nghĩa phép biến đổi *Z*

$$X(z) = \mathrm{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n$$

1.6.2. Miền xác định của biến đổi *Z*

Để tìm miền xác định của phép biến đổi *Z* ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn D'Alembert

Ví dụ 1.36: Tìm biến đổi *Z* của tín hiệu xác định bởi $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$

$$X(z) = \frac{4z}{4z-3} + \frac{3z}{4-3z} = \frac{7z}{(4z-3)(4-3z)}, \qquad \frac{3}{4} < |z| < \frac{4}{3}$$

5

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.6.3. Tính chất của biến đổi *Z*

$$\mathcal{Z}\{Ax(n)+By(n)\} = A\mathcal{Z}\{x(n)\}+B\mathcal{Z}\{y(n)\}$$

$$\mathcal{Z}\{e^{-anT}x(n)\} = X(ze^{aT}) \quad \text{với} \quad X(z)=\mathcal{Z}\{x(n)\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(n+m)\} = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1}x(1) - \ldots - zx(m-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\eta(n-k)\} = z^{-k}X(z) \qquad \mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = \frac{X(z)}{1-z^{-N}}$$

$$x(n)=\begin{cases} f_n & \text{nếu } 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{nếu } n\ge N\end{cases} \qquad \{f(n)\}=\left\{\underbrace{f_0f_1f_2\cdots f_{N-1}}_{\text{Chu kỳ thứ nhất}}f_0f_1f_2\cdots\right\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(n)*y(n)\} = X(z)Y(z)$$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.6.4. Biến đổi *Z* ngược

$$\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz$$

C là đường cong kín bao quanh gốc *O* và nằm trong hình vành khăn *r* <|*z*|<*R*

Ví dụ 1.42: Hàm $X(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{z-3}$ giải tích tại mọi $z\ne\frac{1}{2}, 3$.

Vì vậy ta có thể tìm biến đổi ngược trong 3 miền sau:

$|z|<\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2}<|z|<3$ $\qquad 3<|z|$ **(Biến đổi *Z* ngược một phía)**

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

a. Miền $|z|<\frac{1}{2}$

$$X(z)=\frac{1}{1-2z}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-n}-\frac{1}{3^{-n+1}}\right)z^{-n}$$

$$x(n)=\begin{cases}2^{-n}-\dfrac{1}{3^{-n+1}} & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ 0 & \text{nếu } n>0\end{cases}$$

b. Miền $\frac{1}{2}<|z|<3$

$$x(n)=\begin{cases}-3^{n-1} & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ -2^{-n} & \text{nếu } n>0\end{cases}$$

c. Miền $|z|>3$

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ 3^{n-1}-2^{-n} & \text{nếu } n\ge 1\end{cases}$$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

1.6.5. Ứng dụng biến đổi *Z* để giải phương trình sai phân

Có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi *Z* và phép biến đổi ngược để giải các phương trình sai phân

Ví dụ 1.45: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$2x(n+2)-3x(n+1)+x(n)=5\cdot 3^n, \quad n\ge 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0,\ x(1)=1$

$$2\mathcal{Z}\{x(n+2)\}-3\mathcal{Z}\{x(n+1)\}+\mathcal{Z}\{x(n)\}=5\mathcal{Z}\{3^n\}$$

$$\Rightarrow 2z^2X(z)-2z^2x(0)-2zx(1)-3[zX(z)-zx(0)]+X(z)=\frac{5z}{z-3}$$

$$\Rightarrow (2z-1)(z-1)X(z)=\frac{z(2z-1)}{z-3} \Rightarrow X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-1}\right)$$

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right),\quad n\ge 0$$

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN PHỨC

Ví dụ 1.48: Giải hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases}x(n+1)=4x(n)+2y(n)\\ y(n+1)=3x(n)+3y(n),\quad n\ge 0\end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0,\ y(0)=5$

$$\begin{cases}zX(z)-x(0)z=4X(z)+2Y(z)\\ zY(z)-y(0)z=3X(z)+3Y(z)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(z-4)X(z)-2Y(z)=0\\ 3X(z)-(z-3)Y(z)=-5z.\end{cases}$$

$$X(z)=-\frac{10z}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-6}\Rightarrow x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=2-2\cdot 6^n$$

$$Y(z)=\frac{5z(z-4)}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-6}+\frac{3z}{z-1}\Rightarrow y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=3+2\cdot 6^n$$